

## **ANALISIS SISMICO ESTATICO DE EDIFICIOS SIN LOCALIZAR CENTROS DE RIGIDEZ**

**Por Juan Carlos Molano Toro<sup>1</sup>**

### **RESUMEN**

Se presenta una nueva aproximación para el análisis matricial de edificios de varios pisos con asimetría en planta. Se combinan los resultados de tres análisis estáticos con ayuda de programas comerciales de computador u ordenador digital. En cada análisis las fuerzas son aplicadas en los Centros de Masas (CM) sin necesidad de localizar los Centros de Rigidez (CR). Los esfuerzos computacionales para la nueva aproximación son menores que para la aproximación estándar (CR). Se hace un análisis comparativo, mediante un ejemplo numérico con ayuda de la matriz de rigidez lateral-torsional de todo el edificio. El autor elaboró un programa de ordenador que incluye ambas aproximaciones, obteniéndose resultados idénticos en el cálculo del vector de desplazamientos.

### **INTRODUCCION**

La práctica del diseño sísmico establece que las fuerzas sísmicas laterales aplicadas en cada nivel de piso de un edificio con asimetría en planta, se deben aplicar en los centros de rigidez(CR) a una distancia igual a la excentricidad de diseño  $e_{dj}$  para el piso j-ésimo con la siguiente expresión:

$$e_{dj} = \alpha e_{sj} + \beta b_j \quad (1a)$$

$$e_{dj} = \delta e_{sj} - \beta b_j \quad (1b)$$

donde:

$e_{sj}$  es la excentricidad definida como la distancia entre el centro de masa (CM) y el centro de rigidez(CR) para el piso o nivel j-ésimo

$b_j$  es la dimensión del edificio en planta perpendicular a la dirección del movimiento sísmico

---

<sup>1</sup> Ingeniero Civil

Unidad Edificios. Empresas Públicas de Medellín E.S.P Medellín-Antioquia-Colombia

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  coeficientes especificados en los códigos de diseño.

El primer término en (1) con referencia a  $e_{sj}$  es entendido para tener en cuenta la respuesta lateral-torsional acoplada del edificio por la escasez de simetría en planta. El segundo término  $\beta$ , a menudo llamado excentricidad accidental y especificado como fracción de la dimensión en planta  $b_j$ , es incluido para considerar efectos torsionales debido a factores como: componente rotacional del movimiento sísmico alrededor de un eje vertical, diferencias entre valores actuales y calculados de las rigideces, resistencias de cedencia, masas por carga muerta y la distribución imprevisible y desfavorable de masas por carga viva.

Distintos Códigos o Normas especifican que las fuerzas laterales sean aplicadas a una distancia igual  $\frac{1}{2}\beta b_j$  medida desde el Centro de Masas (CM), haciéndose necesario determinar la localización de los Centros de Rigidez (CR) con los siguientes parámetros a usarse en la ecuación (1) (Goel 1997):  $\alpha = \delta = 1.0$ ,  $\beta = 0.05$ , según UBC-94;  $\alpha = 1.5$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\beta = 0.10$  según NBCC-95;  $\alpha = 1.5$ ,  $\delta = 1.0$ ,  $\beta = 0.10$  según MFDC-87 .

A excepción de edificios de un solo nivel, existen varias dificultades en establecer la localización de los CR en varios pisos de un edificio a menos que pertenezca a una clase especial conocida como **edificio proporcional** "proportional building" (Cheung and Tso 1986; Hejal and Chopra 1987; Riddell and Vásquez 1984):

Primero, no existe definición generalmente aceptada de los Centros de Rigidez(CR). Poole(1977) definió el CR de un piso como la localización de la resultante de las fuerzas cortantes de varios elementos resistentes en ese piso cuando el edificio es sometido a carga estática lateral sin causar rotación en los otros pisos. Humar(1984) interpretó el CR en cualquier piso como un punto tal que la aplicación de una fuerza lateral ubicada en este punto no causará rotación de ese piso; otros pisos pueden rotar. Sin embargo, Cheung and Tso(1986) definieron los CR's como el conjunto de puntos localizados sobre los pisos del edificio a través de los cuales se aplican las fuerzas laterales sin causar rotaciones en los otros pisos restantes.

Segundo, para una definición escogida de CR's sus localizaciones dependen de la distribución en altura de las fuerzas laterales.

Tercero, es difícil determinar los CR's para un edificio complejo de varios pisos. La mayoría de los programas comerciales de

ordenador para Análisis Estructural no tienen la capacidad de cálculos matriciales requeridos para determinar los CR's mediante procedimientos disponibles(Cheung and Tso 1986; Hejal and Chopra 1987). Sin embargo, métodos simplificados han sido desarrollados para el cálculo de los CR's a partir de resultados de análisis de pórticos planos(Poole 1977; Tso 1990, Gluck 1970) con análisis complementario de cálculos manuales o programas de propósito especial post-proceso.

Dadas las anteriores dificultades en localizar los CR's, es difícil implementar en la Norma un procedimiento estático para edificios de varios pisos con asimetría en planta.

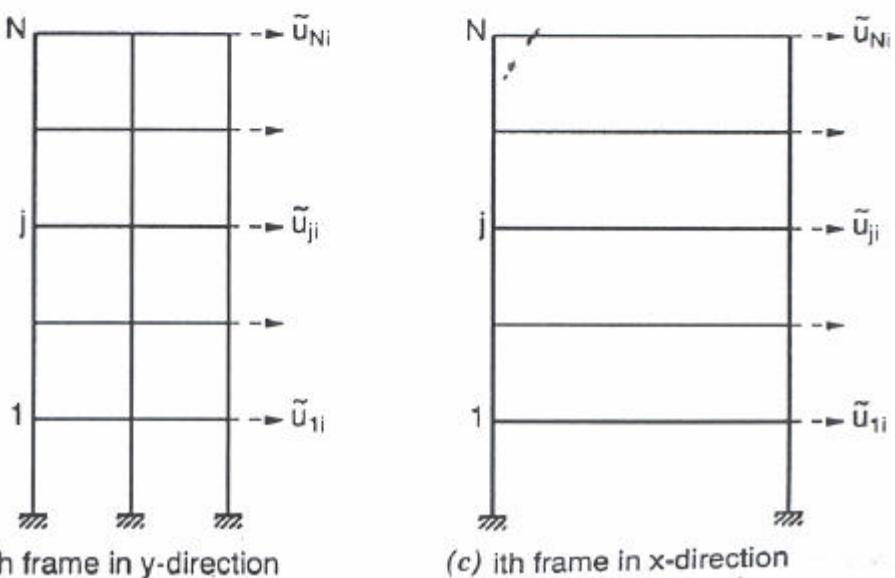
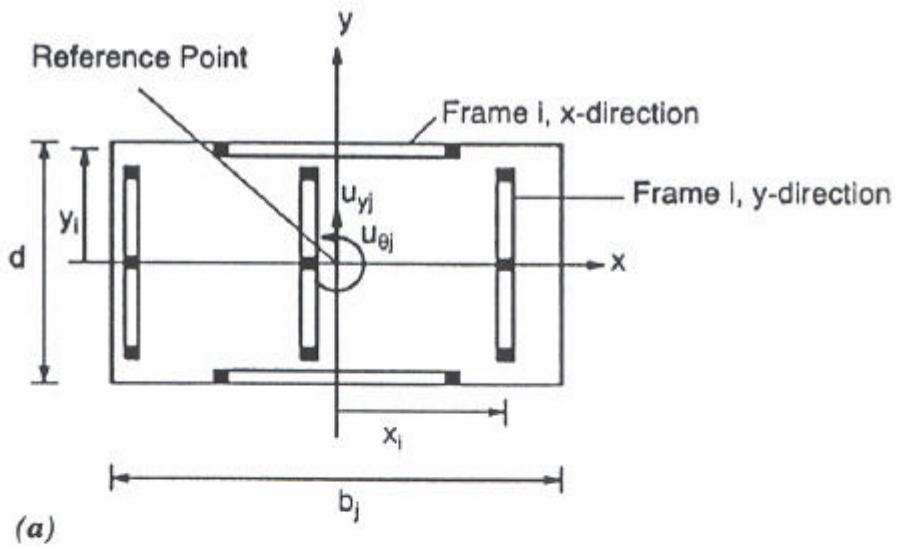
Goel and Chopra(1993) desarrollaron una aproximación de análisis que evita el cálculo explícito de los CR's con los mismos resultados de este último procedimiento, mediante demostración del principio de superposición(anexo I de la mencionada referencia). El método consiste en obtener resultados del análisis estático de tres conjuntos de fuerzas aplicadas en los CM's y combinarlos apropiadamente para determinar las fuerzas de diseño, haciendo uso de programas de ordenador comerciales de Análisis Estructural.

En este trabajo de investigación se seguirá la definición dada por Goel and Chopra(1993) describiendo ambos procedimientos: el de los CR's (llamado también Aproximación Estándar) y el de la Nueva Aproximación, con ayuda de un ejemplo numérico con matriz de rigidez lateral-torsional total del edificio presentada por Gluck (1970).

#### **ANÁLISIS USANDO CENTROS DE RIGIDEZ (CR) O APROXIMACION ESTANDAR**

El primer paso es determinar la localización de los CR's para todos los pisos del edificio tanto por aproximación del análisis matricial (Cheung and Tso 1986; Hejal and Chopra 1987) como por análisis de pórticos planos; aquí únicamente se describirá la aproximación matricial.

Consideremos un edificio de N pisos con disposición ortogonal de elementos resistentes a carga lateral, conectados por diafragmas de piso rígido como se indica en la Figura 1. Para análisis de fuerza lateral en la dirección Y, la planta del edificio es tratada como simétrica alrededor del eje X sin pérdida de generalidad debido a que la Norma requiere tales análisis independientes en las direcciones X y Y respectivamente. Las ecuaciones de equilibrio son:



**Figura 1. Sistema Estructural de Varios Pisos.  
Origen o Punto de Referencia diferente de CM**

$$\begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yq} \\ K_{qy} & K_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_y \\ F_q \end{bmatrix} \quad (2)$$

En las que los vectores de desplazamientos horizontales están dados por  $\mathbf{u}_y^t = \langle u_{y1}, u_{y2}, \dots, u_{yN} \rangle$  y los desplazamientos torsionales o rotacionales están dados por  $\mathbf{u}_\theta^t = \langle u_{\theta1}, u_{\theta2}, \dots, u_{\thetaN} \rangle$ , donde  $\mathbf{u}_{yj}$  es el desplazamiento lateral en la dirección-y y

$u_{qj}$  el desplazamiento torsional o rotacional en el punto de referencia del piso j-ésimo (no necesariamente el CM, según Gluck(1970)); y los vectores de fuerzas aplicadas en los pisos son  $\mathbf{F}_Y^t = \langle F_{Y1}, F_{Y2}, \dots, F_{Yj}, \dots, F_{YN} \rangle$  y  $\mathbf{F}_\theta^t = \langle F_{\theta1}, F_{\theta2}, \dots, F_{\thetaj}, \dots, F_{\thetaN} \rangle$  donde  $F_{Yj}$  es la fuerza lateral en la dirección-y y  $F_{qj}$  es el momento torsor o torque aplicado en el punto de referencia del j-ésimo piso (no necesariamente el CM, según Gluck(1970)).

Las diferentes submatrices de la matriz de rigidez de la ecuación(2) pueden expresarse en términos de matrices de rigidez lateral de elementos resistentes individuales (pórticos y muros estructurales con cualquier orientación en planta, Gluck 1970) de la siguiente forma:

$$K_{YY} = \sum k_{yi} \quad (3a)$$

$$K_{YQ} = K_{QY} = \sum x_i \cdot k_{yi} \quad (3b)$$

$$K_{QQ} = \sum x_i^2 \cdot k_{yi} + \sum y_i^2 \cdot k_{xi} \quad (3c)$$

Donde  $x_i$  es la distancia desde el punto de referencia hasta el pórtico i-ésimo orientado en la dirección-y con matriz de rigidez lateral  $k_{yi}$ ; y  $y_i$  es la distancia desde el punto de referencia hasta el pórtico i-ésimo orientado en la dirección-x con matriz de rigidez lateral  $k_{xi}$ .

Para determinar las localizaciones de los CR's se re-escriben las ecuaciones de equilibrio con respecto a los grados de libertad (DOF)  $\hat{\mathbf{u}}^t = \langle \hat{\mathbf{u}}_y^t, \hat{\mathbf{u}}_\theta^t \rangle$  en los CR's como:

$$\begin{bmatrix} K_{YY} & (K_{YQ} - K_{YY} X_R) \\ (K_{QY} - X_R K_{YY}) & (K_{QQ} + X_R K_{YY} X_R - X_R K_{YQ} - K_{QY} X_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_Y \\ F_\theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

en el cual  $X_R$  es una matriz diagonal con sus elementos diagonales iguales a  $x_{Rj}$  y  $x_{Rj}$  es la coordenada-x del CR del j-ésimo piso; y  $\mathbf{F}_{\hat{\mathbf{u}}\theta} = \mathbf{F}_q - X_R \mathbf{F}_Y$  es el vector de torques o momentos torsores de piso ubicados en los CR.

De la definición de los Centros de Rigidez (Cheung and Tso 1986; Hejal and Chopra 1987), si únicamente se aplican las fuerzas laterales en los CR's, es decir,  $\mathbf{F}_{\hat{\mathbf{u}}\theta} = 0$ , el sistema estaría en

pura translación, es decir  $\hat{\mathbf{u}}_q = 0$ , así la ecuación (4) se convierte en

$$\mathbf{K}_{YY} \hat{\mathbf{u}}_Y = \mathbf{F}_Y \quad (5a)$$

$$(\mathbf{K}_{qY} - \mathbf{X}_R \mathbf{K}_{YY}) \hat{\mathbf{u}}_Y = 0 \quad (5b)$$

La ecuación (5a) se resuelve para  $\hat{\mathbf{u}}_Y$

$$\hat{\mathbf{u}}_Y = (\mathbf{K}_{YY}^{-1}) \mathbf{F}_Y \quad (6)$$

y la ecuación (6) se reemplaza en la ecuación (5b) para obtener

$$(\mathbf{K}_{qY} - \mathbf{X}_R \mathbf{K}_{YY}) (\mathbf{K}_{YY}^{-1}) \mathbf{F}_Y = 0 \quad (7)$$

Para la clase especial de edificios mencionados anteriormente ("proportional buildings"), la localización de los CR's es independiente de la distribución de fuerza lateral. Haciendo uso de la ecuación (7) se obtiene

$$(\mathbf{K}_{qY} - \mathbf{X}_R \mathbf{K}_{YY}) (\mathbf{K}_{YY}^{-1}) = 0 \quad (8)$$

de la cual la matriz diagonal  $\mathbf{X}_R$  que define las localizaciones de los CR's puede determinarse como

$$\mathbf{X}_R = \mathbf{K}_{qY} (\mathbf{K}_{YY}^{-1}) \quad (9)$$

Para edificios no pertenecientes a la clase especial mencionada en el párrafo anterior o sea "non proportional buildings", la localización de los CR's depende de la distribución de fuerza lateral, en cuyo caso la ecuación (7) puede re-escribirse como

$$\mathbf{K}_{qY} (\mathbf{K}_{YY}^{-1}) \mathbf{F}_Y = \mathbf{X}_R \mathbf{F}_Y \quad (10)$$

que puede resolverse para obtener

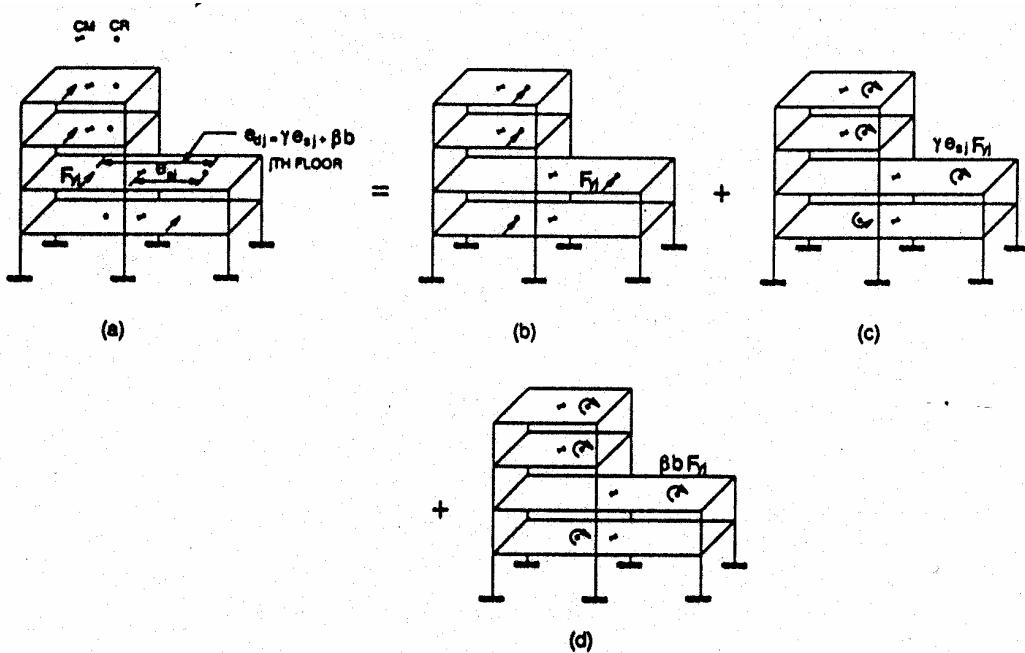
$$\mathbf{X}_R = [\mathbf{F}_Y]^{-1} \mathbf{K}_{qY} (\mathbf{K}_{YY}^{-1}) \mathbf{F}_Y \quad (11)$$

donde  $\mathbf{X}_R$  es el vector de  $x_{Rj}$ ;  $[\mathbf{F}_Y]$  es la matriz diagonal de  $F_{Yj}$  y  $\mathbf{F}_Y$  es el vector de  $F_{Yj}$ . El vector  $\mathbf{F}_Y$  utilizado en la ecuación (11) es en general considerado como el vector de fuerzas laterales o cargas especificadas por los Códigos o Normas de edificaciones.

Esta aproximación matricial para localizar centros de rigidez CR's no es conveniente en la práctica, debido a que la mayoría de los programas estándar de análisis estructural no tienen la capacidad de implementar la manipulación matricial requerida en las ecuaciones (9) y (11) (Goel and Chopra 1993). Por tanto, se hace necesario desarrollar programas de post-proceso para implementar estos cálculos.

#### **Implementación del Procedimiento Estático de la Norma con la Aproximación Estándar.**

Habiendo determinado la localización de los CR's en varios pisos, el procedimiento estático de la Norma puede implementarse aplicando las fuerzas laterales  $F_{Yj}$  a distancias iguales  $e_{dj}$  del centro de rigidez CR en cada j-ésimo piso (ver Figura 2).



**Figura 2. Análisis usando Centros de Rigidez.  
ó Aproximación Estándar.**

Esto implica la necesidad para dos análisis:  $e_{dj}$  se define por la ecuación (1a) para el primer análisis y por (1b) para el segundo análisis. Estas definiciones pueden re-escribirse en forma resumida como

$$e_{dj} = g e_{sj} \pm b b_j \quad (11)$$

en el cual  $\gamma = \alpha$  y  $+bb_j$  para obtener la ecuación (1a),  $\gamma = \delta$  y  $-bb_j$  para obtener la ecuación (1b). Para edificios con diafragmas rígidos, la condición de carga de la Figura 2 es equivalente a la superposición de tres casos de carga:

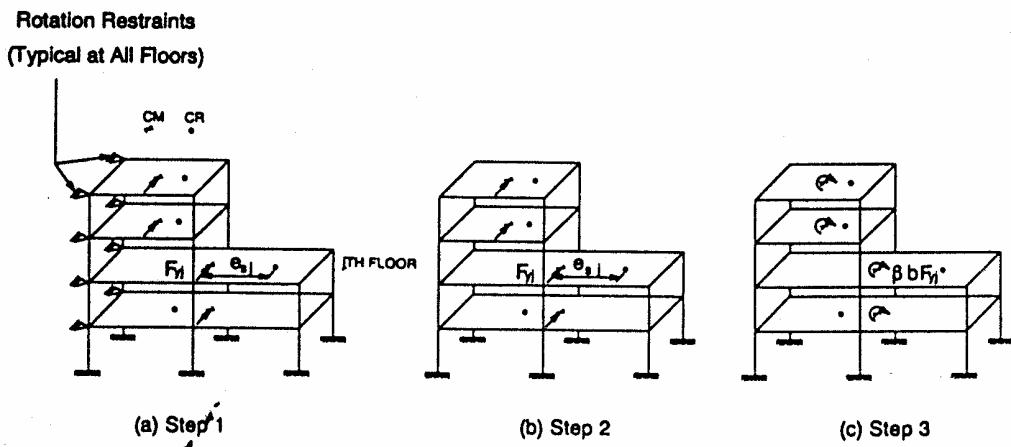
1. Fuerzas laterales  $F_{Yj}$ , ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) ubicadas en los CR's (ver Figura 2b).
2. Torques o momentos torsores de piso  $ge_{sj}F_{Yj}$ , ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) ubicados en los CR's (ver Figura 2c).
3. Torques o momentos torsores de piso  $bb_jF_{Yj}$ , ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) ubicados en los CR's (ver Figura 2d).

Los casos 2 y 3 no necesariamente se consideran por separado, se pueden agrupar en uno solo para denominarse  $e_{dj}F_{Yj}$ .

#### **ANÁLISIS SIN USAR CENTROS DE RIGIDEZ(CR) O NUEVA APROXIMACION**

La nueva aproximación para implementar el procedimiento estático de la Norma para edificios de varios pisos con asimetría en planta combina los resultados de tres conjuntos de análisis. En cada uno de estos análisis, las fuerzas se aplican en los Centros de Masas CM's, sin necesidad de localizar los CR's. Los tres análisis se resumen en los pasos 1-3, su superposición en el paso 4 y la selección del valor de diseño en el paso 5:

1. Con las fuerzas laterales  $F_{Yj}$  especificadas por la Norma y aplicadas en los CM's, se analiza el edificio restringido para deformarse únicamente en la dirección-y. Este análisis puede realizarse con cualquier programa estándar de análisis estructural para pórticos planos o tridimensionales restringiendo las rotaciones de piso. El valor resultante de la respuesta deseada (vector de fuerza o deformación) se denomina  $r^{(1)}$  (ver figura 3a).
2. Con las fuerzas laterales  $F_{Yj}$  especificadas por la Norma y aplicadas en los CM's, se analiza la asimetría en planta del edificio como un sistema tridimensional para obtener el valor de la respuesta deseada (vector de fuerza o deformación) denominado  $r^{(2)}$  (ver figura 3b).



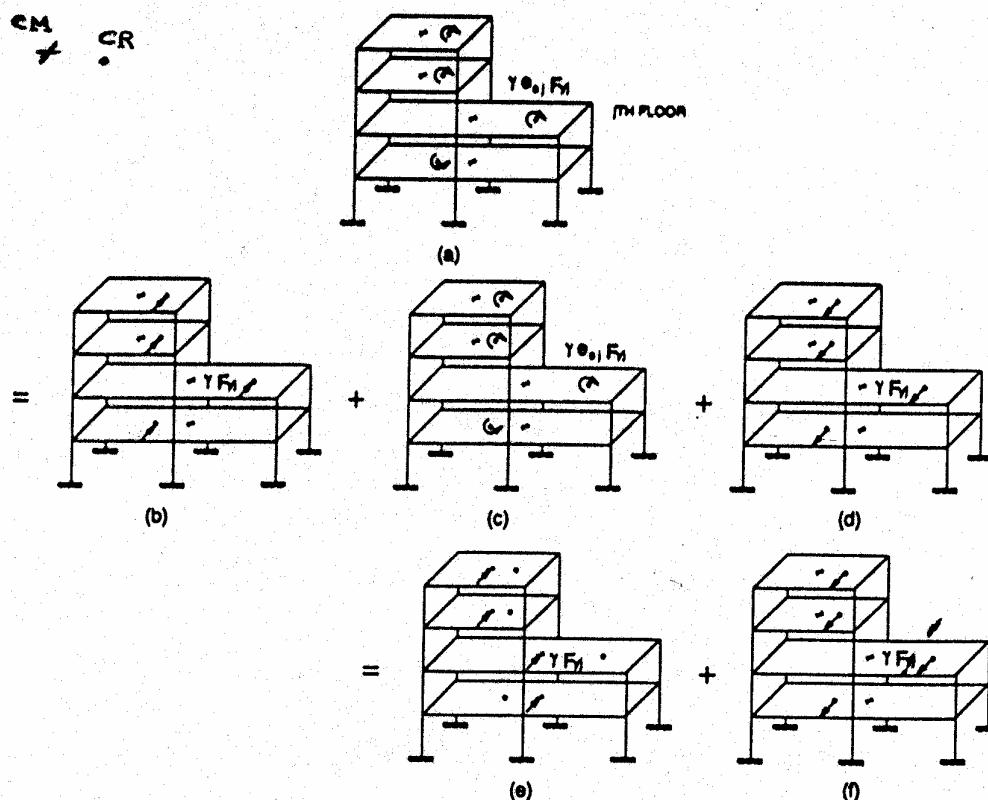
**Figura 3. Tres pasos en la Nueva Aproximación.**

3. Analice el sistema con planta asimétrica para los torques especificados por la Norma iguales a  $bb_jF_{Yj}$  aplicados en los CM's para obtener el valor de la respuesta deseada (vector de fuerza o deformación) denominado  $r^{(3)}$  (ver figura 3c).
  4. Obtenga las respuestas  $r^{(a)}$  y  $r^{(b)}$  asociadas con las excentricidades de (1a) y (1b), respectivamente combinando  $r^{(1)}$ ,  $r^{(2)}$  y  $r^{(3)}$  de la siguiente forma (independiente del signo algebraico para  $r^{(3)}$  según esta investigación):
- $$r^{(a)} = (1 - \alpha) r^{(1)} + \alpha r^{(2)} + r^{(3)} \quad (12)$$
- $$r^{(b)} = (1 - \delta) r^{(1)} + \delta r^{(2)} - r^{(3)} \quad (13)$$
5. El valor de diseño de la respuesta deseada es el mayor de los dos valores de  $r^{(a)}$  y  $r^{(b)}$ . Si la Norma de diseño incluye la restricción de que los valores de diseño no deben reducirse debido a la torsión, el valor de diseño de la respuesta deseada es el mayor de los tres valores entre  $r^{(a)}$ ,  $r^{(b)}$  y  $r^{(1)}$ .

#### COMPARACION COMPUTACIONAL ENTRE LAS DOS APROXIMACIONES

El esfuerzo computacional requerido para implementar los análisis en los paso 2 y 3 de la Nueva Aproximación es el mismo que el utilizado en la Aproximación Estándar para implementar los análisis para los dos valores de la excentricidad de diseño. El esfuerzo computacional requerido en el paso 1 de la Nueva Aproximación es menor que el requerido para determinar la

localización de los CR's en la Aproximación Estándar, debido al análisis adicional requerido en esta aproximación. Sin embargo, esfuerzos totales computacionales requeridos en la anterior aproximación deberían ser ligeramente menores que los requeridos en la última. En la Figura 4 se observa la equivalencia del segundo caso de la Aproximación Estándar (usando CR) como una combinación de los Pasos 1 y 2 de la Nueva Aproximación.



**Figura 4. Segundo Caso de Carga de la Aproximación Estándar(CR) Como Combinación de los Pasos 1 y 2 de la Nueva Aproximación.**

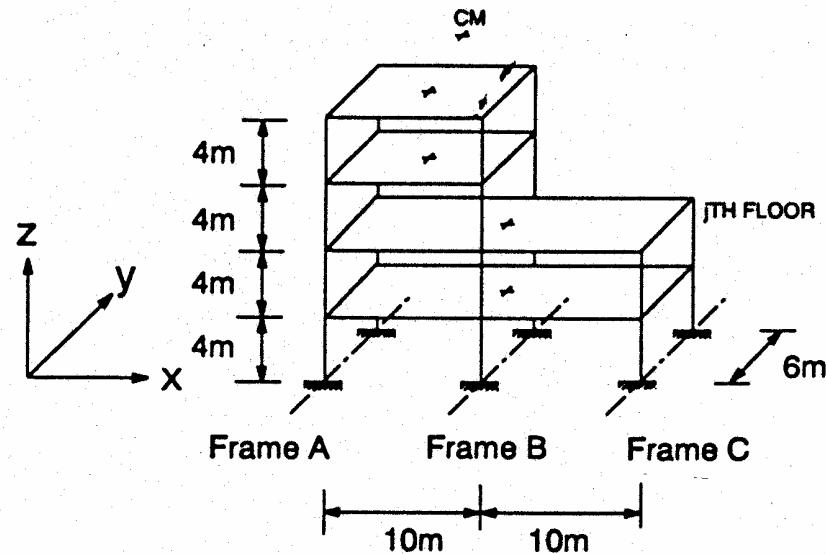
#### EJEMPLO NUMERICO PRACTICO

El ejemplo (Goel and Chopra 1993; Tso 1990) es un edificio con simetría en planta únicamente en la dirección-y (ver Figura 5) de cuatro pisos cuyos datos son los siguientes:

Pórticos en la dirección-y: A, B y C.

Pórticos en la dirección-x: 1 y 2

Torsión en la dirección-z



**Figura 5. Ejemplo de Edificio Asimétrico de Cuatro Pisos**

$I_{beams} = I_x = I_y = 0.30m^4$  para pórticos A, B y C  
 $I_{columns} = I_x = I_y = 0.10m^4$  para el pórtico B.  
 $I_{columns} = I_x = I_y = 0.05m^4$  para los pórticos A y C.  
 $(I_{beams} = I_x = I_y = 0.30m^4$  para pórticos 1 y 2).  
 $J_0 = I_z = 0.0$  para vigas y columnas.  
 $E = 1.0kN/m^2$

Se asume que las columnas son axialmente rígidas.

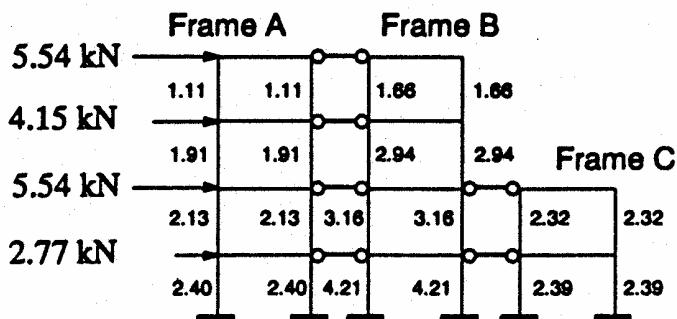
Peso de los pisos: 20kN para cada uno de los dos pisos inferiores y 10kN para cada uno de los dos pisos superiores.

Cortante Basal  $V_b$  es de 18kN.

Fuerzas sísmicas en cada piso para cada dirección (ver Figura 6 para la distribución de fuerzas laterales en la dirección **y**):

Piso	$F_{Yj}$	$F_{Xj}$
j	(kN)	(kN)
4	5.54	5.54
3	4.15	4.15
2	5.54	5.54
1	2.77	2.77

$\alpha = 1.50$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $\delta = 1.0$  (seismic provisions of the 1987 Mexico Federal District Code; Gomez and Garcia-Ranz 1988).



**Figura 6. Modelo de Pórticos Planos para el ejemplo  
(dirección Y únicamente)**

Este edificio posee gran discontinuidad en rigidez y masa entre los pisos segundo y tercero y no debería considerarse como un ejemplo donde el procedimiento estático sea necesariamente aplicable.

En la Tabla 1 se muestran las fuerzas cortantes para las columnas como resultado del análisis en la dirección Y usando la Aproximación Estándar(CR), según Molano (1995, pág 792).

En la Tabla 2 se muestran las fuerzas cortantes para las columnas como resultado del análisis en la dirección Y usando la Nueva Aproximación, según Molano (1995, pág 793).

Como puede observarse, los resultados son idénticos para ambas aproximaciones.

**TABLA 1. Fuerzas Cortantes en Columnas, para Edificio  
Ejemplo Usando la Aproximación Estándar(CR)**

Pórtico (1)	Piso j (2)	$V_j^{(a)}$ (kN) (3)	$V_j^{(b)}$ (kN) (4)	Diseño (kN) (5)
A	4	1.612	1.157	1.612
	3	2.814	1.962	2.814
	2	4.229	2.880	4.229
	1	4.517	2.895	4.517
B	4	1.156	1.611	1.611
	3	2.030	2.883	2.883
	2	3.126	2.944	3.126
	1	4.147	4.142	4.147
C	---	---	---	---
	---	---	---	---
	2	0.258	1.789	1.789
	1	0.334	1.960	1.960

**TABLA 2. Fuerzas Cortantes en Columnas, para Edificio ejemplo  
Usando La Nueva Aproximación**

Pórtico (1)	Piso j (2)	$V_j^{(1)}$ (kN) (3)	$V_j^{(2)}$ (kN) (4)	$V_j^{(3)}$ (kN) (5)	$V_j^{(a)}$ (kN) (6)	$V_j^{(b)}$ (kN) (7)	Diseño (kN) (8)
A	4	1.227	1.345	0.186	1.590	1.159	1.590
	3	2.000	2.305	0.342	2.800	1.963	2.800
	2	2.126	3.290	0.410	4.282	2.880	4.282
	1	2.406	3.455	0.559	4.539	2.896	4.539
B	4	1.542	1.424	-0.186	1.179	1.610	1.610
	3	2.845	2.540	-0.342	2.045	2.882	2.882
	2	2.959	3.018	0.074	3.121	2.944	3.121
	1	4.144	4.144	0.002	4.146	4.142	4.146
C	---	---	---	---	---	---	---
	---	---	---	---	---	---	---
	2	2.528	1.305	-0.483	0.211	1.788	1.788
	1	2.448	1.398	-0.561	0.312	1.959	1.959

**ANEXO 1. PROGRAMA DE COMPUTADOR TORSIONB.EXE ( FUNCIONA UNICAMENTE CON LIBRERÍA CW3215.DLL )**

El autor ha elaborado el programa de computador **torsionb.exe** (bajo **MS-DOS PROTECTED MODE**) que evalúa al mismo tiempo las dos aproximaciones. Se considera como punto de referencia: el origen de coordenadas diferente al Centro de Masas CM's, ya que la matriz de rigidez lateral-torsional total del edificio se genera una sola vez, obteniéndose ventaja competitiva en tiempo ya que los CM's pueden variar con los usos del edificio y sirven como datos de entrada. La nomenclatura es la de Gluck(1970) para pórticos tridimensionales.

**Análisis usando CR's(Aproximación Estándar).**

Se proponen las siguientes ecuaciones para el cálculo de los dos momentos torsores o torques para cada dirección del movimiento sísmico (total cuatro vectores):

$$Mt^{(1)} = F_{ii}( (1.0 - \alpha)CR_i + (\alpha)CM_i - (\beta)bj_i ) \quad (14)$$

$$Mt^{(2)} = F_{ii}( (1.0 - \delta)CR_i + (\delta)CM_i + (\beta)bj_i ) \quad (15)$$

**Análisis usando la Nueva Aproximación.**

Se proponen las siguientes ecuaciones para el cálculo de los dos vectores de desplazamientos para cada dirección del movimiento sísmico(total cuatro vectores):

$$D^{(1)} = (1.0 - \alpha)r^{(1)} + (\alpha)r^{(2)} + r^{(3)} \quad (16)$$

$$D^{(2)} = (1.0 - \delta)r^{(1)} + (\delta)r^{(2)} - r^{(3)} \quad (17)$$

### Comando de Ejecución

C:\any\_dir\torsionb.exe

Asegúrese que los siguientes archivos se localicen en el mismo directorio:

librería	<b>CW3215.DLL</b>
ejecutable	<b>torsionb.exe</b>
ASCII	<b>file.dat</b> ( <b>file_input</b> <b>file_output</b> ) .
ASCII	<b>chotor</b> (entrada de datos ó <b>file_input</b> ). <b>chotor.imp</b> (salida de datos ó <b>file_output</b> ) .
ASCII	

### Datos de entrada

(ASCII           **file\_input** = chotor)

1. Se ingresa el número de pisos (NS) y el orden de la matriz (xu) separados por espacios en blanco (no usar comas)

4       12

2. Se ingresa la matriz de rigidez lateral torsional total referida al origen (0,0) arbitrario (que no coincide con el centro de masas) en el siguiente orden:  $[K_{yy}]_{NS \times NS}$ ,  $[K_{yx}]_{NS \times NS}$ ,  $[K_{yq}]_{NS \times NS}$ ,  $[K_{xx}]_{NS \times NS}$ ,  $[K_{xq}]_{NS \times NS}$ ,  $[K_{qq}]_{NS \times NS}$ , datos separados por espacios en blanco (no usar comas), como es simétrica se ingresa la mitad de los datos desde la diagonal de la matriz hacia arriba

1	1	1.4046986e-01	2	2	1.1287388e-01	1	2	-7.3100433e-02
3	3	9.6009821e-02	2	3	-5.5419520e-02	1	3	7.4316124e-03
4	4	4.1275118e-02	3	4	-4.7344927e-02	2	4	6.6244239e-03
1	4	-6.1193731e-04	5	5	1.3919538e-01	4	5	0.0000000e+00
3	5	0.0000000e+00	2	5	0.0000000e+00	1	5	0.0000000e+00
6	6	1.0725920e-01	5	6	-7.1733683e-02	4	6	0.0000000e+00
3	6	0.0000000e+00	2	6	0.0000000e+00	1	6	0.0000000e+00
7	7	9.0163246e-02	6	7	-5.3694922e-02	5	7	7.3248111e-03
4	7	0.0000000e+00	3	7	0.0000000e+00	2	7	0.0000000e+00
1	7	0.0000000e+00	8	8	3.5406861e-02	7	8	-4.3139126e-02
6	8	8.4163910e-03	5	8	-7.5120403e-04	4	8	0.0000000e+00
3	8	0.0000000e+00	2	8	0.0000000e+00	1	8	0.0000000e+00
9	9	2.3624289e+01	8	9	2.2536123e-03	7	9	-2.1974439e-02
6	9	2.1520102e-01	5	9	-4.1758609e-01	4	9	-5.0865524e-03
3	9	5.6678720e-02	2	9	-7.1209103e-01	1	9	1.4022357e+00
10	10	1.4385991e+01	9	10	-1.1783752e+01	8	10	-2.5249170e-02
7	10	1.6108479e-01	6	10	-3.2177764e-01	5	10	2.1520102e-01
4	10	4.9848214e-02	3	10	-3.6795151e-01	2	10	9.4116002e-01
1	10	-7.1209103e-01	11	11	7.8513017e+00	10	11	-4.6460228e+00
9	11	6.9863385e-01	8	11	1.2941734e-01	7	11	-2.7048969e-01
6	11	1.6108479e-01	5	11	-2.1974441e-02	4	11	-3.0589554e-01
3	11	6.2283623e-01	2	11	-3.6795151e-01	1	11	5.6678720e-02
12	12	3.2435760e+00	11	12	-3.8354597e+00	10	12	6.4997709e-01
9	12	-6.4387195e-02	8	12	-1.0622059e-01	7	12	1.2941734e-01
6	12	-2.5249170e-02	5	12	2.2536123e-03	4	12	2.6062521e-01
3	12	-3.0589554e-01	2	12	4.9848214e-02	1	12	-5.0865519e-03

3. Se ingresa el vector de cargas laterales (momentos torsores o torques iguales a cero) en el siguiente orden  $[\mathbf{Fy}]_{NSx1}$ ,  $[\mathbf{Fx}]_{NSx1}$ ,  $[\mathbf{Mq}]_{NSx1}$ , datos separados por espacios en blanco (no usar comas)

2.77 5.54 4.15 5.54 2.77 5.54 4.15 5.54 0.00 0.00 0.00 0.00

4. Se ingresa el vector de Centros de Masas CM's en el siguiente orden  $[\mathbf{CMx}]_{NSx1}$  para coordenadas en dirección-x,  $[\mathbf{CMy}]_{NSx1}$  para coordenadas en dirección-y, datos separados por espacios en blanco (no usar comas)

10.0 10.0 5.0 5.0 3.0 3.0 3.0 3.0

5. Se ingresa el vector de dimensiones en planta perpendiculares al movimiento sísmico en el siguiente orden  $[\mathbf{bjy}]_{NSx1}$  para sismo en dirección-y,  $[\mathbf{bjx}]_{NSx1}$  para sismo en dirección-x, datos separados por espacios en blanco (no usar comas)

20.0 20.0 10.0 10.0 6.0 6.0 6.0 6.0

6. Se ingresan los parámetros sísmicos en el siguiente orden a, b y d, datos separados por espacios en blanco (no usar comas)

1.5 0.1 1.0

### Datos de salida (ASCII **file\_output** = chotor.imp)

PROGRAMA DE DOMINIO PUBLICO:  
Hecho por (Ing Civil molano toro jc)  
U. DE MEDELLIN

TORSIONB.EXE Jan-15-1994

[jmolano@eppm.com](mailto:jmolano@eppm.com)

Medellin - Antioquia - COLOMBIA - SUR AMERICA

Notation:

NS = number of stories

xu = order of triangular matrix = 3(NS)

Kyy Kyx Kyq

Kxx Kxq

Kqq  
[Y\_PCM] [X\_PCM] [bjy] [bjx] vectors of order NS

REM q = z Floor Torque

DATA INPUT:

NS xu [K]upp\_triang P[xu] [Y\_PCM] [X\_PCM] [bjy] [bjx] alpha beta delta

\*\*\*\*\* ORIGIN OF REFERENCE COORDINATES XYZ \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* FLOOR TORQUE Mz POSITIVE COUNTERCLOCKWISE \*\*\*\*\*

J. Struct Engrg ASCE Vol 119 No. 10 OCT 93 pp 3039

Discuss J. Struct Engrg ASCE Vol 121 No. 04 APR 95 pp 792

File\_input = chotor  
File\_output = chotor.imp

xu = 12 NS = 4  
 $\alpha$  = 1.500  $\beta$  = 0.100  $\delta$  = 1.000

**ANALISIS USANDO CENTROS DE RIGIDEZ (CR's)**

$$Mt^{(1)} = F_{ii}((1.0 - a)CR_i + (a)CM_i - (b)bj_i) \quad (24')$$

$$Mt^{(2)} = F_{ii}((1.0 - d)CR_i + (d)CM_i + (b)bj_i) \quad (23')$$

**TABLA 3.1. DATOS BASICOS PARA DIRECCION Y**

Yr[ 1 ]	=	8.5493e+00	Yc[ 1 ]	=	1.0000e+01	bj_y[ 1 ]	=	2.0000e+01
Yr[ 2 ]	=	1.7574e+01	Yc[ 2 ]	=	1.0000e+01	bj_y[ 2 ]	=	2.0000e+01
Yr[ 3 ]	=	6.1373e+00	Yc[ 3 ]	=	5.0000e+00	bj_y[ 3 ]	=	1.0000e+01
Yr[ 4 ]	=	5.9996e+00	Yc[ 4 ]	=	5.0000e+00	bj_y[ 4 ]	=	1.0000e+01

FYY [ 1 ]	=	2.7700e+00	Mt <sup>(1)</sup> [ 1 ]	=	2.4169e+01	Mt <sup>(2)</sup> [ 1 ]	=	3.3240e+01
FYY [ 2 ]	=	5.5400e+00	Mt <sup>(1)</sup> [ 2 ]	=	2.3340e+01	Mt <sup>(2)</sup> [ 2 ]	=	6.6480e+01
FYY [ 3 ]	=	4.1500e+00	Mt <sup>(1)</sup> [ 3 ]	=	1.4240e+01	Mt <sup>(2)</sup> [ 3 ]	=	2.4900e+01
FYY [ 4 ]	=	5.5400e+00	Mt <sup>(1)</sup> [ 4 ]	=	1.9391e+01	Mt <sup>(2)</sup> [ 4 ]	=	3.3240e+01

**TABLA 3.2. DATOS BASICOS PARA DIRECCION X**

Xr[ 1 ]	=	3.0000e+00	Xc[ 1 ]	=	3.0000e+00	bj_x[ 1 ]	=	6.0000e+00
Xr[ 2 ]	=	3.0000e+00	Xc[ 2 ]	=	3.0000e+00	bj_x[ 2 ]	=	6.0000e+00
Xr[ 3 ]	=	3.0000e+00	Xc[ 3 ]	=	3.0000e+00	bj_x[ 3 ]	=	6.0000e+00
Xr[ 4 ]	=	3.0000e+00	Xc[ 4 ]	=	3.0000e+00	bj_x[ 4 ]	=	6.0000e+00

Fxx [ 1 ]	=	2.7700e+00	Mt <sup>(1)</sup> [ 1 ]	=	-6.6480e+00	Mt <sup>(2)</sup> [ 1 ]	=	-9.9720e+00
Fxx [ 2 ]	=	5.5400e+00	Mt <sup>(1)</sup> [ 2 ]	=	-1.3296e+01	Mt <sup>(2)</sup> [ 2 ]	=	-1.9944e+01
Fxx [ 3 ]	=	4.1500e+00	Mt <sup>(1)</sup> [ 3 ]	=	-9.9600e+00	Mt <sup>(2)</sup> [ 3 ]	=	-1.4940e+01
Fxx [ 4 ]	=	5.5400e+00	Mt <sup>(1)</sup> [ 4 ]	=	-1.3296e+01	Mt <sup>(2)</sup> [ 4 ]	=	-1.9944e+01

**TABLA 3.3. VECTORES DE FUERZAS EN ORIGEN(0,0)**

DOF	Py1	Py2	Px1	Px2	Py	Px
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	2.7700e+00	2.7700e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	2.7700e+00	0.0000e+00
2	5.5400e+00	5.5400e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	5.5400e+00	0.0000e+00
3	4.1500e+00	4.1500e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	4.1500e+00	0.0000e+00
4	5.5400e+00	5.5400e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	5.5400e+00	0.0000e+00
5	0.0000e+00	0.0000e+00	2.7700e+00	2.7700e+00	0.0000e+00	2.7700e+00
6	0.0000e+00	0.0000e+00	5.5400e+00	5.5400e+00	0.0000e+00	5.5400e+00
7	0.0000e+00	0.0000e+00	4.1500e+00	4.1500e+00	0.0000e+00	4.1500e+00
8	0.0000e+00	0.0000e+00	5.5400e+00	5.5400e+00	0.0000e+00	5.5400e+00
9	2.4169e+01	3.3240e+01	-6.6480e+00	-9.9720e+00	2.3682e+01	-8.3100e+00
10	2.3340e+01	6.6480e+01	-1.3296e+01	-1.9944e+01	9.7360e+01	-1.6620e+01
11	1.4240e+01	2.4900e+01	-9.9600e+00	-1.4940e+01	2.5470e+01	-1.2450e+01
12	1.9391e+01	3.3240e+01	-1.3296e+01	-1.9944e+01	3.3238e+01	-1.6620e+01

columnas (6), (7) de esta tabla: Fuerzas sobre CR de cada piso trasladadas al origen(0,0)

**TABLA 3.4. VECTORES DE DESPLAZAMIENTOS EN ORIGEN(0,0)**

DOF	Dy1	Dy2	Dx1	Dx2	Dy	Dx
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	5.9442e+02	3.7915e+02	-3.0223e+01	3.0223e+01	3.1425e+02	0.0000e+00
2	1.2507e+03	8.1426e+02	-6.0813e+01	6.0813e+01	6.5315e+02	0.0000e+00
3	1.7100e+03	1.1241e+03	-9.4066e+01	9.4066e+01	9.5016e+02	0.0000e+00
4	1.9697e+03	1.2986e+03	-1.1435e+02	1.1435e+02	1.1239e+03	0.0000e+00
5	-8.4040e+01	-1.9472e+01	3.3441e+02	3.1628e+02	0.0000e+00	3.2535e+02
6	-1.8011e+02	-4.8384e+01	7.0270e+02	6.6585e+02	0.0000e+00	6.8428e+02
7	-2.5279e+02	-5.2846e+01	1.0588e+03	9.9099e+02	0.0000e+00	1.0249e+03
8	-2.9519e+02	-5.3194e+01	1.2934e+03	1.2055e+03	0.0000e+00	1.2494e+03
9	-2.8013e+01	-6.4905e+00	3.0212e+00	-3.0212e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
10	-6.0037e+01	-1.6128e+01	6.1421e+00	-6.1421e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
11	-8.4263e+01	-1.7615e+01	1.1307e+01	-1.1307e+01	0.0000e+00	0.0000e+00
12	-9.8396e+01	-1.7731e+01	1.4651e+01	-1.4651e+01	0.0000e+00	0.0000e+00

columnas (6), (7) de esta tabla: Fuerzas sobre CR de cada piso trasladadas al origen(0,0)

**ANALISIS SIN USAR CENTROS DE RIGIDEZ**

**TABLA 4.1. VECTORES DE FUERZAS EN ORIGEN(0,0)**

DOF	Py1	Py2	Py3	Px1	Px2	Px3
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	2.7700e+00	2.7700e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
2	5.5400e+00	5.5400e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
3	4.1500e+00	4.1500e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
4	5.5400e+00	5.5400e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
5	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	2.7700e+00	2.7700e+00	0.0000e+00
6	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	5.5400e+00	5.5400e+00	0.0000e+00
7	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	4.1500e+00	4.1500e+00	0.0000e+00
8	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	5.5400e+00	5.5400e+00	0.0000e+00
9	restrained	2.7700e+01	-5.5400e+00	restrained	-8.3100e+00	8.3100e-01
10	restrained	5.5400e+01	-1.1080e+01	restrained	-1.6620e+01	1.6620e-01
11	restrained	2.0750e+01	-4.1500e+00	restrained	-1.2450e+01	1.2450e-01
12	restrained	2.7700e+01	-5.5400e+01	restrained	-1.6620e+01	1.6620e-01

**TABLA 4.2. VECTORES DE DESPLAZAMIENTOS EN ORIGEN(0,0)**

DOF	r1y	r2y	r3y	r1x	r2x	r3x
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	3.1425e+02	4.5227e+02	7.3127e+01	0.0000e+00	7.6586e-06	-3.0223e+01
2	6.5315e+02	9.5661e+02	1.4235e+02	0.0000e+00	3.4996e-05	-6.0813e+01
3	9.5016e+02	1.3237e+03	1.9959e+02	0.0000e+00	1.5161e-04	-9.4066e+01
4	1.1239e+03	1.5321e+03	2.3348e+02	0.0000e+00	5.3547e-05	-1.1435e+02
5	0.0000e+00	-4.1405e+01	-2.1933e+01	3.2535e+02	3.2535e+02	9.0636e+00
6	0.0000e+00	-9.1398e+01	-4.3014e+01	6.8428e+02	6.8428e+02	1.8426e+01
7	0.0000e+00	-1.2225e+02	-6.9408e+01	1.0249e+03	1.0249e+03	3.3920e+01
8	0.0000e+00	-1.3935e+02	-8.6159e+01	1.2494e+03	1.2494e+03	4.3954e+01
9	0.0000e+00	-1.3802e+01	-7.3110e+00	0.0000e+00	-7.5980e-07	3.0212e+00
10	0.0000e+00	-3.0466e+01	-1.4338e+01	0.0000e+00	-3.7109e-06	6.1421e+00
11	0.0000e+00	-4.0751e+01	-2.3136e+01	0.0000e+00	-2.1546e-05	1.1307e+01
12	0.0000e+00	-4.6451e+01	-2.8720e+01	0.0000e+00	-6.4041e-06	1.4651e+01

**TABLA 4.3. VECTORES DE DESPLAZAMIENTOS EN ORIGEN(0,0)**

$$D1 = (1.0 - a)r1 + (a)r2 + r3 \quad (23)$$

$$D2 = (1.0 - d)r1 + (d)r2 - r3 \quad (24)$$

DOF	Dy1	Dy2	Dx1	Dx2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	5.9442e+02	3.7915e+02	-3.0223e+01	3.0223e+01
2	1.2507e+03	8.1426e+02	-6.0813e+01	6.0813e+01
3	1.7100e+03	1.1241e+03	-9.4066e+01	9.4066e+01
4	1.9697e+03	1.2986e+03	-1.1435e+02	1.1435e+02
5	-8.4040e+01	-1.9472e+01	3.3441e+02	3.1628e+02
6	-1.8011e+02	-4.8384e+01	7.0270e+02	6.6585e+02
7	-2.5279e+02	-5.2846e+01	1.0588e+03	9.9099e+02
8	-2.9519e+02	-5.3194e+01	1.2934e+03	1.2055e+03
9	-2.8013e+01	-6.4905e+00	3.0212e+00	-3.0212e+00
10	-6.0037e+01	-1.6128e+01	6.1421e+00	-6.1421e+00
11	-8.4263e+01	-1.7615e+01	1.1307e+01	-1.1307e+01
12	-9.8396e+01	-1.7731e+01	1.4651e+01	-1.4651e+01

Tiempo de proceso I (aproximación estándar): 0.000000 seconds

Tiempo de proceso II (nueva aproximación) : 0.000000 seconds

Como puede observarse los vectores de desplazamientos en el origen (0,0) son idénticos para ambas aproximaciones según columnas (1) a (5) de la Tabla 3.4 y Tabla 4.3 respectivamente; la diferencia en tiempo de proceso sólo se puede apreciar en computadores u ordenadores de baja velocidad.

## **CONCLUSIONES**

Se ha presentado el análisis comparativo entre dos aproximaciones ,la Estándar(usingo CR) y la Nueva, para el análisis de edificios de varios pisos con asimetría en planta. El proceso de localizar Centros de Rígidez CR's es difícil de realizar y confuso. La nueva aproximación combina los resultados de tres análisis que pueden implementarse en la mayoría de los programas comerciales de ordenador disponibles para el análisis estructural. El autor ha elaborado la aplicación bajo MS-DOS (**torsionb.exe**) que se incluye en este trabajo de investigación, tomando como base la matriz de rigidez lateral-torsional total del edificio (Gluck 1970), con las dos aproximaciones obteniéndose los mismos resultados.

## **BIBLIOGRAFIA.**

**Cheung, V. W.- T, and Tso, W. K.(1986)** "Eccentricity in irregular multistory buildings", *Can. J. Civ. Engrg.*, 13(1), 46-52

**Goel, R. K(1997)** "Seismic Response of Asymmetric systems: Energy-Based Approach" , *J. Struct Engrg.*, ASCE,123(11), 1444-1453.

**Goel, R. K and Chopra.(1993), A. K.** "Seismic Code Analysis of Buildings Without Locating Centers of Rigidity", *J. Struct Engrg.*, ASCE,119(10), 3039-3055

**Gomez, R., and Garcia-Ranz, F.(1988).** "The Mexico earthquake of September19, 1985-complementary technical norms for earthquake resistant design", *Earthquake Spectra*,4(3), 441-460

**Gluck, J.(1970)** "Lateral-Load Analysis of assymetric Multistorey Structures" , *J. Struct Div.*, ASCE,96, ST2(10), 317-333

**Gluck, J., Reinhorn A. And Rutenberg A.(1979)** "Dynamic torsional coupling in tall buildings structures", *Proc. Instn. Civ. Engrs*", Part 2, 67,411-424

**Hejal, R., and Chopra, A. K.(1987).** "Earthquake response of torsionally-coupled buildings", *Report no. UBC/EERC-87/20, Earthquake Engrg. Res. Ctr. ,Univ. Of California, Berkeley, Calif*

**Humar, J. L.(1984),.** "Design for seismic torsional forces", *Can. J. Civ. Engrg.*, 12(2), 150-163.

**Molano T. J. C.(1995)** Discussion on "Seismic Code Analysis of Buildings Without Locating Centers of Rigidity", *J. Struct Engrg.*, ASCE,121(04), 792-793

**National Building Code of Canada.(1990)**. Assoc. Committee on the Nat. Build. Code, Nat. Res. Council of Canada, Ottawa, Ontario.

**New Zealand Standard NZS 4203:** *code of practice for general structural design loadings for buildings.*(1984). Satandard Assoc. Of New Zealand, Willington, New Zealand.

**Poole, R. A.(1977).**"Analysis for torsion employing provisons of NZRS 4203: 1974", *Bull. Of the New Zealand Soc. for Earthquake Engrg.*, 10(4), 219-225."

**Riddell, R. and Vazquez, J.(1984)**. "Existence of centers of resistance and torsional uncoupling of earthquake response of buildings", *Proc. 8<sup>th</sup> World Conf. On Earthquake Engrg.*, 4,187-194.

**Stafford S. B and Vézina S.(1985)**. "Evaluation of Centers of Resistance in Multistorey Buildings Structures", *Proc. Instn. Civ. Engrs*", Part 2, 79,622-635.

**Tso, W. K.(1990)**. "Static eccentricity concept for torsional moment estimations" , *J. Struct Engrg.*, ASCE,116(5), 1199-1212

**Tso, W. K. And Cheung, V. W.-T(1986)**. "Decoupling of equations of equilibrium in lateral load analysis of multistorey buildings.", *Comp. And Struct.*,23(5), 679-684

**Uniform building Code.(1991)**. Int. Conf. Of Build. Officials, Whittier, Calif.