

DISEÑO DE SECCIONES T Y RECTANGULARES DE HORMIGON REFORZADO (RC),
PRESFORZADO (PC) Y PARCIALMENTE PRESFORZADO (PPC)

Por

Juan Carlos Molano Toro
juan.molanotoro1@gmail.com

Ingeniero Civil, Universidad de Medellín
Unidad de Edificios EPM Medellín E.S.P.

RESUMEN

Se presenta una metodología para el análisis y diseño de secciones T y Rectangulares (columnas o vigas) de hormigón reforzado(RC), presforzado (PC) y parcialmente presforzado(PPC) por el método de resistencia última y teniendo en cuenta el método de compatibilidad de deformaciones (no se incluyen centroides para el 100% del acero de presfuerzo, sino que cada tendón o cable se trata como barra individual). Se incluyen a) hormigones de baja y alta resistencia (HSC), b) el uso de tendones o cables adheridos (bonded tendons) o cables no adheridos (unbonded tendons), c) el uso del factor de ductilidad por curvatura (ϕ_u/ϕ_y) y d) diecisiete ejemplos prácticos de otros autores.

INTRODUCCION

En este trabajo de investigación se presenta el análisis y diseño de secciones T y Rectangulares (vigas o columnas) teniendo en cuenta el método de resistencia última y el método de compatibilidad de deformaciones^{2,3} para cada barra de refuerzo individual colocada a una distancia de la fibra extrema en compresión de la sección (ver Figura 1):

d_{si} para hormigón con refuerzo convencional (RC) de área A_{si} .

d_{psi} para hormigón presforzado (PC) ó hormigón parcialmente presforzado (PPC) con tendones o cables adheridos o no adheridos de área A_{psi} respectivamente.

No se tendrá en cuenta el centroide de gravedad para el 100% del acero de presfuerzo, propuesto por otros autores ^{5,15,21}.

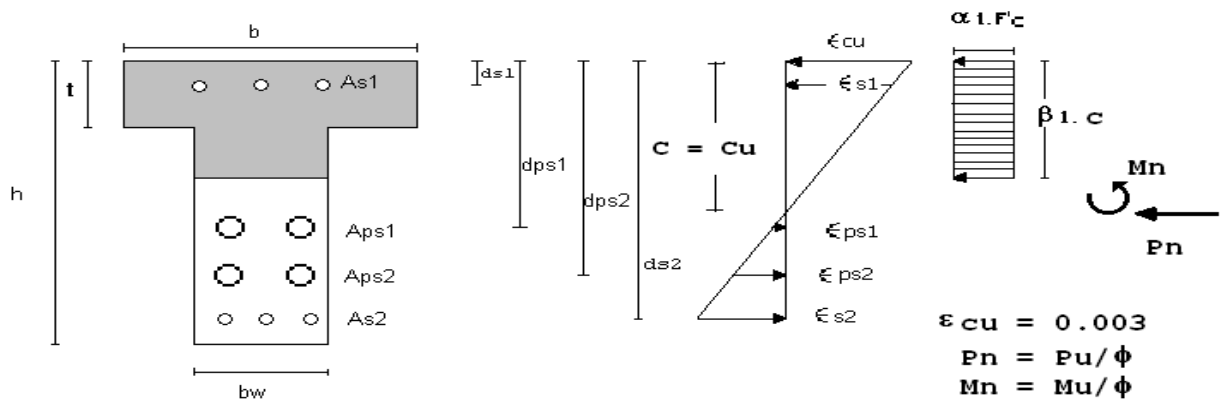


Figura 1: Esfuerzos y Deformaciones en Resistencia Nominal

Se incluyen hormigones de alta resistencia¹ (HSC) y de baja resistencia.

PROCEDIMIENTO COMPUTACIONAL

Se presentan las siguientes ecuaciones^{20,23} (ver Figura 1):

$$\alpha_1(f'c) \cdot b_w \cdot \beta_1 \cdot c + \sum A_{si} \cdot f_{si} + \sum A_{psi} \cdot f_{psi} + P_{nf} = P_n \quad (1)$$

$$\alpha_1(f'c) \cdot b_w \cdot \beta_1 \cdot c (h - \beta_1 c) / 2 + \sum A_{si} \cdot f_{si} (h/2 - d_{si}) + \sum A_{psi} \cdot f_{psi} (h/2 - d_{psi}) + M_{nf} = M_n \quad (2)$$

Para vigas, $P_n = 0.0$.

Siendo,

d_{si} = profundidad desde la fibra extrema en compresión hasta la barra i de refuerzo no presforzado.

d_{psi} = profundidad desde la fibra extrema en compresión hasta la barra i de refuerzo presforzado.

$$\alpha_1 = 0.85, \text{ si } f'c \leq 8.00 \text{ Ksi} \quad (3)$$

$$\alpha_1 = 0.85 - f'c / 116.0 \leq 0.725, \text{ si } f'c > 8.00 \text{ Ksi}^1 \quad (4)$$

$$\beta_1 = 0.85, \text{ si } f'c \leq 4.00 \text{ Ksi} \quad (5)$$

$$\beta_1 = 0.85 - 0.05 * (f'c - 4.0), \text{ si } f'c > 4.00 \text{ Ksi y } f'c \leq 8.00 \text{ Ksi} \quad (6)$$

$$\beta_1 = 0.95 - f'c / 58.0 \quad \leq 0.70, \text{ si } f'c > 8.00 \text{ Ksi}^1 \quad (7)$$

$$P_{nf} = \alpha_1 \cdot f'c (b - b_w) \beta_1 c, \text{ si } \beta_1 c \leq t \quad (8)$$

$$P_{nf} = \alpha_1 \cdot f'c (b - b_w) t, \text{ si } \beta_1 c > t \quad (9)$$

$$M_{nf} = \alpha_1 \cdot f'c (b - b_w) \beta_1 c (h - \beta_1 c) / 2, \text{ si } \beta_1 c \leq t \quad (10)$$

$$M_{nf} = \alpha_1 \cdot f'c (b - b_w) t (h - t) / 2, \text{ si } \beta_1 c > t \quad (11)$$

$$P_n = P_u / \phi \quad (12)$$

$$M_n = M_u / \phi \quad (13)$$

$$0.65 \leq [\phi = 7/30 + 0.25 / (c / d_t)] \leq 0.90, \quad (14)$$

$$d_t = \text{profundidad desde la fibra extrema en compresión hasta la barra de refuerzo más alejada y traccionada} \quad (15)$$

Para acero de refuerzo no presforzado:

$$\epsilon_{si} = \epsilon_{cu} (1 - d_{si} / c) \quad (16)$$

$$\epsilon_{si} < 0 \text{ para deformación en tracción} \quad (17)$$

$$\epsilon_{si} > 0 \text{ para deformación en compresión} \quad (18)$$

$$f_{si} = E_s * \epsilon_{si} \quad (19)$$

$$|f_{si}| \leq F_y \quad (20)$$

$$\text{si } \epsilon_{si} > 0 \text{ entonces } (f_{si} = f_{si} - 0.85 * f'c) \geq 0.0 \quad (21)$$

Para acero presforzado:

$$\epsilon_{psi} = -\epsilon_{se} + \Omega_u (\epsilon_{si} - \epsilon_{ce}) L_1 / L_2 \quad (22)$$

según Naaman and Alkhairi² y Appendix B de Naaman³.

$$\epsilon_{psi} < 0 \text{ para deformación en tracción} \quad (23)$$

$$\epsilon_{psi} > 0 \text{ para deformación en compresión} \quad (24)$$

$$\epsilon_{se} = f_{se}/E_{ps} \quad (25)$$

$$\epsilon_{si} = \epsilon_{cu}(1 - d_{psi} / c) \quad (26)$$

$$\epsilon_{pi} = |\epsilon_{psi}| \quad (27)$$

$$f_{psi}^4 = E_s * \epsilon_{pi} \{ Q + (1-Q)/[1+(E_{ps} * \epsilon_{pi} / (K * F_{py}))^N]^{(1/N)} \} \quad (28)$$

$$f_{psi} \leq 0.8f_{pu}^{24} \quad \text{sólo para acero presforzado no adherido} \quad (29)$$

$$\text{si } \epsilon_{psi} < 0 \text{ entonces } f_{psi} = -f_{psi} \quad (30)$$

$$\text{si } \epsilon_{psi} > 0 \text{ entonces } (f_{psi} = f_{psi} - 0.85f'c) \geq 0.0 \quad (31)$$

$$0.50*f_{pu} \leq f_{se} \leq 0.60*f_{pu}^5 \quad (32)$$

ϵ_{ce}^2 = es la deformación del hormigón al nivel de acero presfuerzo debido al presfuerzo efectivo.

L_1 = longitud de luz cargada o suma de longitudes de luces cargadas, afectadas por el mismo tendón o cable.

L_2 = longitud de tendón o cable entre anclajes extremos.

$Q, K, N, f_{py}, E_{ps}, f_{pu}$, son constantes para cualquier curva esfuerzo deformación dada⁴.

Para cables presforzados no adheridos en condiciones últimas en la Eq.(22)²:

$$\Omega_u = 2.6 / (L/d_p) \text{ para carga vertical en un sólo punto} \quad (33)$$

$$\Omega_u = 5.4 / (L/d_p) \text{ para carga vertical en puntos tercios o carga uniforme} \quad (34)$$

L = longitud de cable o tendón entre anclajes extremos.

d_p = profundidad desde la fibra extrema en compresión hasta el centroide del acero de presfuerzo.

Para cables presforzados adheridos en condiciones últimas en la Eq.(22):

$$\Omega_u = 1.0 \quad (35)$$

FACTOR DE DUCTILIDAD POR CURVATURA

El factor de ductilidad por curvatura $\mu_\phi = \phi_u / \phi_y^5$ depende de ϕ_y (curvatura en la primera cedencia del refuerzo en tracción) dado por cualquiera de las siguientes expresiones⁶:

$$\text{asumiendo que } d_t = (d_{si})_{\max} > (d_{psi})_{\max}, \\ \phi_y = (-\varepsilon_y) / (c_y - d_t) \quad , \text{ para (RC) o (PPC) secciones} \quad (36)$$

$$\phi_y = (-\varepsilon_{py}) / [c_y - (d_{psi})_{\max}] \quad , \text{ sólo para (PC) secciones} \quad (37)$$

DATOS PARA EJEMPLOS DE APLICACION

Se escogieron diecisiete (17) ejemplos para resolver mediante el método de análisis de compatibilidad de deformaciones.

Los ejemplos 13 y 14 corresponden al caso de columnas rectangulares.

En la columna(2) de la Tabla 2 se muestra la distancia d_{si} o d_{psi} de la barra i del acero de refuerzo con área de acero A_{si} o A_{psi} de la columna(3) de la misma Tabla.

En la columna (1) de la Tabla 2 se muestra el tipo de configuración del refuerzo (CR) que se necesita en la columna (9) de la Tabla 1.

En la Tabla 3 y Tabla 4 se muestran los datos de la curva esfuerzo deformación para cada tipo de acero de refuerzo que se necesita en la columna (3) de la Tabla 2.

ANALISIS DE RESULTADOS

En la columna (10) de la Tabla 1 se muestra el valor calculado de c_u/d_t , valor requerido en las provisiones del Código ACI 2002.

En la columna (11) de la Tabla 1 se muestra el valor calculado del factor ϕ de reducción de resistencia para obtener, si se requiere, los valores de P_u y M_u .

En la columna (12) de la Tabla 1 se muestra el valor calculado del factor de ductilidad por curvatura $\mu_\phi = \phi_u / \phi_y^5$; valores mayores o iguales a 5 garantizan excelente desempeño para diferentes combinaciones de cargas sísmica y vertical.

Tabla 1. Datos de Ejemplos y Resultados

Ejemplo (1)	f'c (Ksi) (2)	bw (in) (3)	h (in) (4)	b (in) (5)	t (in) (6)	Pn (K) (7)	Mn (K-in) (8)	Configuracion del Refuerzo (CR) (9)	c _u /d _t (10)	φ (11)	φ _u /φ _y (12)
1	5.00	12.00	30.00	12.00	0.00	0.00	3,486.32	CR1	0.4670100	0.769	< 1.00
2	5.00	12.00	30.00	12.00	0.00	0.00	4,222.31	CR2	0.2744000	0.900	4.09
3	5.00	12.00	30.00	12.00	0.00	0.00	3,340.00	CR3	0.4413300	0.800	2.29
4	5.00	12.00	30.00	12.00	0.00	0.00	4,167.88	CR4	0.2690160	0.900	4.69
5 ¹⁵	7.00	8.00	24.00	24.00	3.00	0.00	4,837.62	CR5	0.1172360	0.900	4.58
6 ¹⁵	7.00	8.00	24.00	24.00	3.00	0.00	6,642.73	CR6	0.1562400	0.900	7.30
7 ¹⁵	7.00	8.00	24.00	24.00	3.00	0.00	5,962.43	CR7	0.1391552	0.900	8.25
8 ¹⁵	7.00	8.00	24.00	24.00	3.00	0.00	9,075.09	CR8	0.2697685	0.900	3.93
9 ²	5.00	12.00	10.00	12.00	0.00	0.00	296.53	CR9	0.1220548	0.900	10.91
10 ²	5.00	12.00	10.00	12.00	0.00	0.00	275.89	CR10	0.1124610	0.900	11.87
11 ²	5.00	12.00	10.00	12.00	0.00	0.00	268.90	CR11	0.1092320	0.900	12.23
12 ²	5.00	8.00	30.00	30.00	3.00	0.00	11,697.29	CR12	0.4200000	0.828	2.25
13 ¹⁹	6.00	12.00	21.00	12.00	0.00	275.0	1,203.64	CR13	0.7898086	0.650	< 1,00
14 ¹⁶	5.80	23.62	31.50	23.62	0.00	0.00	14,137.21	CR14	0.2621781	0.900	4.07
15 ⁵	5.00	12.00	27.00	12.00	0.00	0.00	5,826.99	CR15	0.2791673	0.900	1.70
16 ⁵	5.00	12.00	27.00	12.00	0.00	0.00	5,757.24	CR16	0.2753374	0.900	4.00
17 ⁵	5.00	12.00	27.00	12.00	0.00	0.00	5,620.00	CR17	0.2678700	0.900	4.05

Notas:

- Para configuración del Refuerzo (CR) en columna (9) de esta tabla ver Tabla 2
- $0.65 \leq [\phi = 7/30 + 0.25 / (c_u / d_t)] \leq 0.90$, en columna (11) de esta Tabla
- $P_n = P_u / \phi$, $M_n = M_u / \phi$
- ϕ_u = curvatura máxima en la sección cuando $\epsilon_c = \epsilon_{cu} = 0.003$, $Z = 100$, en columna (12)
- ϕ_y = curvatura en la sección en la primera cedencia del refuerzo, $Z = 100$, en columna (12)
- Z = parametro que define la pendiente de la rama descendente lineal de la curva esfuerzo deformación del hormigón no confinado^{12,13}

En la columna (5) de la Tabla 2 se muestra el valor calculado de f_{si} o f_{psi} para cada barra de refuerzo, teniendo en cuenta la curva esfuerzo deformación del material.

En la columna (6) de la Tabla 2 se muestra el valor calculado de ϵ_{si} o ϵ_{psi} para cada barra de refuerzo.

Los resultados anteriores son muy similares a los presentados por otros autores y con otros métodos que el lector puede comprobar o verificar.

Tabla 2. Configuración del Refuerzo (CR) y
Datos Adicionales

Tipo (1)	d_{si} o d_{psi} (in) (2)	Tipo de Curva (3)	A_{si} o A_{psi} (in ²) (4)	f_{si} o f_{psi} (Ksi) (5)	ϵ_{si} o ϵ_{psi} (x 10 ⁻³) (6)
CR1	dps1 = 15.00	BT1	1.224	-234.19	-9.16850
CR2	ds1 = 28.00	NP1	0.620	-60.00	-8.29897
	dps1 = 15.00	BT1	1.224	-225.63	-8.60122
CR3	ds1 = 15.00	NP1	4.500	-60.00	-4.16363
CR4	ds1 = 15.00	NP1	4.500	-60.00	-3.34014
	ds2 = 28.00	NP1	0.620	-60.00	-8.51773
CR5	dps1 = 20.75	BT1	0.918	-264.78	-28.33350
CR6	ds1 = 21.50	NP1	1.580	-60.00	-16.56710
	dps1 = 20.75	BT1	0.918	-262.40	-21.27560
CR7	ds1 = 21.50	NP1	1.580	-60.00	-18.92470
	dps1 = 20.75	UT1	0.918	-222.40	-9.62044
CR8	ds1 = 21.50	NP1	1.580	-60.00	-8.48665
	dps1 = 20.75	BT1	0.918	-257.77	-13.47700
	dps2 = 20.00	UT2	1.200	-122.76	-4.66840
CR9	ds1 = 8.50	NP1	0.200	-60.00	-21.94510
	dps1 = 7.00	UT3	0.153	-197.56	-7.22707
CR10	ds1 = 8.50	NP1	0.200	-60.00	-24.04170
	dps1 = 7.00	UT4	0.153	-175.82	-6.35572
CR11	ds1 = 8.50	NP1	0.200	-60.00	-24.83020
	dps1 = 7.00	UT5	0.153	-168.50	-6.07777
CR12	ds1 = 25.00	NP1	4.800	-60.00	-4.50877
	dps1 = 22.00	UT6	1.530	-181.69	-6.58331
CR13	dps1 = 2.00	BT3	0.320	-97.46	-3.48282
	dps2 = 10.00	BT3	0.320	-177.50	-6.52153
CR14	ds1 = 2.756	NP2	3.487	39.64	1.53677
	ds2 = 28.740	NP2	3.487	-58.00	-8.80860
	dps1 = 5.512	BT2	1.550	-159.13	-5.71432
	dps2 = 25.984	BT2	1.550	-229.80	-13.86520
CR15	dps1 = 24.00	BT1	1.060	-257.79	-13.49050
CR16	ds1 = 24.001	NP1	1.310	-60.00	-8.26172
	dps1 = 24.00	BT1	0.740	-258.00	-13.63950
CR17	ds1 = 24.00	NP1	4.370	-60.00	-8.53543

Nota: Para el tipo de Curva en la columna (3) ver columna (1)
en Tablas 3 y 4

Tabla 3. Datos de Refuerzo No Presforzado

Tipo (1)	f_y (Ksi) (2)	E_s (Ksi) (3)	f_{su} (Ksi) (4)	E_{sh} (Ksi) (5)	ϵ_{su} (6)	ϵ_{sh} (7)	ϵ_y (8)
NP1	60	29,760	95.60	1,222	0.073	0.0091	0.002016
NP2	58	29,760	95.31	1,222	0.073	0.0091	0.001949

**Tabla 4. Datos de Refuerzo Presforzado y parámetros adicionales
(BT = Bonded o Adherido, UT = Unbonded o No Adherido)**

Tipo (1)	f_{py} (Ksi) (2)	E_{ps} (Ksi) (3)	f_{psu} (Ksi) (4)	f_{se} (Ksi) (5)	ϵ_{py} (6)	ϵ_{psu} (7)	K (8)	N (9)	Q (10)	Ω_u (11)	L_1/L_2 (12)	ϵ_{ce} (13)
BT1	243.5	27,890	278	150	0.01	0.069	1.0618	7.344	0.01174	1.00000	1.0000	0.000366
BT2	217.5	28,275	261	174	0.01	0.069	1.0400	6.598	0.02700	1.00000	1.0000	0.000149
BT3	225.0	28,000	250	150	0.01	0.080	1.0400	6.430	0.01370	1.00000	1.0000	0.000500
UT1	243.5	27,890	278	150	0.01	0.069	1.0618	7.344	0.01174	0.23344	1.0000	0.000366
UT2	141.8	27,890	160	80	0.01	0.041	1.0041	7.100	0.01750	0.23344	1.0000	0.000366
UT3	243.5	27,890	278	150	0.01	0.069	1.0618	7.344	0.01174	0.10500	1.0000	0.000366
UT4	243.5	27,890	278	150	0.01	0.069	1.0618	7.344	0.01174	0.05056	1.0000	0.000366
UT5	243.5	27,890	278	150	0.01	0.069	1.0618	7.344	0.01174	0.10500	0.3333	0.000366

CONCLUSIONES

Según los resultados mostrados en la Tabla 1 y Tabla 2, se puede concluir que los parámetros d_t or $(d_p)_{max}$ ofrecen un mejor entendimiento del análisis y diseño de secciones T o Rectangulares (vigas o columnas) de hormigón reforzado (RC), presforzado (PC) o parcialmente presforzado (PPC) que los parámetros ficticios d_e y ϵ_{te} propuesto por otros autores^{5,15,21}, ya que el análisis se hace con compatibilidad de deformaciones en cada barra real y no con el centroide del 100% del refuerzo presforzado.

Además, el factor de ductilidad por curvatura $\mu_\phi = \phi_u / \phi_y$ ⁶ es un excelente indicador de un buen diseño estructural pues nos advierte si la sección es dúctil o frágil.

BIBLIOGRAFIA

1. Ibrahim, H.H and MacGregor J. G., 1997, "Modification of the ACI Rectangular Stress Block for High-strength Concrete," *ACI Structural Journal* , V.94, No. 1, Jan-Feb., pp 40-48
2. Naaman, A. E. and Alkhairi, F. M. 1991, "Stress at Ultimate in Unbonded Prestressing Tendons- Part II: Proposes Methodology," *ACI Structural Journal* , V.89, No. 6, Nov-Dec-Feb., pp 690-692
3. Naaman, A. E., 1977, "Ultimate Analysis of Prestressed and Partially Prestressed Sections by Strain Compatibility," *PCI Journal* , V.22, No. 1, Jan-Feb., pp 32-51
4. Harajli, M. H. and Naaman, A. E., 1985, "Evaluation of the Ultimate Steel Stress in Partially Prestressed Flexural Members," *PCI Journal* , V.30, No. 5, Sep-Oct., pp 54-81
5. Naaman, A. E., Harajli Muhamed H. And Wight James K., 1986, "Analysis of Ductility in Partially Prestressed Concrete Flexural Members," *PCI Journal*, V.31, No. 3, May-Jun., pp 87.
See also Closure, V.32, No. 1, Jan-Feb 1987, pp 144
6. Park, R. And Paulay T., 1975, "Reinforced Concrete Structures," John Wiley and Sons, New York, N.Y.
7. Molano, T. J. C., 1992, Discussion on "Beam Strength Enhancement at Design Ductility Factor Demands," *J. Struct Engrg.*, ASCE, 118(6), PP 1713-1715
8. Molano, T. J. C., 1993, Discussion on "Analytical Moment Curvature Relations for Tied Concrete Columns," *J. Struct Engrg.*, ASCE, 119(3), PP 999-1000.
9. Molano, T. J. C., 1994, Discussion on "Aids Design for Reinforced Concrete Columns," *J. Struct Engrg.*, ASCE, 120(2), PP 678-679
10. Molano, T. J. C., 1995, Discussion on "Seismic Code Analysis of Buildings Without Locating Centers of Rigidity," *J. Struct Engrg.*, ASCE, 121(10), PP 792-793
11. Molano, T. J. C., 1996, Discussion on "Curvature Ductility of Reinforced Concrete Beams under Low and High Strain Rates," *ACI Structural Journal* , V.93, No. 4, Nov-Dec-Feb., pp 496-498.
12. Samra Raed. M., 1990, "Ductility Analysis of Confined Columns," *J. Struct Engrg.*, ASCE, 116(11), PP 3148-3161

13. Park, R. And Ruitong, D. 1988, "Ductility of Doubly Reinforced Concrete Beam Sections," *ACI Structural Journal* , V.85, No. 2, Mar-Apr., pp 217-225
14. Yen, J. Y. R., 1990, "Optimized Direct Design of Reinforced Concrete Columns with Uniaxial Loads", *ACI Structural Journal* , V.87, No. 3, May-Jun., pp 247-251.
15. Naaman, A. E., 1995,"Unified Bending Strength Design of Concrete Members: AASHTO LRFD Code," *J. Struct Engrg.*, ASCE,121(6), PP 968-970
16. Gilbert, R. I and Nickle Borough N.C.,1990, "Design of Prestressed Concrete," Unwin Hyman Ltd, pp 462-468
17. Skogman B. C., Tadros, M.K and Grasmick R., 1988,"Flexural Strength of Prestressed Concrete Members," *PCI Journal*, V.33,No. 5, Sep-Oct., pp 96-123
18. Harajli, M. H and Naaman, A. E., 1985,"Static and Fatigue Tests on Prestressed Concrete Beams," *J. Struct Engrg.*, ASCE,111(7), PP 1602-1618.
19. Nilson, A. H.,1978, "Design of Prestressed Concrete," John Wiley and Sons, pp 395-396
20. Molano, T. J. C.,1998, Discussion on "Design of Reinforced Concrete Flexural Sections by Unified Design Approach," *ACI Structural Journal* , V.96, No. 4, Jul-Aug., pp 661-662.
21. Naaman, A. E.,2004, "Limits of Reinforcement in 2002 ACI code: Transition, Flaws, and Solution", *ACI Structural Journal* , V.101, No. 2, Mar-Apr., pp 209-218.
22. Molano, T. J. C.,2005, Discussion on "Limits of Reinforcement in 2002 ACI code: Transition, Flaws, and Solution", *ACI Structural Journal* , V.102, No. 1, Jan-Feb., pp 172.
23. Nawy E. G.,1996, "Prestressed Concrete A Fundamental Approach" 2nd Ed., Prentice Hall, pp 496-501
24. Naaman, A. E., Burns, N., French C., Gamble W. and Mattock A.,2002, "Stresses in Unbonded Tendons at Ultimate Recommendation," *ACI Structural Journal* , V.99, No. 4, Jul-Aug., pp 518-529.