

Resistencia de Materiales

Miguel Cervera Ruiz

Elena Blanco Díaz



Resistencia de Materiales

Miguel Cervera Ruiz
Elena Blanco Díaz

Publicado por:



Resistencia de Materiales

Miguel Cervera Ruiz

Elena Blanco Díaz

© Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
(CIMNE) 2015

Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España

www.cimne.com

Depósito legal: B-19106-2015

ISBN: 978-84-944244-4-1

A nuestros alumnos

Prólogo

Esta obra recoge la experiencia docente de los autores en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona.

El planteamiento de este libro se corresponde con el de las asignaturas de Resistencia de Materiales que se incluyen en diversas titulaciones de Ingeniería y Arquitectura. Ésta es una versión revisada de las sucesivas ediciones de 1992, 1995, 1999, 2001 y 2012.

La obra se estructura en dos partes diferenciadas. Una primera, formada por los Capítulos 1 al 4, en la que se introducen los conceptos fundamentales comunes a la Teoría de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales, y una segunda, formada por los Capítulos 5 al 9, en la que se estudian los efectos mecánicos de los diferentes esfuerzos que actúan sobre una sección. La comprensión de los diferentes temas se ve favorecida por la inclusión de numerosos ejercicios y ejemplos resueltos.

Los autores agradecen a la profesora Dra. Antonia Larese su colaboración en la compilación, edición y revisión del libro. Asimismo, agradecemos al Sr. Raúl Giménez por la delineación de las figuras y esquemas que se incluyen.

Agradecemos a la E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona y al Centro Internacional de Métodos Numéricos (CIMNE) por el apoyo recibido a través de sus respectivos programas de incentivación para la elaboración de material docente.

Finalmente, agradecemos a nuestras familias el apoyo y comprensión recibidos, sin los que no hubiera sido posible nuestro trabajo.

Miguel Cervera Ruiz y Elena Blanco Díaz

Barcelona, febrero de 2015

Índice General

1	Tensión y Deformación	1
1.1	Introducción	1
1.2	Concepto de tensión	2
1.3	Componentes de tensión	5
1.4	Estado plano de tensiones	6
1.4.1	Ecuaciones de equilibrio interno de Cauchy	7
1.4.2	Tensión según una dirección arbitraria	7
1.4.3	Transformación del sistema de referencia	9
1.4.4	Tensiones principales	11
1.5	Estado tridimensional de tensiones	14
1.6	Concepto de deformación	15
1.6.1	Desplazamientos	15
1.6.2	Deformación	19
1.7	Estado plano de deformación	24
1.7.1	Movimientos y deformaciones	24
1.7.2	Tensor de deformaciones	27
1.7.3	Transformación del sistema de referencia	28
1.7.4	Deformaciones principales	30
1.8	Estado tridimensional de deformación	34
2	Elasticidad y Comportamiento de Materiales	37
2.1	Introducción	37
2.2	Elasticidad y linealidad. Ley de Hooke	37
2.3	Principio de superposición	38
2.4	Ley de Hooke generalizada	40
2.4.1	Estado plano de tensiones	51
2.4.2	Estado plano de deformaciones	52
2.5	Relación tensión-deformación. Estudio experimental	55

2.6	Tensión límite, tensión admisible y coeficiente de seguridad	63
3	Conceptos y Principios Básicos	65
3.1	Introducción	65
3.2	Objetivo de la Resistencia de Materiales	65
3.3	Concepto de pieza	66
3.4	Concepto de estructura de barras	70
3.5	Elementos estructurales	72
3.6	Apoyos y enlaces en estructuras de barras	74
3.6.1	Apoyos	74
3.6.2	Apoyos en estructuras reticuladas de plano medio	75
3.6.3	Enlaces	77
3.7	Principios de la Resistencia de Materiales	80
3.7.1	Principio de rigidez	80
3.7.2	Principio de superposición	81
3.7.3	Principio de Saint-Venant	82
3.7.4	Restricciones geométricas	84
3.8	Definición de esfuerzos en una sección	85
3.9	Relación entre esfuerzos y tensiones	88
3.10	Esfuerzos en piezas de plano medio	90
3.11	Ecuaciones de equilibrio en piezas rectas	91
3.12	Estructuras isostáticas e hiperestáticas	95
3.12.1	Equilibrio estático y resolución de estructuras	95
3.12.2	Estructuras articuladas	96
3.12.3	Estructuras reticuladas	99
4	Leyes de Esfuerzos	101
4.1	Introducción	101
4.2	Leyes de esfuerzos	101
4.3	Leyes de esfuerzos en estructuras articuladas	102
4.4	Leyes de esfuerzos en estructuras de plano medio	108
5	Esfuerzo Axil	127
5.1	Introducción	127
5.2	Esfuerzo axil en una pieza recta	127
5.3	Cables	141
5.4	Axil y temperatura	146

6	Flexión Recta	149
6.1	Introducción	149
6.2	Flexión pura recta	149
6.2.1	Flexión pura en piezas de plano medio	150
6.2.2	Flexión pura según un plano principal de inercia	156
6.2.3	Momentos máximos admisibles	157
6.2.4	Módulos resistentes	159
6.2.5	Rendimiento geométrico	159
6.3	Flexión simple recta	167
6.4	Flexión compuesta recta	175
7	Flexión Esviada	187
7.1	Introducción	187
7.2	Flexión pura esviada	187
7.2.1	Tensiones en flexión pura esviada	188
7.2.2	Deformación en flexión pura esviada	190
7.3	Flexión simple esviada	197
7.4	Flexión compuesta esviada	203
7.5	Núcleo central de la sección	208
7.5.1	Sección circular	209
7.5.2	Sección corona circular	210
7.5.3	Sección rectangular	211
7.5.4	Sección en doble T	212
8	Esfuerzo Cortante	213
8.1	Introducción	213
8.2	Teoría elemental de la cortadura	213
8.3	Teoría de Collignon	217
8.4	Sección rectangular	222
8.5	Secciones de pequeño espesor	224
8.5.1	Secciones abiertas	224
8.5.2	Secciones cerradas	231
8.6	Centro de esfuerzos cortantes	233
8.6.1	Posición del centro de esfuerzos cortantes	238
9	Momento Torsor	243
9.1	Introducción	243
9.2	Torsión de Coulomb	245

9.2.1	Sección circular	245
9.2.2	Sección circular hueca	249
9.2.3	Secciones cerradas de pequeño espesor	250
9.3	Torsión de Saint-Venant	254
9.3.1	Formulación general	254
9.3.2	Analogía de la membrana	257
9.3.3	Sección rectangular	259
9.3.4	Secciones rectangulares estrechas	260
9.3.5	Perfiles laminados abiertos	261
A	Características Geométricas de la Sección	269
A.1	Momento estático axial de una sección	269
A.2	Momentos de inercia de una sección	273
A.2.1	Momento de inercia axial y radio de giro	273
A.2.2	Momento de inercia polar	274
A.2.3	Producto de inercia	274
A.3	Traslación de ejes de referencia	277
A.3.1	Momento de inercia axial	277
A.3.2	Momento de inercia polar	278
A.3.3	Producto de inercia	278
A.4	Rotación de ejes de referencia	280
A.5	Ejes principales de inercia	283
A.6	Secciones de pequeño espesor	286
A.7	Características geométricas de algunas secciones planas	288
B	Perfiles Estructurales de Acero	291
C	Tablas	297
C.1	Magnitudes y Unidades de la Mecánica	297
C.2	Propiedades mecánicas de los materiales	299
C.3	Múltiplos y Submúltiplos	300
C.4	Alfabeto griego	300
	Bibliografía	301

1 Tensión y Deformación

1.1 Introducción

El objetivo principal de la Resistencia de Materiales es el de proporcionar al ingeniero los medios para analizar y diseñar estructuras o componentes capaces de soportar las cargas y acciones a las que éstos están o pueden estar sometidos durante su vida útil. Tanto el análisis como el diseño de cualquier componente estructural conlleva la determinación de *tensiones* y *deformaciones*. Los conceptos de *tensión* y *deformación* son, por tanto, básicos en la exposición de esta materia.

La Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad, como partes integrantes de la Mecánica de Sólidos Deformables, son dos disciplinas con objetivos comunes: ambas abordan el estudio de la resistencia (estado de tensiones) y la rigidez (estado de deformaciones) de cuerpos sólidos deformables sometidos a la acción de sistemas de fuerzas en equilibrio estático. Asimismo, ambas parten del principio de linealidad entre acción y respuesta; esto, como se verá en lo que sigue, implica que el comportamiento de los materiales es elástico y que los movimientos que se producen son pequeños.

La Resistencia de Materiales limita su campo de aplicación a ciertos tipos de elementos estructurales (vigas, columnas, etc.) sustentados de ciertas maneras predeterminadas (apoyos simples, articulaciones, empotramientos, etc.) y sometidas a ciertos tipos de acciones (fuerzas puntuales y repartidas, generalmente, y otras acciones definidas de forma adecuada). Esta restricción previa en cuanto a las geometrías, condiciones de apoyo y acciones consideradas permite la formulación de ciertas hipótesis de partida y de un planteamiento simplificado apto para la resolución analítica de multitud de problemas de ingeniería.

La Teoría de la Elasticidad, por su parte, afronta el problema mecánico en su forma más general en cuanto a geometrías, condiciones de contorno y tipos de acciones consideradas. Esto conlleva un rigor que precisa de un planteamiento matemático que impide obtener soluciones analíticas, salvo para un número limitado de casos, requiriendo el

uso de métodos numéricos aproximados (diferencias finitas, elementos finitos, etc.) para la resolución de la mayor parte de problemas de interés práctico.

Dados sus objetivos (y principios) comunes, la Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad siguen caminos paralelos prácticamente desde sus inicios y, a partir de la sistematización de ambas, no es fácil delimitar de forma nítida los ámbitos respectivos. Desde la perspectiva actual, es habitual considerar a la Resistencia de Materiales como una parte subordinada de la, más general, Teoría de la Elasticidad. En cualquier caso, ambas disciplinas manejan multitud de conceptos comunes, tales como los de fuerza, desplazamiento, tensión, deformación, equilibrio, compatibilidad, linealidad, etc..

En este Capítulo se presentan y desarrollan los conceptos de tensión y deformación, que serán utilizados a lo largo de los temas posteriores. La noción de tensión como fuerza aplicada por unidad de superficie y su relación con la resistencia estructural se debe indudablemente a Galileo. La definición moderna de deformación ingenieril como alargamiento unitario se atribuye a Cauchy, aunque ciertamente debía manejarse con anterioridad. Se establecen también en este Capítulo las relaciones de equilibrio existentes entre las fuerzas aplicadas y el estado tensional, y las relaciones de compatibilidad entre los desplazamientos y las deformaciones.

1.2 Concepto de tensión

Consideremos un cuerpo sólido sometido a la acción de un sistema de fuerzas exteriores (cargas aplicadas y reacciones) en equilibrio, e imaginémoslo cortado por una sección cualquiera S que lo divide en dos partes, (A) y (B) , situadas a ambos lados de la sección S (Figura 1.1). Para que exista equilibrio en las dos partes resultantes, (A) y (B) , deben existir unas ciertas fuerzas de interacción a través de la superficie S a las que llamaremos \mathbf{F} . Las fuerzas de interacción son iguales en magnitud y dirección, pero de sentidos opuestos, sobre las secciones S de las partes (A) y (B) , según exige el principio de acción y reacción.

Consideremos un punto sobre la superficie S y un entorno de dicho punto de área ΔS . Llamemos $\Delta \mathbf{F}$ a la fuerza que la parte (B) del cuerpo ejerce sobre la parte (A) a través del área ΔS . La fuerza por unidad de área vale entonces:

$$\mathbf{t}_m = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} \quad (1.1)$$

A esta fuerza por unidad de área \mathbf{t}_m se le llama *tensión media* sobre la superficie S en el punto considerado. Si se hace tender el área ΔS a un elemento diferencial de área

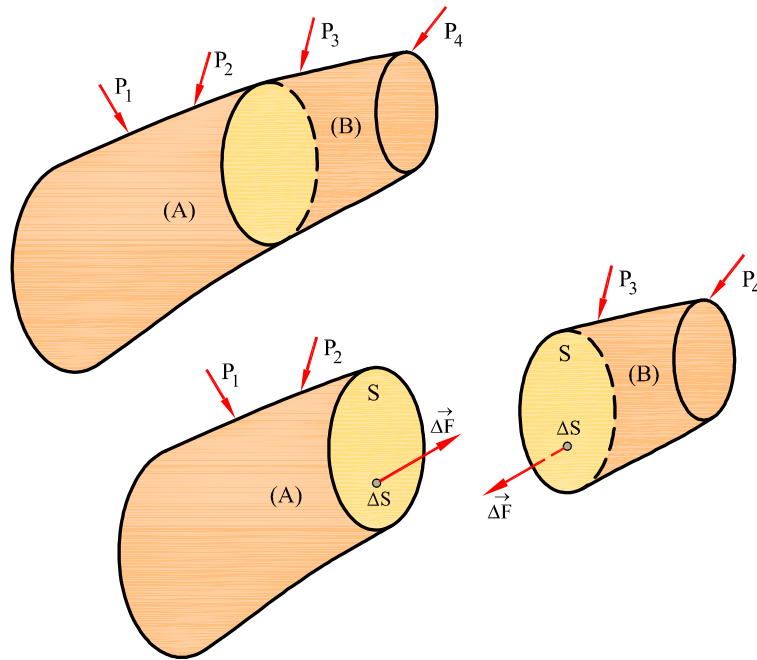


Fig. 1.1: Concepto de tensión media

dS , se obtiene lo que se define como tensión en un punto según una superficie S dada:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (1.2)$$

Respecto al concepto de tensión pueden hacerse las siguientes observaciones:

- Las dimensiones de la tensión son $[FL^{-2}]$, o sea, fuerza por unidad de superficie. En el sistema internacional la tensión se mide en Pascales (Pa), es decir, en N/m^2 .
- En general, la tensión no es normal al plano de corte considerado, sino que puede descomponerse según dos componentes: la tensión normal al plano de la sección, σ , y la tensión tangencial a dicho plano, τ , tal como se muestra en la Figura 1.2. El módulo de la tensión \mathbf{t} es igual a:

$$|\mathbf{t}| = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (1.3)$$

- La tensión depende del punto y de la orientación de la sección elegidos. Así, en un punto dado se tendrán diferentes tensiones según la orientación considerada (Figura 1.3), y para una sección dada se tendrán tensiones diferentes para distintos puntos.

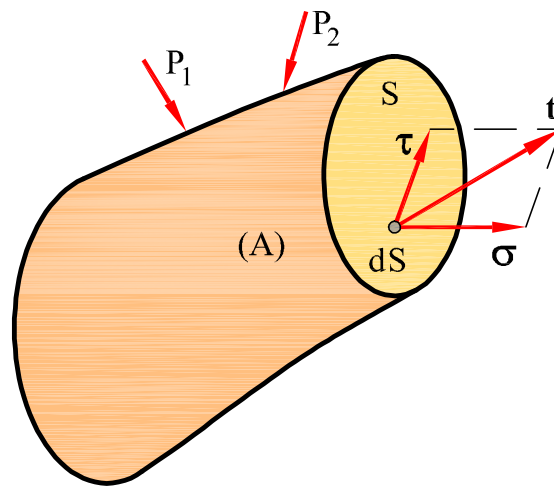


Fig. 1.2: Componentes normal y tangencial de la tensión

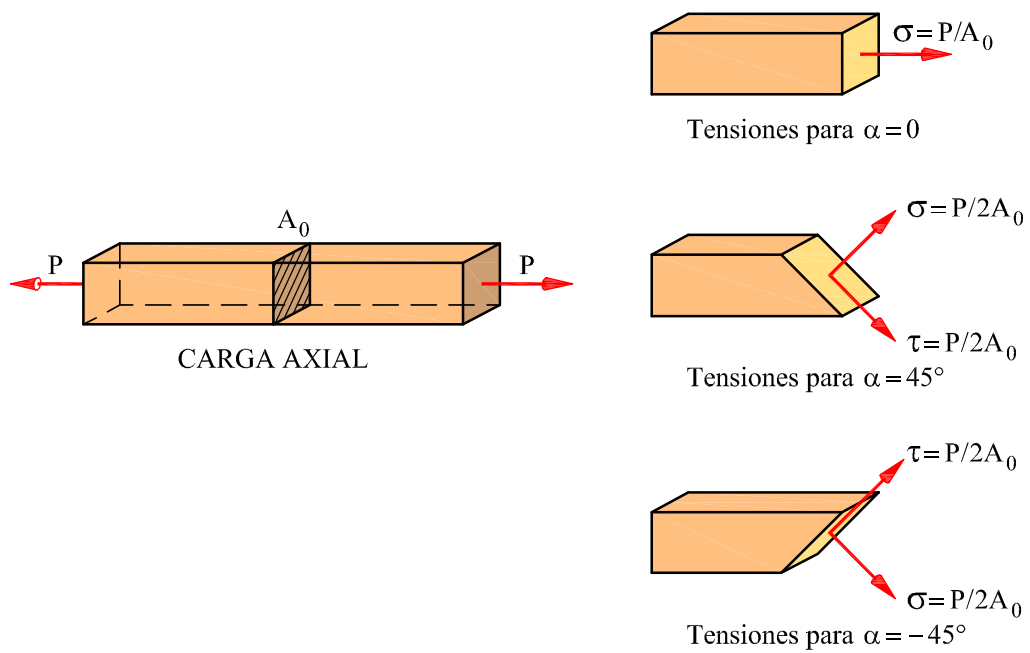


Fig. 1.3: Componentes de la tensión en un punto según la orientación de la sección

1.3 Componentes de tensión

Consideremos un cuerpo sometido a la acción de un sistema de fuerzas en equilibrio. Sea O un punto de su interior en el que se desea determinar el estado tensional. Analicemos un elemento diferencial de volumen, de forma hexaédrica y de dimensiones (dx, dy, dz) , con vértice en O y con caras paralelas a un cierto sistema de referencia cartesiano (x, y, z) con origen en O (Figura 1.4). Sobre cada cara del elemento diferencial actúa una tensión \mathbf{t} diferente que se puede descomponer según los ejes de referencia. Llamaremos σ a las componentes del vector tensión normales a cada cara y τ a las componentes tangenciales. Las componentes tangenciales se pueden descomponer a su vez en las direcciones de los dos ejes paralelos a la cara.

Así, sobre las caras normales al eje $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$ actúan las componentes $\begin{Bmatrix} \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz} \\ \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz} \\ \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy} \end{Bmatrix}$.

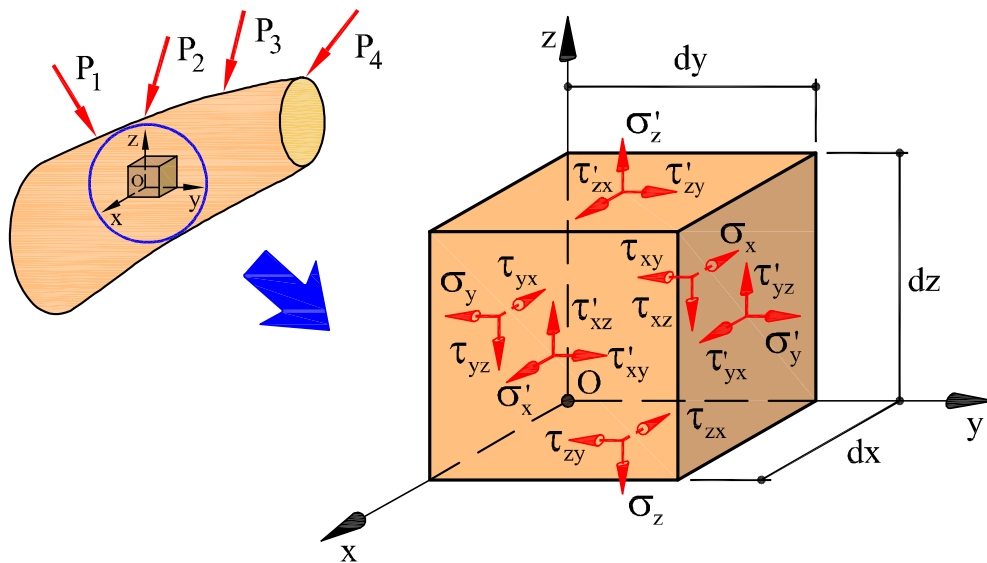


Fig. 1.4: Sistema de referencia y componentes cartesianas de la tensión

El subíndice de las tensiones normales representa el eje coordenado al que es normal la superficie sobre la que actúan. Los dos subíndices de las tensiones tangenciales de una superficie indican, el primero, el eje al cual es normal la superficie sobre la que actúan y, el segundo, el eje al que es paralela la componente tangencial. En las caras que no forman los ejes coordenados, se consideran componentes positivas las que tienen los sentidos de los ejes. En las caras que sí forman los ejes coordenados, se consideran los sentidos positivos opuestos. De esta forma, las tensiones de tracción son tensiones normales positivas y negativas las de compresión.

1.4 Estado plano de tensiones

Cuando las componentes tensionales sobre planos normales al eje z , σ_z, τ_{zx} y τ_{zy} , son nulas, las tensiones \mathbf{t} están siempre contenidas en el plano xy , y entonces se dice que se tiene un estado plano de tensiones (Figura 1.5). El estado tensional queda completamente definido por las componentes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Conocidas estas componentes del tensor de tensiones en cualquier punto O , es posible determinar la tensión sobre una superficie arbitraria, si se conocen los cosenos directores de la misma.

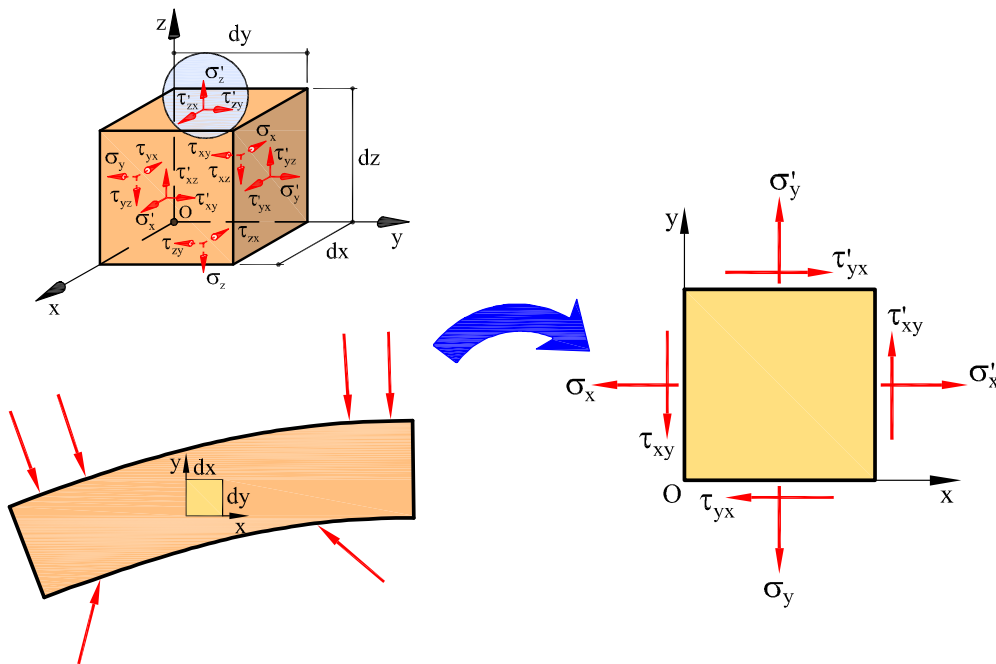


Fig. 1.5: Estado plano de tensiones

1.4.1 Ecuaciones de equilibrio interno de Cauchy

Distinguiendo con una prima las tensiones que actúan sobre los lados que no forman los ejes coordenados (Figura 1.5), las relaciones que existen entre las tensiones correspondientes a lados paralelos, por ejemplo, los lados del elemento diferencial perpendiculares al eje x , son, por continuidad del campo de tensiones:

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \sigma_x + d\sigma_x = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx \\ \tau'_{xy} &= \tau_{xy} + d\tau_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx\end{aligned}\quad (1.4)$$

Análogamente pueden obtenerse las relaciones para las componentes de tensión actuando sobre los lados perpendiculares al eje y .

Si llamamos \mathbf{b} a las fuerzas por unidad de superficie cuyas componentes cartesianas son \mathbf{b} (b_x, b_y) y planteando las condiciones de equilibrio estático del elemento diferencial aislado, por equilibrio de fuerzas según las dos direcciones cartesianas se obtienen las ecuaciones de equilibrio interno o de Cauchy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + b_x &= 0 & (\sum F_x = 0) \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0 & (\sum F_y = 0)\end{aligned}\quad (1.5)$$

Además, del equilibrio de momentos respecto al punto O (1.5) se obtiene el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales:

$$(\tau_{xy} dy) dx - (\tau_{yx} dx) dy = 0 \quad (\sum M_O = 0) \quad (1.6)$$

o sea,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1.7a)$$

Se deduce, por lo tanto, el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, que establece que "en dos planos perpendiculares entre sí, las tensiones tangenciales normales a la arista común en un punto son iguales en módulo, y ambas concurren o se separan simultáneamente de la arista"(Figura 1.6).

1.4.2 Tensión según una dirección arbitraria

Sea AB una orientación arbitraria, y $\mathbf{n}(l, m)$, con $l = \cos\alpha$ y $m = \sin\alpha$, el vector normal que la define. Por equilibrio de fuerzas en el elemento diferencial, pueden

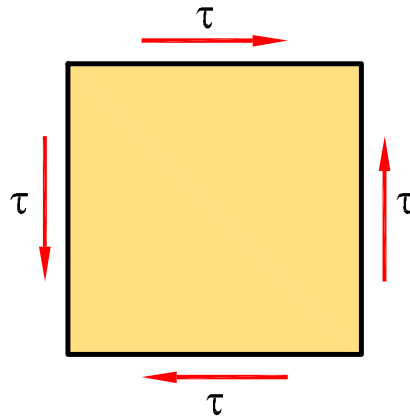


Fig. 1.6: Estado plano: reciprocidad de las tensiones

calcularse las componentes de la tensión:

$$t_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha \quad (1.8a)$$

$$t_y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha \quad (1.8b)$$

donde t_x y t_y son las componentes cartesianas de la tensión \mathbf{t} en el punto O según el plano AB . En forma matricial puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} \quad (1.10)$$

donde \mathbf{T} es el tensor de tensiones correspondiente al estado plano.

Por el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, el tensor de tensiones es simétrico.

De lo anterior se deduce que, conocido el tensor de tensiones en un punto y los cosenos directores de la normal a una orientación AB cualquiera que pase por el punto, se puede calcular la tensión \mathbf{t} según dicha orientación.

Conocida la tensión \mathbf{t} en un punto según una orientación arbitraria AB (Figura 1.7a), las componentes normal y tangencial de dicha tensión se obtienen proyectando las componentes t_x y t_y sobre las direcciones normal y tangencial al plano AB (Figura

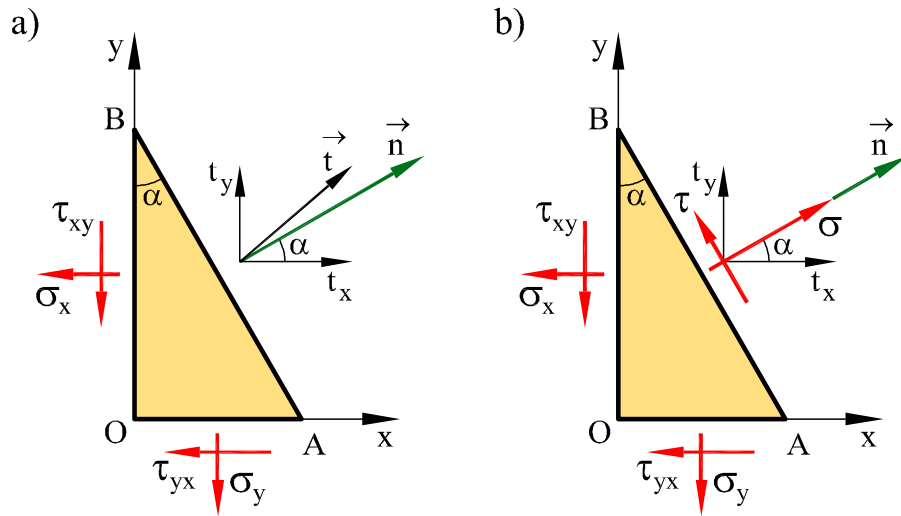


Fig. 1.7: Tensión según una dirección arbitraria

1.7b), respectivamente:

$$\begin{aligned}\sigma &= t_x \cos \alpha + t_y \sin \alpha \\ &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}\quad (1.11a)$$

$$\begin{aligned}\tau &= t_y \cos \alpha - t_x \sin \alpha \\ &= \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}\quad (1.11b)$$

1.4.3 Transformación del sistema de referencia

Las componentes del tensor de tensiones varían según el sistema de referencia en el que se expresan. Si el estado de tensiones es plano (Figura 1.8), las tensiones referidas al sistema girado x', y' variarán respecto a las correspondientes al sistema x, y . Sea \mathbf{N} la matriz de cosenos directores de los ejes x', y' respecto de los ejes x, y .

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cos(x'x) & \cos(y'x) \\ \cos(x'y) & \cos(y'y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix}\quad (1.12)$$

Las tensiones \mathbf{t}'_x ($t'_{x'x}, t'_{x'y}$) que actúan en las caras normales al eje x' expresadas en función del tensor de tensiones del sistema x, y son:

$$\mathbf{t}'_x = \begin{bmatrix} t'_{x'x} \\ t'_{x'y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}\quad (1.13)$$

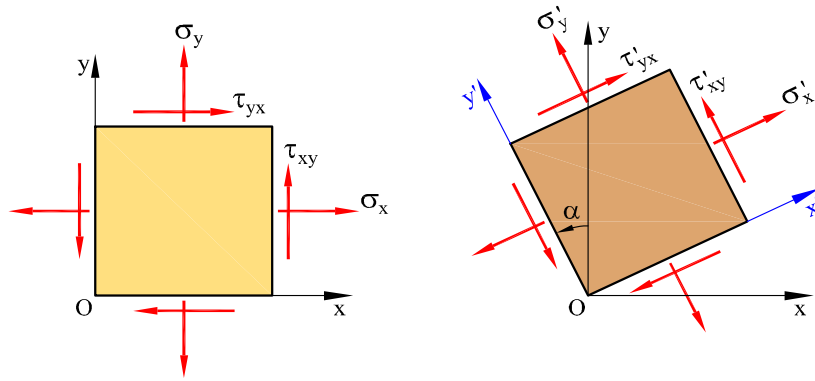


Fig. 1.8: Transformación del sistema de referencia

Procediendo de igual manera para las tensiones $t'_y(t'_{y'x}, t'_{y'y})$ que actúan en las caras normales a y' se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} t'_{x'x} & t'_{y'x} \\ t'_{x'y} & t'_{y'y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$\mathbb{T}' = \mathbf{T} \mathbf{N} \quad (1.15)$$

donde \mathbf{T} es el tensor de tensiones en el sistema x, y de referencia y \mathbf{N} es la matriz de cosenos directores que corresponde a un giro α de dicho sistema de referencia. Los elementos de la matriz \mathbb{T}' son las tensiones que actúan en las caras normales a x', y' referidas al sistema x, y .

Las componentes del tensor en el nuevo sistema de referencia se obtienen proyectando las tensiones \mathbb{T}' en las direcciones x', y' :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{y'x'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{N}^T \mathbf{T} \mathbf{N} \quad (1.17)$$

La matriz \mathbf{N} es una matriz ortogonal y se cumple $\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad; por ello puede escribirse:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} \mathbf{T}' \mathbf{N}^T \quad (1.18)$$

1.4.4 Tensiones principales

Conocida la expresión que proporciona el valor de las componentes cartesianas de la tensión \mathbf{t} , según una dirección definida por \mathbf{n} , cabe preguntarse para qué direcciones ocurre que las tensiones son únicamente normales (Figura 1.9), es decir, que se cumple:

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} \quad (1.19)$$

donde σ es un valor escalar que corresponde al módulo de la tensión en la dirección definida por \mathbf{n} . Combinando las Ecs. (1.10) y (1.19), debe cumplirse que:

$$(\mathbf{T} - \sigma \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

Para que este sistema de ecuaciones, lineal y homogéneo, tenga solución, es necesario que el determinante del sistema sea nulo:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.21)$$

o, desarrollando, que sea:

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0 \quad (1.22)$$

Resolviendo se obtiene:

$$\sigma = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.23)$$

donde σ_1 y σ_2 son las tensiones principales máxima y mínima, respectivamente.

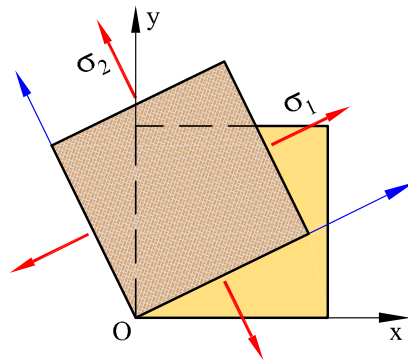


Fig. 1.9: Estado plano: tensiones principales

Se puede llegar al mismo resultado partiendo de las componentes normal y tangencial según una dirección \mathbf{n} arbitraria. De la Ec. (1.11b) se deduce que existe un cierto ángulo α para el cual la tensión tangencial τ se anula, es decir:

$$\tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad (1.24)$$

de donde

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \tan 2\alpha \quad (1.25)$$

A partir de esta ecuación es posible hallar dos direcciones perpendiculares entre sí para las cuales la tensión tangencial se anula; dichas direcciones son las direcciones principales de tensión y las tensiones normales correspondientes son las tensiones principales.

Análogamente, se puede calcular que la tensión máxima en el punto se da en las direcciones que forman 45° con las direcciones principales, y vale:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.26)$$

Ejemplo 1.4.1

En un estado plano de tensiones se conocen las tensiones normales y tangenciales que actúan en los planos OA y OB (Figura 1.7). Se pide calcular los valores de dichas tensiones para el plano AB que forma un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con el eje y .

Datos: $\sigma_x = 28,48$ MPa, $\sigma_y = 15$ MPa, $\tau_{xy} = 3$ MPa.

Aplicando las Ecs. (1.11) y sustituyendo los valores del ejemplo, se obtiene para el plano AB :

$$\begin{aligned} \sigma &= 28,48 \cdot 0,866^2 + 15 \cdot 0,5^2 + 3 \cdot 0,866 = 27,71 \text{ MPa} \\ \tau &= 3(0,866^2 - 0,5^2) + (15 - 28,48)0,866 \cdot 0,5 = -4,34 \text{ MPa} \end{aligned}$$

donde σ y τ son las componentes normal y tangencial, respectivamente.

Ejemplo 1.4.2

Para el estado plano de tensiones del Ejemplo 1.4.1, calcular el valor y la orientación de las tensiones principales.

Datos: $\sigma_x = 28,48 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 15 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 3 \text{ MPa}$.

Las tensiones principales se producen para unas direcciones α y $\alpha + 90^\circ$, en las que se cumple que la tensión tangencial τ es nula. Aplicando la ecuación (1.51) se obtienen los valores de α y $\alpha + 90^\circ$ que corresponden a las direcciones principales:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 3}{28,48 - 15} = 0,4451 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 12^\circ \quad \alpha_2 = 102^\circ$$

El valor de las tensiones normales según dichas direcciones se obtiene mediante la ecuación (1.49):

$$\sigma = \sigma_{1,2} = \frac{28,48 + 15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{28,48 - 15}{2}\right)^2 + 3^2}$$

Resolviendo se obtienen los valores: $\sigma_1 = 29,11 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 14,36 \text{ MPa}$, que corresponden a la tensión máxima y mínima, respectivamente.

Ejemplo 1.4.3

Un roblón de acero está sometido a una tensión tangencial τ_{xy} y una tensión normal σ_x (Figura 1.10). Se pide calcular el valor y la dirección de las tensiones principales.
 Datos: $\sigma_x = -30 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 90 \text{ MPa}$.

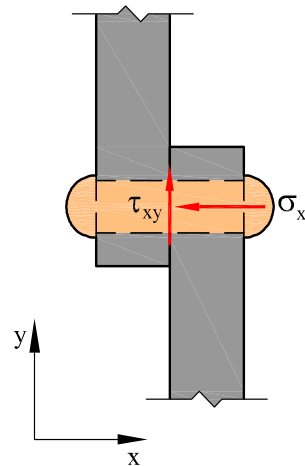


Fig. 1.10: Ejemplo 1.4.3: unión de dos piezas mediante un roblón

Las direcciones correspondientes a las tensiones principales pueden obtenerse a partir de la expresión:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Reemplazando los valores del ejemplo, las direcciones principales son:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot 90}{-30} = -6 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -40,27^\circ \quad ; \quad \alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ = 49,73^\circ$$

Las tensiones principales pueden calcularse mediante la siguiente ecuación y teniendo en cuenta que $\sigma_y = 0$:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-30}{2}\right)^2 + 90^2}$$

Resolviendo se obtienen los valores: $\sigma_1 = -106 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 76 \text{ MPa}$.

1.5 Estado tridimensional de tensiones

En un estado tridimensional de tensiones (Sección 1.3), la tensión $\mathbf{t}(t_x, t_y, t_z)$ que actúa sobre una orientación arbitraria definida por la cara ABC (Figura 1.11), determinada por su vector exterior $\mathbf{n}(l, m, n)$, se calcula de forma análoga al caso plano (Sección 1.4.2). Se puede escribir:

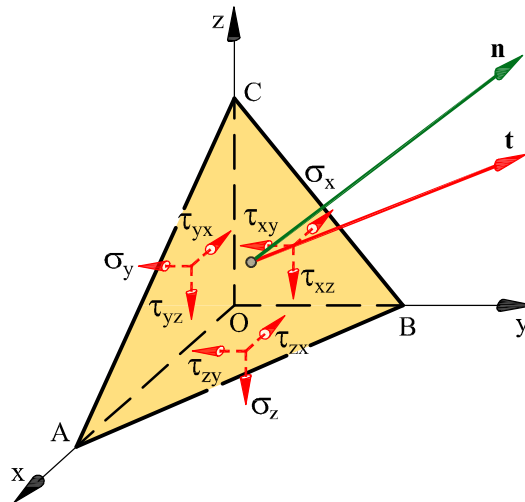


Fig. 1.11: Tetraedro de Cauchy

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

o en forma compacta:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} \quad (1.28)$$

donde \mathbf{T} es el tensor de tensiones que es igual a:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Por el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, el tensor de tensiones es simétrico.

Al ser el tensor de tensiones simétrico, existen siempre tres direcciones ortogonales entre sí en las cuales no se producen tensiones tangenciales. Son las llamadas *direcciones principales de tensión*. Expresado en esas direcciones (Sección 1.4.3), el tensor \mathbf{T} es diagonal.

1.6 Concepto de deformación

1.6.1 Desplazamientos

Se llama desplazamiento al cambio de posición de un cuerpo resultante de los movimientos de sólido rígido y las deformaciones. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.6.1.1

Consideremos un cuerpo bidimensional que se desplaza sin girar y sin deformarse a una nueva posición. Este movimiento del cuerpo se llama *traslación de sólido rígido* (Figura 1.12).

Las componentes del desplazamiento de un punto P , u y v , en las direcciones x, y , respectivamente, pueden expresarse mediante las correspondientes diferencias entre la posición final (x_f, y_f) e inicial (x_i, y_i) :

$$\begin{aligned} u &= x_f - x_i \\ v &= y_f - y_i \end{aligned}$$

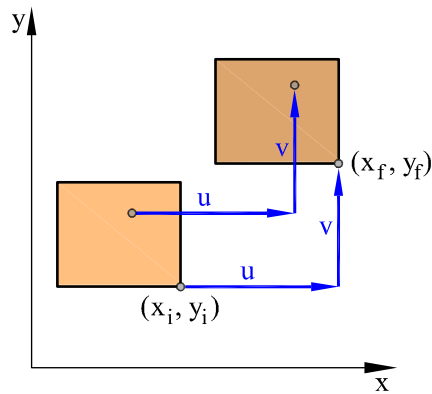


Fig. 1.12: Traslación de sólido rígido

Las componentes u y v son las mismas para cualquier parte del cuerpo, no hay cambio en el tamaño o forma del mismo, es decir, no hay deformación.

Ejemplo 1.6.1.2

Consideremos el mismo cuerpo bidimensional pero ahora los desplazamientos son el resultado de un giro θ alrededor de un eje. Este movimiento del cuerpo se llama *giro de sólido rígido* (Figura 1.13).

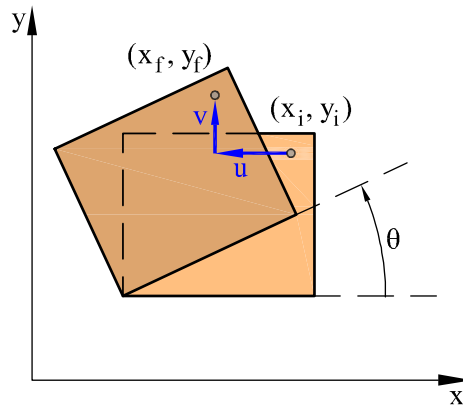


Fig. 1.13: Giro de sólido rígido

Las componentes u y v del desplazamiento en las direcciones x, y , respectivamente son, como en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}u &= x_f - x_i \\v &= y_f - y_i\end{aligned}$$

En este caso, las componentes u y v son diferentes para los distintos puntos del cuerpo. Cambia la orientación del cuerpo pero no hay cambio en el tamaño o forma del cuerpo, es decir, *no hay deformación*.

De los ejemplos anteriores se concluye que:

- Los movimientos de sólido rígido sólo desplazan el cuerpo hasta una nueva posición.
- Cualquier movimiento de sólido rígido puede analizarse como combinación de una traslación y un giro de sólido rígido.
- En los movimientos de sólido rígido *no hay deformación* porque los desplazamientos resultantes son tales que no hay variación de la distancia entre dos puntos cualquiera del cuerpo.

Ejemplo 1.6.1.3

Analicemos el cuerpo rectangular $ABCD$ que se deforma sufriendo una modificación de la longitud en dirección x (Figura 1.14). Este tipo de deformación se llama *deformación longitudinal*.

Un punto arbitrario $P_i(x_i, y_i)$ del cuerpo no deformado ocupa la posición final $P_f(x_f, y_f)$. Si no existe deformación en dirección y , en la deformación longitudinal las componentes u y v del desplazamiento en las direcciones x, y son:

$$\begin{aligned}u &= x_f - x_i = u(x) = \Delta \frac{x}{b} \\v &= y_f - y_i = 0\end{aligned}$$

Nótese que los desplazamientos u sólo dependen de la coordenada original x ($u_{(x=0)} = 0, u_{(x=b)} = \Delta$). Además, los puntos situados sobre rectas paralelas al eje y sufren el mismo desplazamiento en dirección x y no se desplazan en dirección y , (deformación transversal nula). Por último, la deformación longitudinal produce un cambio de

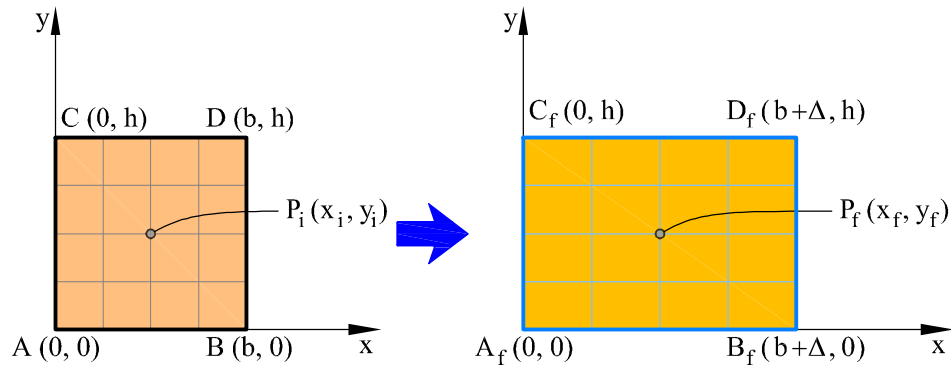


Fig. 1.14: Deformación longitudinal

tamaño del cuerpo, debida a la variación de la distancia longitudinal entre dos puntos (Figura 1.14).

Ejemplo 1.6.1.4

El cuerpo rectangular $ABCD$ se deforma sufriendo una modificación de los ángulos que forman sus aristas (Figura 1.15). Este tipo de deformación se llama *deformación por cortante*.

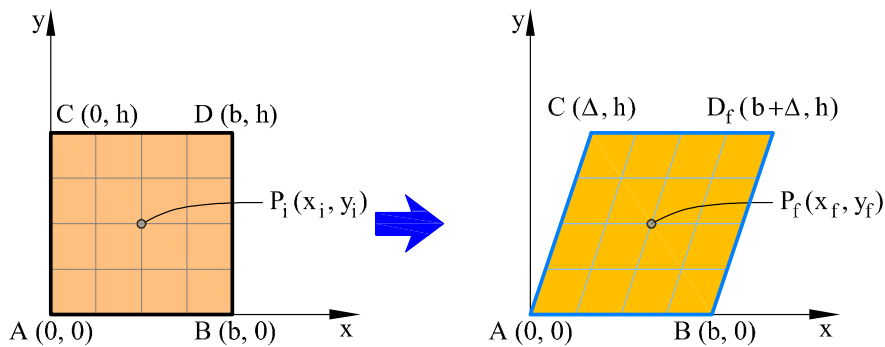


Fig. 1.15: Deformación por cortante

Un punto arbitrario $P_i(x_i, y_i)$ del cuerpo no deformado ocupa la posición final $P_f(x_f, y_f)$. En la deformación por cortante, las componentes u y v del desplazamiento

en las direcciones x, y , respectivamente son:

$$\begin{aligned} u &= x_f - x_i = u(y) = \Delta \frac{y}{h} \\ v &= y_f - y_i = 0 \end{aligned}$$

En este caso, los desplazamientos u sólo dependen de la coordenada original y . Los puntos situados sobre rectas paralelas al eje x a una distancia y sufren el mismo desplazamiento en dirección x , y no se desplazan en dirección y . La deformación por cortante produce un cambio de forma del cuerpo, debida a la variación del ángulo que forman originalmente las aristas (Figura 1.15).

Teniendo en cuenta los ejemplos anteriores se pueden obtener las siguientes conclusiones (Figura 1.16):

- En un cuerpo deformable que sufre una *deformación longitudinal* (Figura 1.16a) se produce un **cambio de volumen** en el que la distancia entre dos puntos puede cambiar.
- En un cuerpo deformable que sufre una *deformación por cortante* (Figura 1.16b) se produce un **cambio de forma** en el que el ángulo entre dos líneas puede cambiar.
- Estos cambios de volumen y de forma son los que diferencian a un cuerpo deformable de un cuerpo rígido.

1.6.2 Deformación

Consideremos un cuerpo sometido a la acción de fuerzas aplicadas, y con vínculos suficientes como para impedirle movimientos de sólido rígido. Dado que no existe

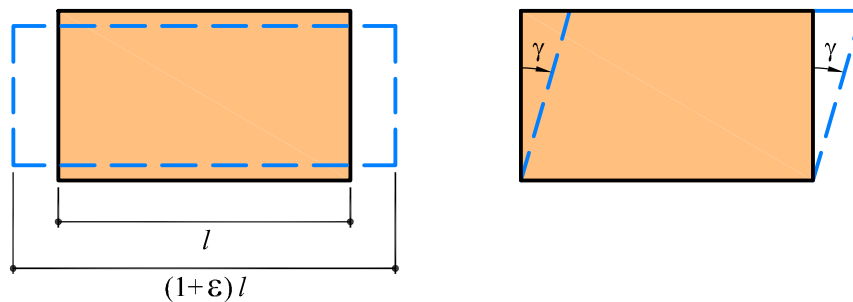


Fig. 1.16: (a) Deformación longitudinal (b) Deformación por cortante

material alguno que sea infinitamente rígido, la acción de las fuerzas se traduce en que el cuerpo se deforma, es decir, cambia de tamaño y de forma. Supondremos en lo que sigue que el cuerpo se comporta de forma suficientemente rígida como para que los movimientos que se producen en el proceso de deformación sean pequeños comparados con las dimensiones del cuerpo (principio de rigidez).

(a) Deformación longitudinal

Consideremos una barra recta de longitud inicial l que sufre un alargamiento Δl hasta una longitud final $l_f = l + \Delta l$ (Figura 1.17). O sea:

$$\Delta l = l_f - l \quad (1.30)$$

La *deformación longitudinal media* o alargamiento unitario medio en la barra se calcula dividiendo el alargamiento por la longitud inicial:

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.31)$$

Analicemos el alargamiento que sufre un elemento de la barra de longitud Δx . Como consecuencia del alargamiento, los puntos N y M se desplazan situándose en sus nuevas posiciones N_f y M_f , respectivamente. Los desplazamientos que sufren dichos puntos son u_N y u_M , respectivamente. Llamando Δu a la diferencia $\Delta u = u_M - u_N$, la deformación longitudinal media que sufre el elemento es igual a la relación:

$$\varepsilon_m(NM) = \frac{u_M - u_N}{x_M - x_N} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (1.32)$$

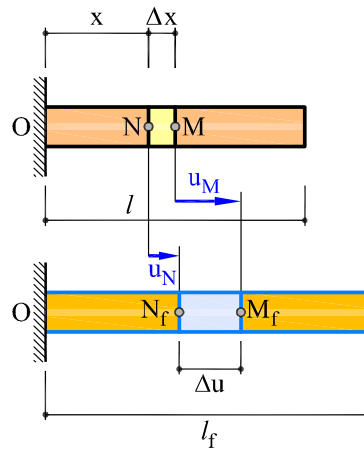


Fig. 1.17: Barra sometida a una deformación longitudinal. Alargamiento unitario

Si el elemento de longitud Δx se hace tender a un elemento diferencial de longitud dx , se llama *alargamiento unitario* o *deformación longitudinal en un punto N* a la relación:

$$\varepsilon_x(N) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} = u' \quad (1.33)$$

Se consideran positivas las deformaciones longitudinales de alargamiento y negativas la de acortamiento. La deformación longitudinal o alargamiento unitario es *adimensional* ya que es el resultado de un cociente entre dos magnitudes lineales. La relación entre la deformación longitudinal y el desplazamiento $\varepsilon = u'$ se basa en la hipótesis de que los desplazamientos u son pequeños $u \ll l$ y que dicha deformación ε es pequeña $\varepsilon \ll 1$.

Ejemplo 1.6.2.1

Consideremos una barra recta que sufre un alargamiento u_B en dirección longitudinal debido a un incremento uniforme de temperatura (Figuras 1.18).

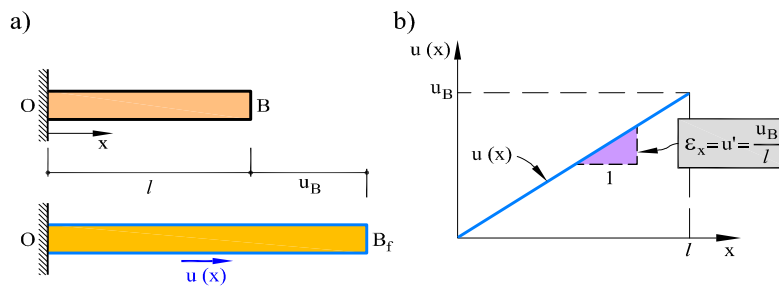


Fig. 1.18: Deformación de una barra debida a un incremento uniforme de temperatura

El desplazamiento de un punto en dirección x es una función lineal del desplazamiento u_B que sufre el extremo B de la barra (Figura 1.18b):

$$u(x) = u_B \frac{x}{l}$$

La deformación longitudinal es:

$$\varepsilon_x = u' = \frac{u_B}{l}$$

y la deformación longitudinal media es igual a:

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta u}{l} = \frac{u_B - u_O}{l} = \frac{u_B}{l}$$

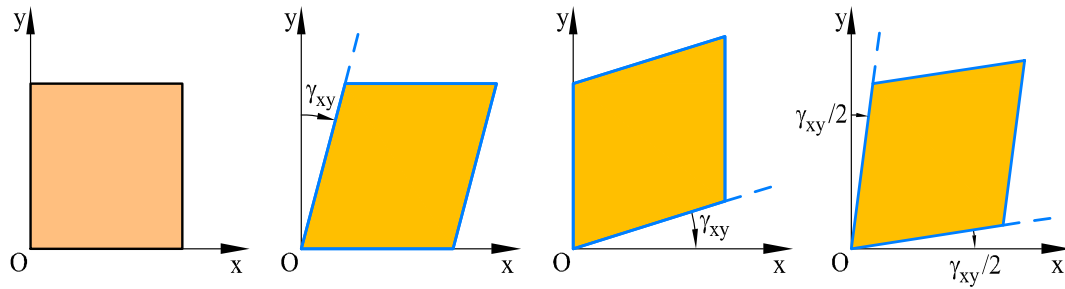


Fig. 1.19: Deformación angular

Nótese que en este caso la deformación longitudinal ε_x y la deformación longitudinal media ε_m son iguales. Este tipo de deformación se llama *deformación uniforme*.

(b) Deformación angular

Los *cambios de forma* de un cuerpo están asociados a la variación de los ángulos que forman las aristas del cuerpo que originalmente son rectos.

La Figura 1.19 muestra la deformación por cortante que sufre un cuerpo cuadrado que se deforma por cortante en un rombo. La diferencia entre los tres bloques deformados (Figuras 1.19b-1.19d) es una rotación de sólido rígido. Sin embargo, en cada uno de los cuerpos deformados, la variación del ángulo entre las dos aristas (que ini-

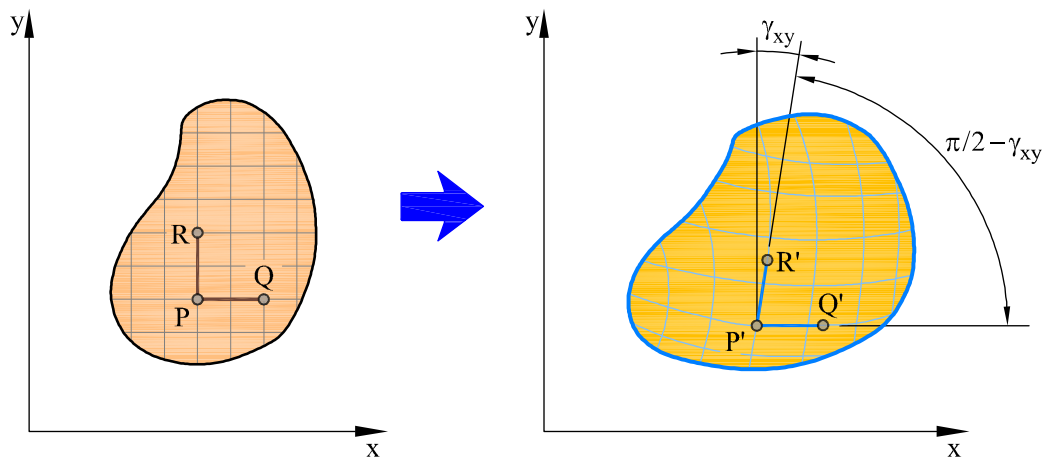


Fig. 1.20: Deformación angular en un punto

cialmente era recto) es el ángulo γ_{xy} . Esta disminución del ángulo es un ejemplo de la deformación angular.

La deformación angular o distorsión en un punto se define como la variación angular entre dos segmentos inicialmente perpendiculares, como consecuencia de un cambio de forma (Figura 1.20).

Por ejemplo, si se consideran los segmentos perpendiculares \overline{PQ} y \overline{PR} , la deformación angular en el punto P , puede expresarse por:

$$\gamma_{xy}(P) = \lim_{\substack{Q \rightarrow P \\ R \rightarrow P}} (\widehat{QPR} - \widehat{Q'P'R'}) = \lim_{\substack{Q \rightarrow P \\ R \rightarrow P}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{Q'P'R'} \right) \quad (1.34)$$

La deformación angular se considera *positiva* cuando el ángulo que forman dos segmentos perpendiculares *disminuye*. La deformación angular o distorsión es *adimensional*, ya que la variación angular se mide en radianes. Por último, la deformación angular mide el *cambio de forma* de un cuerpo en la proximidad de un punto P . Todo lo anterior se basa en la hipótesis de que la deformación angular γ es pequeña $\gamma \ll 1$ rad.

Ejemplo 1.6.2.2

El apoyo de una viga formado por dos placas rígidas y un bloque de neopreno de altura h , se deforma según muestra la Figura 1.21. Calcular la deformación angular en el neopreno.

Datos: $u = 1,035 \cdot 10^{-3}$ m, $h = 0,15$ m.

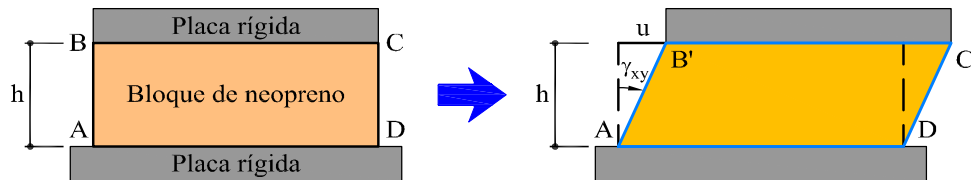


Fig. 1.21: Apoyo del Ejemplo 1.6.2.2

La distorsión angular es:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \widehat{BAD} - \widehat{B'AD} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BAB'} \right) \\ &= \arctan \frac{u}{h} = \arctan \frac{1,035 \cdot 10^{-3}}{0,15} = 6,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

1.7 Estado plano de deformación

1.7.1 Movimientos y deformaciones

Se define un estado plano de deformaciones como aquél en que los movimientos según los ejes x, y, z son:

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad w = 0$$

Consideremos la deformación de un segmento diferencial dx (Figura 1.22) y sea u el desplazamiento en dirección x que sufre el punto origen del segmento. Para el punto final del segmento:

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = u + \varepsilon_x dx \quad (1.35)$$

que define la deformación unitaria según el eje x , ε_x , como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.36)$$

Análogamente, pueden definirse las deformaciones unitarias según el eje y como:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.37)$$

donde v es el desplazamiento según el eje y .

Consideremos ahora la deformación de un elemento ortogonal diferencial $dx dy$ (Figura 1.23). Puede escribirse:

$$\alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy} \quad (1.38)$$

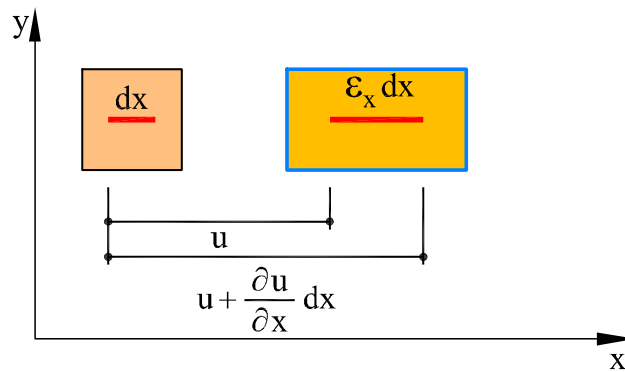


Fig. 1.22: Relación entre desplazamiento y deformación longitudinal

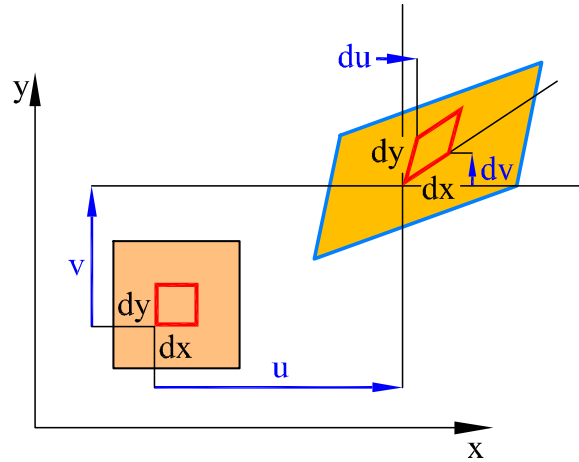


Fig. 1.23: Relación entre desplazamiento y deformación angular

donde γ_{xy} es la deformación angular o distorsión del elemento originalmente rectangular.

Por tanto, en un problema plano en el que se producen las componentes de desplazamiento $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en las direcciones x, y , respectivamente, hay tres deformaciones unitarias independientes, dos longitudinales y una angular, expresadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.39)$$

Las relaciones entre las deformaciones unitarias y los desplazamientos se basan en la hipótesis de que *los desplazamientos y las deformaciones son pequeños* (principio de rigidez).

Para poder resolver el problema inverso, es decir, para poder hallar los desplazamientos u, v dadas $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, éstas deben cumplir una única ecuación de compatibilidad de Saint-Venant:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.40)$$

Ejemplo 1.7.1.1

Calcular un campo de desplazamientos plano que esté compuesto de una traslación rígida $\mathbf{a}_0 = (u_0, v_0)$, un giro rígido de módulo ω_0 alrededor del punto (x_0, y_0) , unas

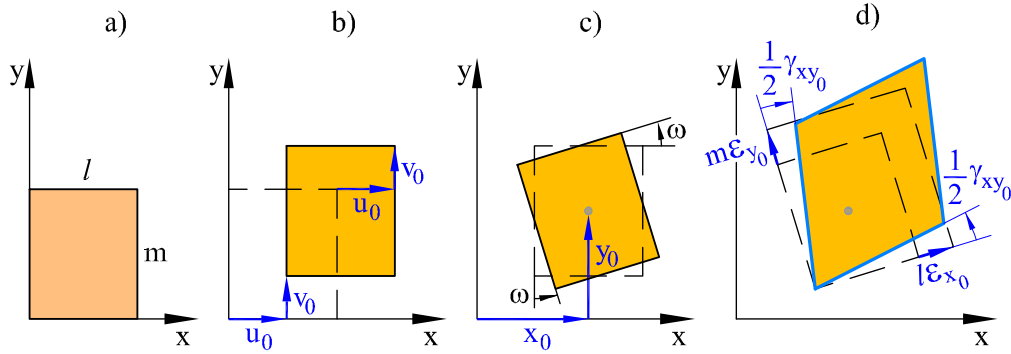


Fig. 1.24: Movimientos y deformaciones del Ejemplo 1.7.1.1

deformaciones longitudinales constantes $\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{y_0}$, y una deformación angular constante γ_{xy_0} ((Figura 1.24).

El campo buscado es:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - (y - y_0)\omega_0 + \varepsilon_{x_0} x + \frac{1}{2}\gamma_{xy_0} y \\ v &= v_0 + (x - x_0)\omega_0 + \varepsilon_{y_0} y + \frac{1}{2}\gamma_{xy_0} x \end{aligned}$$

Se comprueba que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{y_0} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy_0} \end{aligned}$$

y que se cumple la condición de compatibilidad, Ec. (1.40), al ser las deformaciones constantes.

Ejemplo 1.7.1.2

Un campo plano de deformaciones viene dado por: $\varepsilon_x = 8x$; $\varepsilon_y = x$; $\gamma_{xy} = -y$. Comprobar que se cumple la ecuación de compatibilidad, Ec. (1.40), y hallar el campo de desplazamientos.

La ecuación de compatibilidad se cumple idénticamente al ser el campo de deformaciones lineal y, por tanto, sus derivadas segundas son nulas.

El campo de desplazamientos se halla integrando las ecuaciones que relacionan dicho campo con el campo de deformaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 8x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -y$$

De la 1ª: $u = 4x^2 + f(y)$

De la 2ª: $v = xy + g(x)$

De la 3ª: $\frac{df}{dy} + y + \frac{dg}{dx} = -y \quad \Rightarrow \quad f(y) = -y^2 \quad ; \quad g(x) = 0$

y resulta:

$$\begin{aligned} u &= 4x^2 - y^2 \\ v &= xy \end{aligned}$$

1.7.2 Tensor de deformaciones

Consideremos un elemento unitario $\overrightarrow{OD} = \mathbf{n}$, de cosenos directores (l, m) . Se define como deformación $\boldsymbol{\delta}$ del elemento \overrightarrow{OD} al desplazamiento $\overrightarrow{DD'}$ del punto D , originado por la deformación del elemento rectangular diferencial de área de dimensiones l y m , que tenga a \overrightarrow{OD} por diagonal, prescindiendo de rotaciones y traslaciones de sólido rígido (Figura 1.25).

Calculamos a continuación las componentes cartesianas del vector $\boldsymbol{\delta}$, o sea (δ_x, δ_y) . Para ello, sumamos las componentes del desplazamiento del punto D debidas a los alargamientos unitarios $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ y a la distorsión γ_{xy} (Figuras 1.25b y c):

$$\delta_x = \varepsilon_x l + \frac{\gamma_{xy}}{2} m \tag{1.41}$$

$$\delta_y = \frac{\gamma_{xy}}{2} l + \varepsilon_y m$$

o matricialmente:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{D} \mathbf{n} \tag{1.42}$$

donde \mathbf{D} es el tensor de deformaciones que es igual a:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \tag{1.43}$$

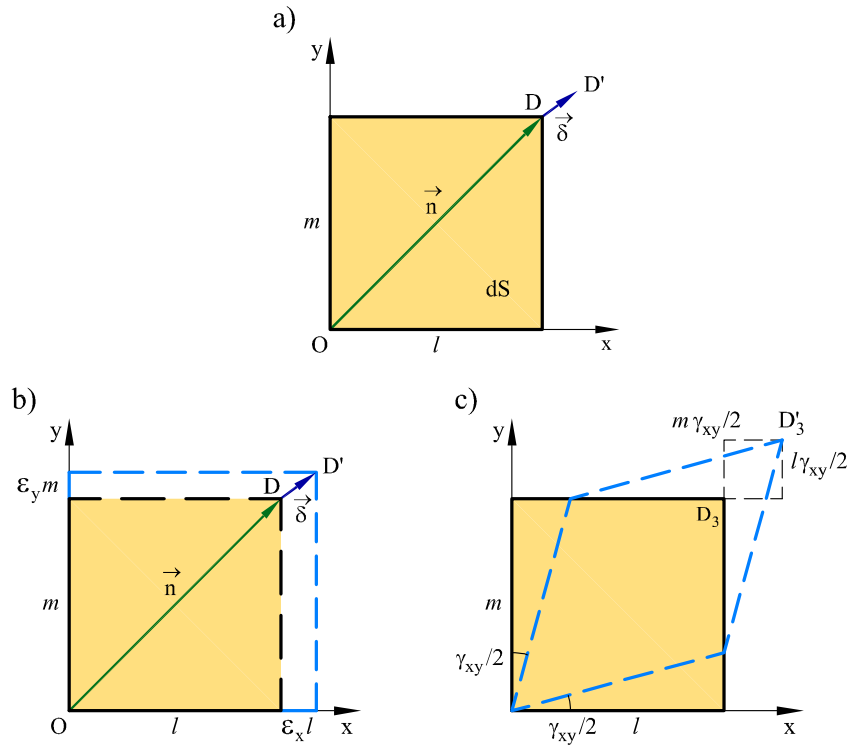


Fig. 1.25: Estado plano de deformación: (a) Vector deformación (b) Desplazamientos debidos a los alargamientos (c) Desplazamientos debidos a las distorsiones

El tensor de deformaciones es simétrico, al haber prescindido en su construcción de las rotaciones de sólido rígido.

Se deduce de la expresión (1.42) que, conocidas las componentes del estado de deformación de un punto (tensor de deformaciones) y los cosenos directores de un elemento lineal cualquiera, se puede conocer la deformación de dicho elemento (Figura 1.26).

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2 \phi + \varepsilon_y \sin^2 \phi + \gamma_{xy} \sin \phi \cos \phi \quad (1.44a)$$

$$\gamma = 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin \phi \cos \phi + \gamma_{xy} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \quad (1.44b)$$

1.7.3 Transformación del sistema de referencia

Análogamente a lo desarrollado para el tensor de tensiones (Sección 1.4.3), en un estado plano el tensor de deformación se transforma al girar el sistema de referencia x, y y pasar

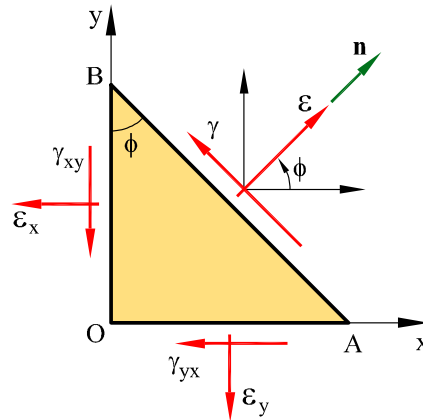


Fig. 1.26: Deformaciones según una dirección arbitraria \vec{n}

a ser x', y' . Sea \mathbf{N} la matriz de los cosenos directores:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cos(x'x) & \cos(y'x) \\ \cos(x'y) & \cos(y'y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

y \mathbf{D} el tensor de deformaciones referido al sistema x, y . La expresión que permite obtener el tensor de deformaciones \mathbf{D}' , referido al sistema de referencia x', y' , es:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} & \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} & \varepsilon_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

o matricialmente

$$\mathbf{D}' = \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{N} \quad (1.47)$$

Ejemplo 1.7.3.1

En el punto O de un sólido bidimensional se conocen las deformaciones unitarias según los ejes x, y (Figura 1.27a). Se pide calcular los valores de dichas deformaciones para las direcciones x', y' que forman un ángulo $\alpha = 40^\circ$ con los ejes x, y .

Datos: $\varepsilon_x = 3,6 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_y = 2,4 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_{xy} = 5,0 \cdot 10^{-3}$.

Conocidas las componentes del tensor de deformaciones \mathbf{D} , mediante la Ec. (1.46)

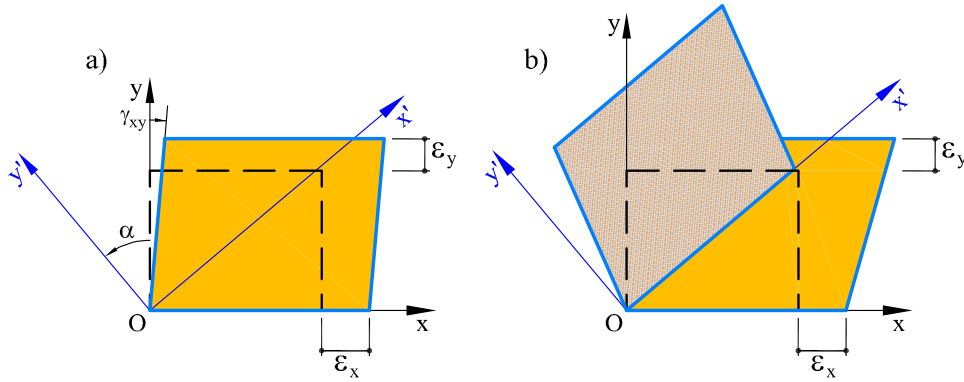


Fig. 1.27: (a) Estado plano de deformación del Ejemplo 1.7.3.1 (b) Deformaciones referidas al sistema x', y'

obtenemos el tensor de deformaciones \mathbf{D}' referido al sistema de referencia x', y' .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \epsilon_{x'} & \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} & \epsilon_{y'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,766 & 0,643 \\ -0,643 & 0,766 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,6 & 2,5 \\ 2,5 & 2,4 \end{bmatrix} 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,766 & -0,643 \\ 0,643 & 0,766 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5,57 & -0,16 \\ -0,16 & 0,43 \end{bmatrix} 10^{-3} \end{aligned}$$

Los valores de las deformaciones unitarias según las direcciones x', y' (Figura 1.27b) son:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x'} &= 5,6 \cdot 10^{-3} \\ \epsilon_{y'} &= 4,3 \cdot 10^{-4} \\ \gamma_{x'y'} &= -3,2 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

1.7.4 Deformaciones principales

De forma análoga a lo planteado al estudiar las tensiones (Sección 1.4), existen unas direcciones para las que se cumple que la deformación es exclusivamente longitudinal:

$$\boldsymbol{\delta} = \epsilon \mathbf{n} \quad (1.48)$$

donde ϵ es un valor escalar que corresponde al módulo de la deformación en la dirección definida por \mathbf{n} . Combinando las Ecs. (1.48) y (1.42) se tiene:

$$(\mathbf{D} - \epsilon \mathbf{I}) \mathbf{n} = 0 \quad (1.49)$$

donde \mathbf{I} es una matriz unitaria 2×2 . Para que este sistema de ecuaciones, lineal y homogéneo, tenga solución, es necesario que el determinante del sistema sea nulo, o sea:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (1.50)$$

desarrollando el determinante y resolviendo:

$$\varepsilon = \varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (1.51)$$

donde ε_1 y ε_2 son las *deformaciones principales*.

De forma alternativa, las direcciones de las deformaciones principales pueden determinarse partiendo de las expresiones (1.35) que proporcionan el alargamiento unitario y la distorsión según una dirección arbitraria \mathbf{n} . Si se iguala a cero la Ec. (1.44b):

$$2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin \phi \cos \phi + \gamma_{xy} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = 0 \quad (1.52)$$

se obtiene:

$$\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi} = \tan 2\phi \quad (1.53)$$

que proporciona las direcciones de las deformaciones principales.

La deformación cortante máxima en el punto se da en las direcciones que forman 45° con las direcciones principales y vale:

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (1.54)$$

Ejemplo 1.7.4.1

La placa de la Figura 1.28 se deforma según se muestra con las deformaciones unitarias $\varepsilon_x = 5,6 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_y = 2,4 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_{xy} = 8,4 \cdot 10^{-3}$. Se pide: a) escribir el tensor de deformaciones correspondiente, y b) calcular las deformaciones principales y sus direcciones.

Conocidas las deformaciones unitarias referidas al sistema x, y , el tensor de deformaciones \mathbf{D} es:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,6 & 4,2 \\ 4,2 & 2,4 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

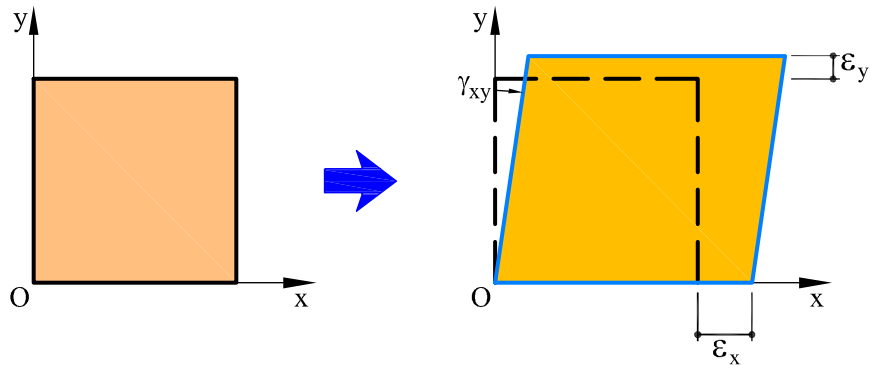


Fig. 1.28: Deformaciones de la placa del Ejemplo 1.7.4.1

Las deformaciones principales pueden calcularse hallando las raíces de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5,6 - \varepsilon & 4,2 \\ 4,2 & 2,4 - \varepsilon \end{vmatrix} 10^{-3} = 0$$

Resolviendo el determinante se obtiene la ecuación:

$$\varepsilon^2 - 8\varepsilon - 4,2 = 0$$

La solución de esta ecuación proporciona los valores de ε_1 y ε_2 que son los alargamientos unitarios principales:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 8,5 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_2 &= -0,5 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Las direcciones en las que se producen las deformaciones principales se calculan mediante la expresión:

$$\tan 2\phi = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{8,4}{5,6 - 2,4} = 2,625$$

por tanto, $\phi_1 = 34,57^\circ$ y $\phi_2 = 124,57^\circ$ son las direcciones principales de las deformaciones.

Ejemplo 1.7.4.2

En el punto O de un sólido bidimensional se tienen las deformaciones $\varepsilon_x = 4,2 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_y = -3,0 \cdot 10^{-3}$ y $\gamma_{xy} = 6,0 \cdot 10^{-3}$ (Figura 1.29). Se pide calcular los alargamientos unitarios principales y la distorsión máxima.

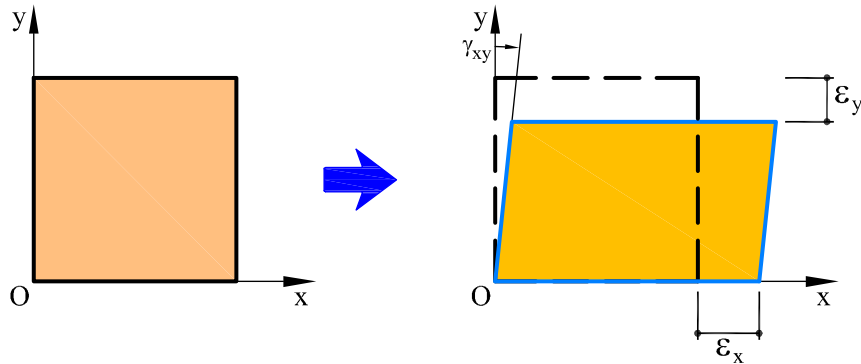


Fig. 1.29: Deformaciones del sólido bidimensional del Ejemplo 1.7.4.2

Las direcciones principales de los alargamientos unitarios se obtienen mediante la expresión:

$$\tan 2\phi = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{6,0}{4,2 + 3,0} = 0,833$$

Por tanto, las direcciones principales son: $\phi_1 = 20^\circ$ y $\phi_2 = 110^\circ$.

Los alargamientos unitarios principales, ε_1 y ε_2 , pueden obtenerse a partir de la expresión:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ &= \left[\frac{4,2 + 3,0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(7,2)^2 + (6,0)^2} \right] 10^{-3} \end{aligned}$$

de donde se obtiene, $\varepsilon_1 = 5,2 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_2 = -4,0 \cdot 10^{-3}$.

La orientación de la deformación por cortante máxima puede determinarse mediante la expresión:

$$\tan 2\beta = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} = -\frac{4,2 + 3,0}{6,0} = -1,2$$

Por tanto, $\beta_1 = -25^\circ$ y $\beta_2 = \beta_1 + 90^\circ = 65^\circ$.

Nótese que las direcciones principales y las direcciones de deformación por cortante máximas forman un ángulo de 45° . El valor de la distorsión máxima puede calcularse mediante:

$$\gamma_{\max} = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = 9,4 \cdot 10^{-3}$$

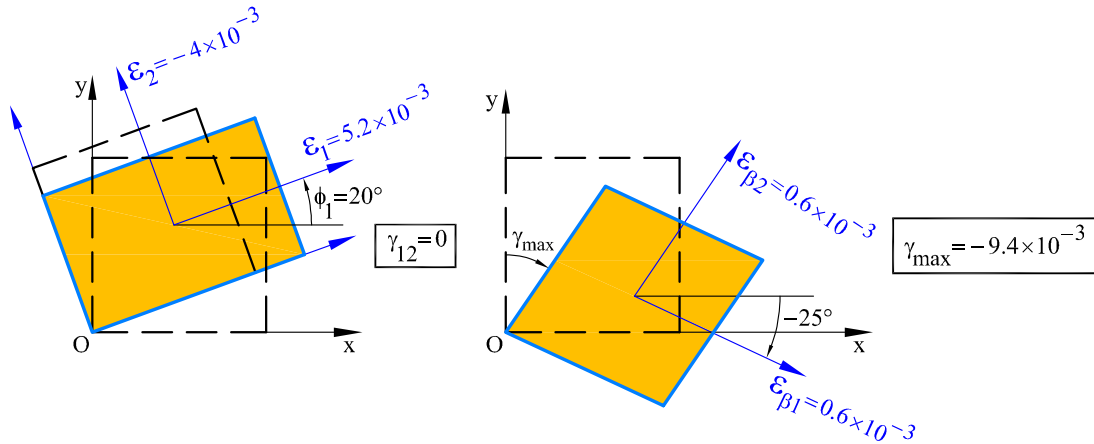


Fig. 1.30: (a) Alargamientos unitarios principales (b) Distorsión máxima

El alargamiento unitario que se produce en la dirección β_1 puede calcularse realizando el cambio de sistema de referencia:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\beta_1} &= \varepsilon_x \cos^2 \beta_1 + \varepsilon_y \sin^2 \beta_1 + \gamma_{xy} \sin \beta_1 \cos \beta_1 \\
 &= [4,2 \cdot 0,82139 - 3,0 \cdot 0,1786 - 6,0 \cdot 0,4226 \cdot 0,9063] \cdot 10^{-3} \\
 &= 0,6 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}$$

Puede comprobarse que los alargamientos según las direcciones β_1 y β_2 son iguales.

1.8 Estado tridimensional de deformación

En un problema tridimensional en el que aparecen las componentes de desplazamiento $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ y $w(x, y, z)$ en las direcciones x, y, z , respectivamente, hay seis deformaciones unitarias independientes, tres longitudinales y tres angulares, expresadas por:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Las relaciones tridimensionales entre las deformaciones unitarias y los desplazamientos se basan en la hipótesis de que *los desplazamientos y las deformaciones son pequeños* (principio de rigidez).

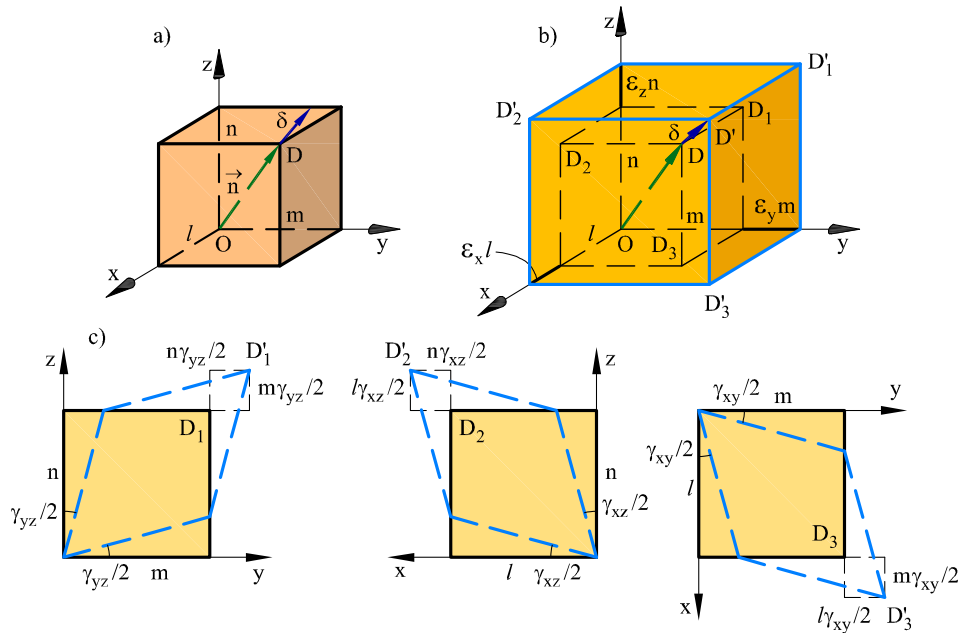


Fig. 1.31: (a) Concepto de vector deformación (b) Desplazamientos debidos a los alargamientos (c) Desplazamientos debidos a las distorsiones

En estas condiciones, la deformación $\delta(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ de un elemento $\overrightarrow{OD} = \mathbf{n}(l, m, n)$ (Figura 1.31a) se calcula de forma análoga al caso plano (Sección 1.7.2).

Matricialmente se tiene:

$$\delta = \mathbf{D} \mathbf{n} \quad (1.56)$$

donde \mathbf{D} es el tensor de deformaciones que es igual a:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

El tensor de deformación es simétrico, al haber prescindido en su construcción de las rotaciones de sólido rígido.

Al ser el tensor de deformación simétrico, existen siempre tres direcciones ortogonales entre sí en las cuales la deformación es exclusivamente longitudinal. Son las llamadas *direcciones principales de deformación*. Expresado en esas direcciones el tensor \mathbf{D} es diagonal.

2 Elasticidad y Comportamiento de Materiales

2.1 Introducción

En el Capítulo anterior se han introducido y desarrollado los conceptos de tensión y deformación, y sus relaciones respectivas con las fuerzas aplicadas y los desplazamientos. Se han establecido las necesarias ecuaciones de equilibrio (entre fuerzas y tensiones) y compatibilidad (entre desplazamientos y deformaciones).

En este Capítulo, tensiones y deformaciones se relacionan entre sí para completar los fundamentos de la Mecánica de Sólidos Deformables. Se plantean primero los principios básicos de la Elasticidad: la ley de Hooke y el principio de superposición, bases para la ley de Hooke generalizada. El Capítulo continúa considerando el comportamiento experimental de los materiales y cómo compatibilizar éste con las hipótesis de la elasticidad. Finalmente, se introducen en este contexto los conceptos de *tensión límite*, *tensión admisible* y *coeficiente de seguridad*.

2.2 Elasticidad y linealidad. Ley de Hooke

Todo cuerpo sólido se deforma bajo la acción de fuerzas aplicadas, y al cesar éstas, el cuerpo tiende a recuperar su forma primitiva. Esta tendencia que, en mayor o menor grado, tienen todos los sólidos se denomina *elasticidad*.

En realidad, los sólidos no son ni perfectamente elásticos ni perfectamente inelásticos. Las deformaciones que en ellos se producen constan de una parte de deformación elástica, que desaparece al cesar las fuerzas aplicadas, y una parte de deformación permanente, que se mantiene posteriormente. En un elevado número de sólidos, si las fuerzas no sobrepasan determinados valores, las deformaciones permanentes son muy pequeñas, y en consecuencia, dichos cuerpos pueden considerarse elásticos.

Consideremos un experimento sencillo: se monta una viga biapoyada como la de la Figura 2.1 y se mide el desplazamiento vertical δ de un cierto punto A de la misma

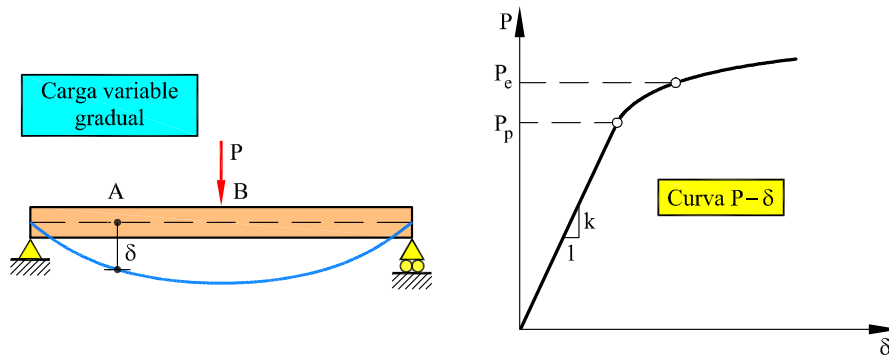


Fig. 2.1: Experimento y curva carga-desplazamiento

producido por una fuerza P aplicada en otro punto B de dicha viga. La fuerza P se aumenta de forma gradual hasta un cierto valor y se dibuja la curva $P - \delta$ obtenida. Si ahora descargamos la viga de forma gradual y dibujamos también la curva $P - \delta$ en descarga, observaremos que para valores máximos de P menores que cierto valor límite P_e , llamado *límite elástico*, las ramas de carga y descarga coinciden, no hay deformación permanente, y por lo tanto, el comportamiento es elástico. Si la carga P excede el límite elástico, la rama de descarga se separa de la de carga, se producen deformaciones permanentes y se dice que el comportamiento no es perfectamente elástico.

En el mismo experimento observaremos que existe otro valor límite P_p , menor que P_e (y, normalmente, próximo a éste), llamado *límite de proporcionalidad*, tal que para cargas menores que éste los desplazamientos son proporcionales a las fuerzas que los originan. Este enunciado define el comportamiento elástico lineal y se conoce como *ley de Hooke*, ya que fue establecido por Robert Hooke en 1678 en su trabajo “De Potentia Restitutiva (of Springs)”.

Matemáticamente, la ley de Hooke se expresa de la forma:

$$P = k \delta \quad (2.1)$$

donde k es la constante de proporcionalidad entre la fuerza aplicada P y el desplazamiento δ que ésta produce. Obviamente, esta constante depende de la geometría del problema y de las propiedades mecánicas del material de la viga.

2.3 Principio de superposición

Si se cumple la ley de Hooke y se supone que los desplazamientos producidos por las fuerzas actuantes son muy pequeños en relación a las dimensiones del cuerpo, de tal

manera que se pueda considerar que éste mantiene la forma y dimensiones originales, entonces puede aplicarse el Principio de Superposición o Principio de Linealidad. El Principio de Superposición establece que los efectos que un sistema de fuerzas aplicadas origina en un cuerpo son iguales a la suma de los efectos que originan esas mismas fuerzas actuando por separado.

Si sobre un cuerpo actúa un sistema formado por dos fuerzas P_1 y P_2 (Figura 2.2), el Principio de Superposición establece que el desplazamiento vertical δ de un punto C , será:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (2.2)$$

donde δ_1 y δ_2 son los valores que toma el correspondiente desplazamiento vertical cuando actúan P_1 y P_2 solas, respectivamente.

Si la ley de Hooke es aplicable, será:

$$P_1 = k_1 \delta_1 \quad P_2 = k_2 \delta_2 \quad (2.3)$$

y podremos escribir:

$$\delta = \frac{1}{k_1} P_1 + \frac{1}{k_2} P_2 \quad (2.4)$$

En virtud de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, resulta claro que el enunciado del Principio de Superposición es equivalente a establecer que “los efectos que un sistema de fuerzas aplicadas origina en un cuerpo son independientes del orden de aplicación de las fuerzas”.

Matemáticamente, el Principio de Superposición establece que la relación acción-respuesta es lineal, y tiene, por tanto, las propiedades de las funciones lineales.

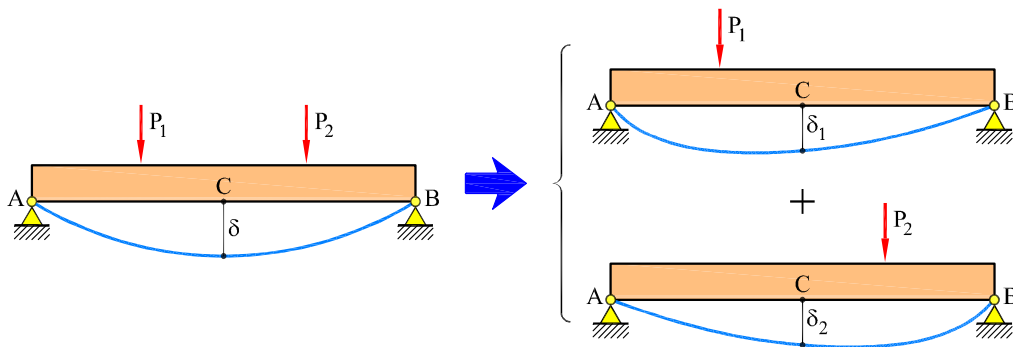


Fig. 2.2: Principio de superposición

2.4 Ley de Hooke generalizada

Aplicaremos en esta sección la ley de Hooke a la relación existente entre tensiones y deformaciones actuantes en un punto. Enunciada de esta forma, se le llama *ley de Hooke generalizada*, y los coeficientes de proporcionalidad que aparecen son constantes características del material, y no dependen de la geometría del cuerpo, ya que el estado tensional y de deformación son propios de un punto.

Asimismo, admitiremos en todos nuestros desarrollos que los cuerpos son mecánicamente isótropos, es decir, que sus propiedades mecánicas son iguales en todas las direcciones. Esta hipótesis de isotropía mecánica no se cumple exactamente en algunos materiales de construcción tales como la madera, que es fibrosa, ni en las rocas estratificadas, ni en materiales fabricados mediante un proceso de laminación, etc. A pesar de ello, los resultados que se obtienen con esta hipótesis son satisfactorios en la mayoría de los casos.

Consideremos un elemento diferencial de volumen sobre cuyas caras actúan las correspondientes componentes de tensión (Figura 2.3a). Para estudiar la deformación del elemento, se utiliza el principio de superposición, sumando las deformaciones producidas por las distintas componentes de tensión actuando por separado. En virtud de la hipótesis de isotropía mecánica, supondremos que estas deformaciones son independientes de la orientación de los ejes de referencia escogidos.

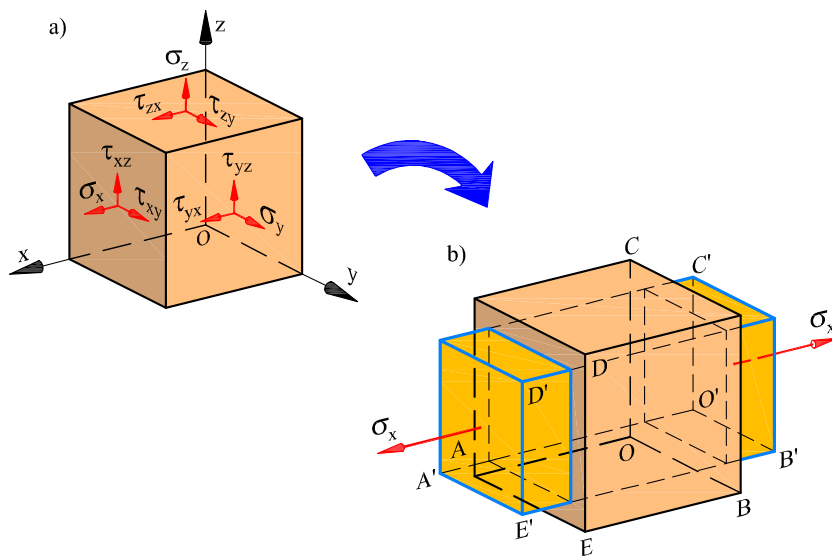


Fig. 2.3: Elemento diferencial de volumen y deformación bajo tensión normal

Supongamos primero que sobre el elemento diferencial sólo actúa la componente σ_x de tensión normal, sobre dos caras opuestas. Experimentalmente se comprueba que, en materiales isótropos, las tensiones normales no producen deformación angular y sólo originan deformaciones lineales según las aristas del paralelepípedo (Figura 2.3b). De acuerdo con la ley de Hooke generalizada, estas deformaciones lineales serán proporcionales a las tensiones σ_x que las producen, es decir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x_1} &= \frac{\overline{O'A'} - \overline{OA}}{\overline{OA}} = \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_{y_1} &= \frac{\overline{O'B'} - \overline{OB}}{\overline{OB}} = -\nu\varepsilon_{x_1} = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_{z_1} &= \frac{\overline{O'C'} - \overline{OC}}{\overline{OC}} = -\nu\varepsilon_{x_1} = -\nu\frac{\sigma_x}{E}\end{aligned}\quad (2.5)$$

donde E es el *módulo de elasticidad longitudinal* o *módulo de Young*, una propiedad del material que se determina experimentalmente. El módulo de elasticidad fue introducido por R. Young en 1803, aunque su definición moderna se debe a L. Navier (1826).

Es claro en las expresiones (2.5) que las dimensiones del módulo de elasticidad son de fuerza por unidad de superficie [FL^{-2}]. En la Tabla 9.1 figuran valores medios del módulo de elasticidad de algunos materiales utilizados en ingeniería civil y mecánica.

En las expresiones anteriores se observa que el alargamiento longitudinal unitario ε_{x_1} va acompañado de contracciones laterales unitarias $\varepsilon_{y_1}, \varepsilon_{z_1}$, proporcionales a ε_{x_1} , siendo ν un coeficiente de proporcionalidad adimensional llamado *coeficiente de Poisson* (S. D. Poisson, 1829) que es una constante física del material. En el acero el valor del coeficiente de Poisson ν es igual a 0,3 y en el hormigón vale entre 0,15 y 0,20.

De forma análoga, por isotropía, la actuación de la componente normal de tensión σ_y produce unas deformaciones longitudinales y transversales de valor:

$$\varepsilon_{y_2} = \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon_{z_2} = \varepsilon_{x_2} = -\nu\frac{\sigma_y}{E} \quad (2.6)$$

Material	E [GPa]	Material	E [GPa]
Acero	210	Hormigón	20
Cobre	120	Cinc	100
Latón	100	Duraluminio	70
Bronce	110	Aluminio	76
Granito	50	Fundición	170
Madera	10	Estaño	40

Tabla 2.1: Módulo de Young para diferentes materiales

y la actuación de la componente normal de tensión σ_z produce unas deformaciones:

$$\varepsilon_{z3} = \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_{y3} = \varepsilon_{x3} = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.7)$$

Aplicando el principio de superposición, la deformación lineal según el eje x debida a la acción conjunta de las tensiones normales $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ será $\varepsilon_x = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} + \varepsilon_{x3}$. Análogamente ocurrirá para las deformaciones lineales ε_y y ε_z . Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Consideremos ahora las deformaciones que las componentes tangenciales de la tensión producen en el paralelepípedo elemental. Experimentalmente se comprueba que, en un material mecánicamente isótropo, la actuación de cada uno de los pares de tensiones tangenciales recíprocos (esto es, τ_{xy} y τ_{yx} , τ_{yz} y τ_{zy} , τ_{zx} y τ_{zx}) produce una deformación angular (γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} , respectivamente) que transforma dicho paralelepípedo recto en uno oblicuo (Figura 2.4).

Según la ley de Hooke generalizada, las distorsiones producidas serán proporcionales

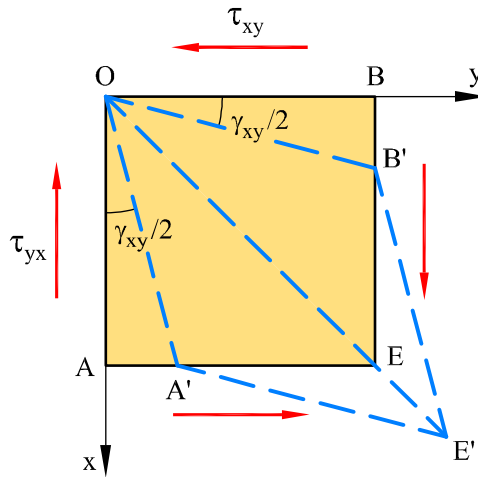


Fig. 2.4: Deformación bajo tensión tangencial

a la tensión tangencial actuante:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}\tag{2.9}$$

donde G es una constante física del material que se llama *módulo de elasticidad transversal* o *módulo de rigidez a cortante* y tiene dimensiones $[FL^{-2}]$.

Las ecuaciones (2.8) y (2.9) constituyen la expresión analítica de la ley de Hooke generalizada para un material isótropo. Estas ecuaciones pueden invertirse para obtener las componentes del estado de tensiones en función del estado de deformaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \varepsilon_{vol} + 2\mu \varepsilon_x & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon_{vol} + 2\mu \varepsilon_y & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda \varepsilon_{vol} + 2\mu \varepsilon_z & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}\end{aligned}\tag{2.10}$$

donde $\varepsilon_{vol} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ es la deformación volumétrica y λ y μ son los coeficientes de Lamé, definidos por las siguientes expresiones:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{2.11}$$

Módulos de rigidez a cortante y volumétrico

Se puede demostrar que:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu\tag{2.12}$$

Por tanto, un material elástico isótropo viene caracterizado por cualquiera de los pares de constantes físicas (E, ν) , (E, G) ó (λ, μ) .

Por intuición física y razones termodinámicas, el módulo de rigidez a cortante debe ser positivo; por lo tanto, debe ser $\nu \geq -1, 0$. Sin embargo, no se han medido coeficientes de Poisson negativos en ningún material. El valor mínimo de ν medido experimentalmente es el del berilio ($\nu = 0,01 \div 0,05$).

Para obtener la deformación volumétrica en función de las tensiones actuantes, se suman las igualdades (2.8) de la ley de Hooke generalizada, es decir:

$$\varepsilon_{vol} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\tag{2.13}$$

Si el estado tensional es un estado de presión hidrostática, en el que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$, entonces el valor de la deformación volumétrica es igual a:

$$\varepsilon_{vol} = 3 \frac{(1 - 2\nu)}{E} p = \frac{p}{K} \quad (2.14)$$

donde

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.15)$$

es una constante física del material que se llama *módulo de elasticidad volumétrico*, y tiene dimensiones $[FL^{-2}]$.

Por intuición física y razones termodinámicas, el módulo de elasticidad volumétrico debe ser positivo, lo cual implica que $\nu \leq 1/2$. Es decir, que en cualquier material isótropo el coeficiente de Poisson debe ser necesariamente inferior a 0,5, que corresponde al límite de comportamiento incompresible ($K = \infty$).

Efectos térmicos

Los sólidos experimentan cambios en su tamaño y forma cuando están sometidos a cambios de temperatura. Si se somete una barra sin restricciones a un cambio de temperatura, se observa que la deformación térmica unitaria ε_T es aproximadamente una función lineal de la temperatura (Figura 2.5).

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T \quad (2.16)$$

donde α se denomina *coeficiente de dilatación térmica* del material.

El alargamiento que sufre la pieza al producirse un incremento de temperatura es igual a:

$$\Delta L = \varepsilon_T L = \alpha \Delta T L \quad (2.17)$$

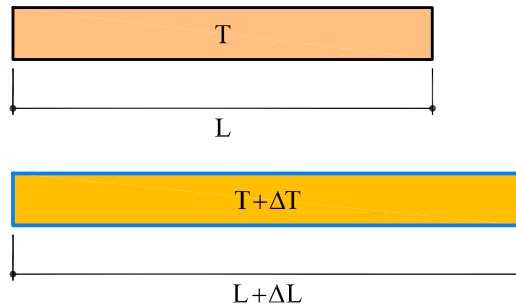


Fig. 2.5: Alargamiento de una pieza por variación de la temperatura

Las deformaciones unitarias que resultan de los efectos térmicos se consideran independientes de las que sufra la pieza debidas a otros esfuerzos de tipo mecánico durante o después del cambio de temperatura. Al ser independientes puede aplicarse el principio de superposición, y por tanto, incorporando las deformaciones que produce una variación de temperatura a las expresiones de la ley de Hooke (2.8) y (2.9), se obtiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha \Delta T & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) + \alpha \Delta T & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha \Delta T & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}\quad (2.18)$$

En los sólidos isótropos sin restricciones cinemáticas la deformación térmica produce variaciones de longitud (de volumen, de hecho) pero no distorsiones angulares.

Ejemplo 2.4.1

Un bloque de hormigón de forma cúbica de dimensiones $100 \times 100 \times 100 \text{ mm}^3$ está sometido a la acción de una tensión de compresión $\sigma_z = 20 \text{ MPa}$. El cuerpo tiene impedidos los movimientos en las direcciones x, y (Figura 2.6). Aplicando la ley de Hooke generalizada, se pide calcular: (a) el valor de las tensiones según las direcciones x, y y (b) el alargamiento del bloque en la dirección z .

Datos: $E = 20 \text{ GPa}$ y $\nu = 0,20$.

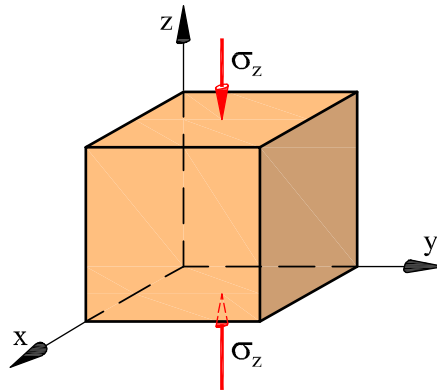


Fig. 2.6: Bloque de hormigón del Ejemplo 2.4.1

Si los movimientos en las direcciones x, y están impedidos, los alargamientos unitarios en dichas direcciones son nulos: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$. Aplicando la ley de Hooke generalizada se tiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - 0,2(\sigma_y - 20)}{E} = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - 0,2(-20 + \sigma_x)}{E} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{-20 - 0,2(\sigma_x + \sigma_y)}{E}\end{aligned}$$

De la primera y segunda ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_x - 0,2\sigma_y &= -4 \text{ MPa} \\ \sigma_y - 0,2\sigma_x &= -4 \text{ MPa}\end{aligned}$$

de donde se deduce que el valor de las tensiones σ_x y σ_y es idéntico e igual a:

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{4}{0,8} = -5 \text{ MPa}$$

De la tercera ecuación se obtiene el acortamiento unitario en la dirección z :

$$\varepsilon_z = \frac{[-20 - 0,2(-10)] 10^6}{20 \cdot 10^9} = -0,9 \cdot 10^{-3}$$

y el acortamiento del bloque de hormigón en dicha dirección z es igual a:

$$\Delta L_z = L_z \varepsilon_z = 100 (-0,9 \cdot 10^{-3}) = -9 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

Ejemplo 2.4.2

La placa rectangular de la Figura 2.7 está sometida a las tensiones de tracción $\sigma_x = 120 \text{ MPa}$ y $\sigma_y = 60 \text{ MPa}$. Suponiendo un estado de tensiones plano, calcular: (a) el alargamiento que sufre en las direcciones x, y , (b) la variación que sufre el espesor $e = 20 \text{ mm}$; (c) la variación de volumen ΔV y (d) comprobar que $\frac{\Delta V}{V} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$. Datos: $E = 72 \text{ GPa}$ y $\nu = 0,30$.

Aplicando las Ecs. (2.8) con $\sigma_z = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{(120 - 0,3 \cdot 60) 10^6}{72 \cdot 10^9} = 1,417 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_y &= \frac{(60 - 0,3 \cdot 120) 10^6}{72 \cdot 10^9} = 0,333 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

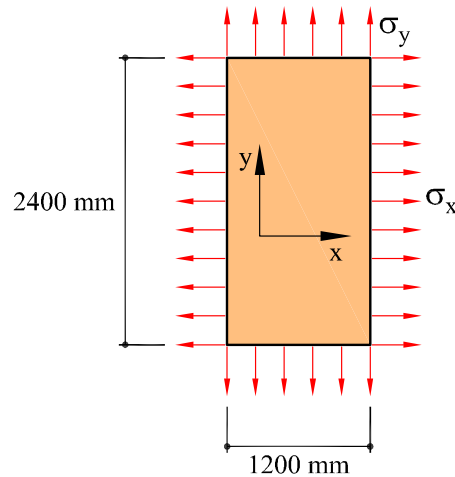


Fig. 2.7: Placa rectangular del Ejemplo 2.4.2, bajo un estado plano de tensiones

- (a) El alargamiento que sufre la placa en las direcciones x, y es:

$$\Delta L_x = 1200 \cdot 1,417 \cdot 10^{-3} = 1,70 \text{ mm}$$

$$\Delta L_y = 2400 \cdot 0,333 \cdot 10^{-3} = 0,80 \text{ mm}$$

- (b) El acortamiento que sufre la placa en la dirección z es:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = -\frac{0,3(120 + 60)10^6}{72 \cdot 10^9} = -0,75 \cdot 10^{-3}$$

Por tanto, el espesor de la placa disminuye en:

$$\Delta e = 20(-0,75 \cdot 10^{-3}) = -1,5 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

- (c) El volumen inicial de la placa es:

$$V = 1200 \cdot 2400 \cdot 20 = 57,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

y teniendo en cuenta los alargamientos que sufre, el volumen final es:

$$V_f = 1201,7 \cdot 2400,8 \cdot 19,985 = 57,6576 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

por tanto, la variación de volumen de la placa es:

$$\Delta V = V_f - V = 0,0576 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

- (d) La variación unitaria de volumen es igual a:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{0,0576 \cdot 10^6}{57,6 \cdot 10^6} = 1 \cdot 10^{-3}$$

La suma de los alargamientos unitarios es igual a:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (1,417 + 0,333 - 0,75) 10^{-3} = 1 \cdot 10^{-3}$$

con lo que se comprueba que el incremento unitario de volumen es igual a la *deformación volumétrica*:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{vol}$$

Ejemplo 2.4.3

La barra de acero de la Figura 2.8 está sometida a la acción de una fuerza axial P . Bajo la misma, las dimensiones transversales disminuyen a 49,982 mm. Suponiendo que las tensiones σ_y y σ_z son despreciables o nulas, calcular: (a) el alargamiento longitudinal de la barra ΔL_x y (b) el valor de la carga P .

Datos: $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $E = 200$ GPa y $\nu = 0,30$.

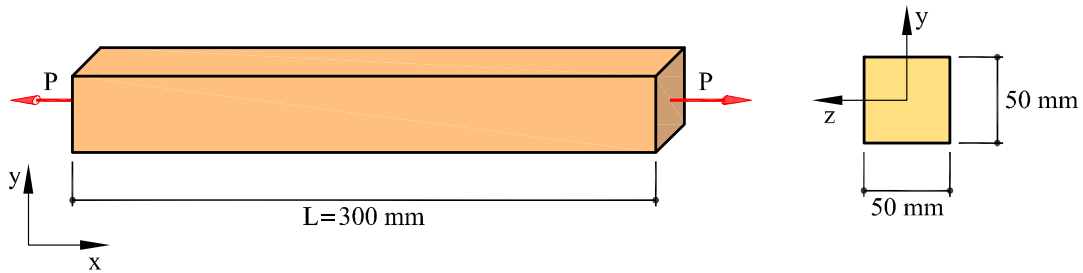


Fig. 2.8: Barra de acero del Ejemplo 2.4.3

(a) La variación de las dimensiones transversales de la barra es:

$$\Delta L_y = \Delta L_z = 50 - 49,982 = -1,8 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

y el acortamiento unitario en las direcciones x, y es:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{-1,8 \cdot 10^{-2}}{50} = -3,6 \cdot 10^{-4}$$

Aplicando la ley de Hooke generalizada y teniendo en cuenta que $\sigma_y = \sigma_z = 0$, se tiene:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -3,6 \cdot 10^{-4}$$

de donde:

$$\sigma_x = \frac{3,6 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \cdot 10^9}{0,3} = 240 \text{ MPa}$$

y el alargamiento unitario en dirección x resulta:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{240 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9} = 1,2 \cdot 10^{-3}$$

por tanto, el alargamiento que sufre la barra en dirección x es igual a:

$$\Delta L_x = \varepsilon_x L_x = 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 300 = 0,36 \text{ mm}$$

(b) Si se tiene en cuenta que el área de la sección transversal de la barra es igual a $A = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$, la carga que solicita la pieza puede calcularse a partir de la expresión:

$$P = \sigma_x A = 240 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 600 \text{ kN}$$

Ejemplo 2.4.4

Resolver el Ejemplo 2.4.3 considerando igual disminución de las dimensiones transversales y suponiendo que durante el ensayo se produce un descenso de temperatura de $\Delta T = -15^\circ \text{C}$. El coeficiente de dilatación del acero es $\alpha = 1 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Dado que las disminuciones ΔL_y y ΔL_z son iguales a las del Ejemplo anterior, las correspondientes deformaciones también los son: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -3,6 \cdot 10^{-4}$. Aplicando la ley de Hooke generalizada, teniendo en cuenta la variación de temperatura, se tiene:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T = -3,6 \cdot 10^{-4}$$

Teniendo en cuenta que $\alpha \Delta T = -1,5 \cdot 10^{-4}$, resulta:

$$-\frac{\nu\sigma_x}{E} = (-3,6 + 1,5) \cdot 10^{-4} = -2,1 \cdot 10^{-4}$$

de donde la tensión σ_x es igual a:

$$\sigma_x = \frac{2,1 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \cdot 10^9}{0,3} = 140 \text{ MPa}$$

El alargamiento unitario en dirección x es:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha\Delta T = \frac{140 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9} + (-1,5 \cdot 10^{-4}) = 5,5 \cdot 10^{-4}$$

Por tanto, el alargamiento que sufre la pieza en dirección x es igual a:

$$\Delta L_x = \varepsilon_x L_x = 5,5 \cdot 10^{-4} \cdot 300 = 0,165 \text{ mm}$$

El área de la sección transversal de la barra es $A = 25 \text{ cm}^2$, y la carga que solicita la pieza en este caso es:

$$P = \sigma_x A = 140 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 350 \text{ kN}$$

Ejemplo 2.4.5

Un bloque de neopreno se somete a un ensayo para determinar el módulo de rigidez a cortante del material G . Para ello se fija el bloque a una mesa de ensayo y a una placa rígida tal como muestra la Figura 2.9. Se aplica una carga $P = 100 \text{ kN}$ como se indica y el desplazamiento horizontal que se produce es $\delta = 1 \text{ mm}$. Con estos datos se pide: (a) calcular el valor del módulo de rigidez a cortante G y (b) establecer una relación general entre las magnitudes G, h, a, b, P y δ .

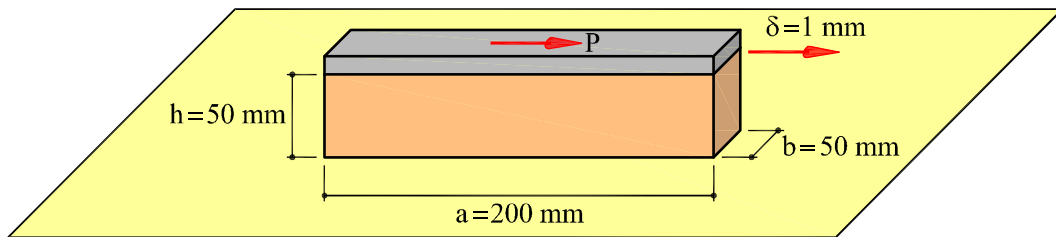


Fig. 2.9: Ensayo del bloque de neopreno del Ejemplo 2.4.5

(a) La distorsión o deformación angular del bloque de neopreno es igual a:

$$\gamma = \frac{\delta}{h} = \frac{0,1}{5} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

La tensión tangencial puede calcularse mediante la expresión:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{100 \cdot 10^3}{(20 \cdot 5) 10^{-4}} = 10 \text{ MPa}$$

De acuerdo a la ley de Hooke generalizada, el módulo de rigidez a cortante es igual a:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{10}{2 \cdot 10^{-2}} = 500 \text{ MPa}$$

(b) Una relación general entre las magnitudes G, h, a, b, P y δ , puede ser:

$$\frac{\delta}{h} = \frac{P}{Gab}$$

2.4.1 Estado plano de tensiones

Se dice que una estructura está sometida a un estado plano de tensiones (Sección 1.6) cuando una de las dimensiones de la estructura (z) es mucho menor que las otras dos (x, y) que definen el plano de análisis. Además, las cargas que solicitan la estructura están contenidas en dicho plano (x, y) (Figura 2.10).

En la Figura 2.11 se muestran dos ejemplos de estructuras bajo estado de tensión plana: (a) una placa cargada en su plano medio y (b) una viga gran canto cargada según muestra en la figura.

Al considerar el problema bidimensional, las ecuaciones que relacionan tensiones con deformaciones (ley de Hooke generalizada) obtenidas para el caso general tridimensional se reducen. En un estado plano de tensiones, con:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

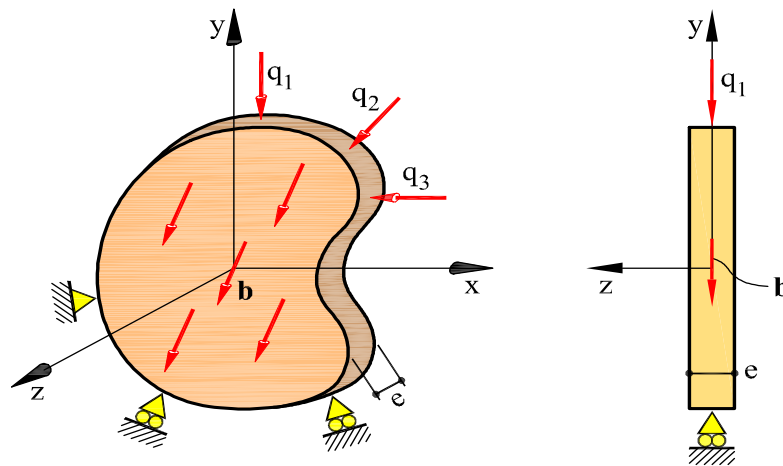


Fig. 2.10: Estado plano de tensiones

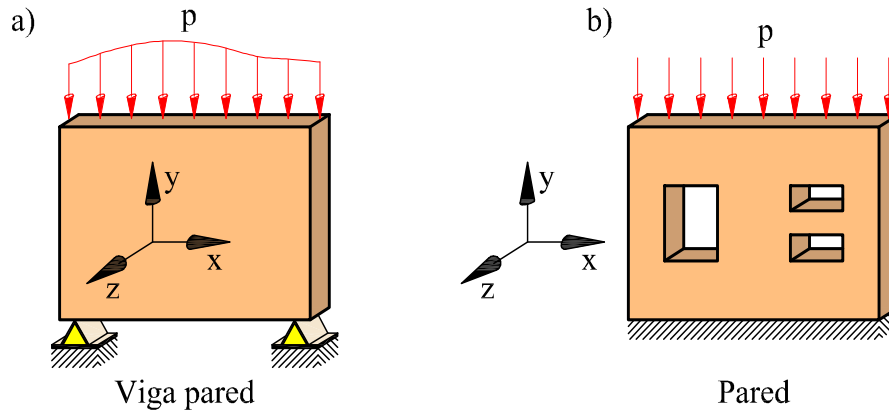


Fig. 2.11: Estructuras bajo tensión plana: (a) viga de gran canto y (b) pared

La ley de Hooke generalizada (Ecs. (2.8) y (2.9)) se puede escribir, para un material isótropo:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) & \gamma_{xz} &= 0 \\
 \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) & \gamma_{yz} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

De igual manera que en el problema tridimensional (Ecs. (2.10) y (2.11)), para un problema bidimensional estas ecuaciones pueden invertirse para obtener las componentes del estado de tensiones en función del estado de deformaciones:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x - \nu \varepsilon_y) & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y - \nu \varepsilon_x) & \tau_{xz} &= 0 \\
 \sigma_z &= 0 & \tau_{yz} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.4.2 Estado plano de deformaciones

Una estructura está sometida a un estado plano de deformaciones (Sección 1.9) cuando una de sus dimensiones (z) es mucho mayor que las restantes (x, y) y está sometida a cargas perpendiculares al eje de la dimensión mayor (Figura 2.12). En estas condiciones se tiene:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Algunos ejemplos de estado de deformación plana se muestran en la Figura 2.13: (a) muro de contención cargado según se muestra y (b) tubería sometida a presión interna o externa.

La ley de Hooke generalizada (Ecs. (2.8) y (2.9)), en este caso, se reduce a las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] = 0 & \gamma_{yz} &= 0\end{aligned}\quad (2.21)$$

de donde:

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

y sustituyendo en las expresiones (2.21) se obtiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left[\sigma_x - \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \right) \sigma_y \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left[\sigma_y - \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \right) \sigma_x \right]\end{aligned}\quad (2.22)$$

Si llamamos $\tilde{E} = E / (1 - \nu^2)$ y $\tilde{\nu} = \nu / (1 - \nu)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{\tilde{E}} [\sigma_x - \tilde{\nu} \sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{\tilde{E}} [\sigma_y - \tilde{\nu} \sigma_x]\end{aligned}\quad (2.23)$$

Invirtiendo las expresiones (2.23) se obtienen las expresiones que permiten obtener el estado de tensiones en función de las deformaciones en un estado plano de deformaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2} (\varepsilon_x - \tilde{\nu} \varepsilon_y) & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2} (\varepsilon_y - \tilde{\nu} \varepsilon_x) & \tau_{xz} &= 0 \\ \sigma_z &= \nu (\varepsilon_x + \varepsilon_y) & \tau_{yz} &= 0\end{aligned}\quad (2.24)$$

Obsérvese que las Ecs. (2.23) y (2.24) son respectivamente análogas a las Ecs. (2.20) y (2.21), sustituyendo E y ν por \tilde{E} y $\tilde{\nu}$.

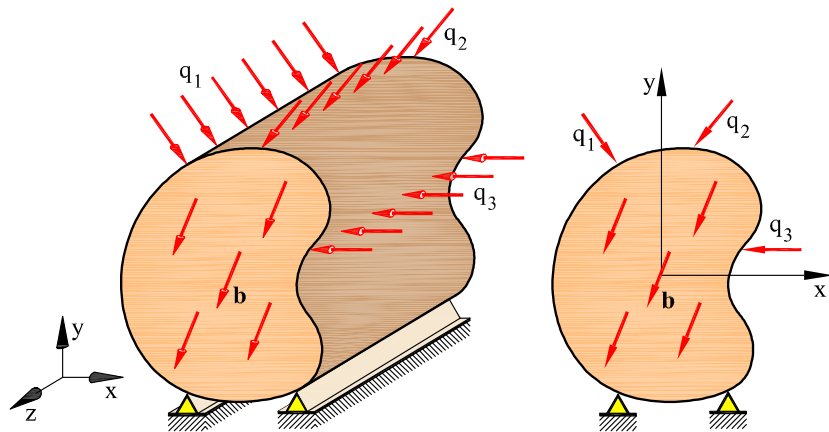


Fig. 2.12: Estado plano de deformaciones

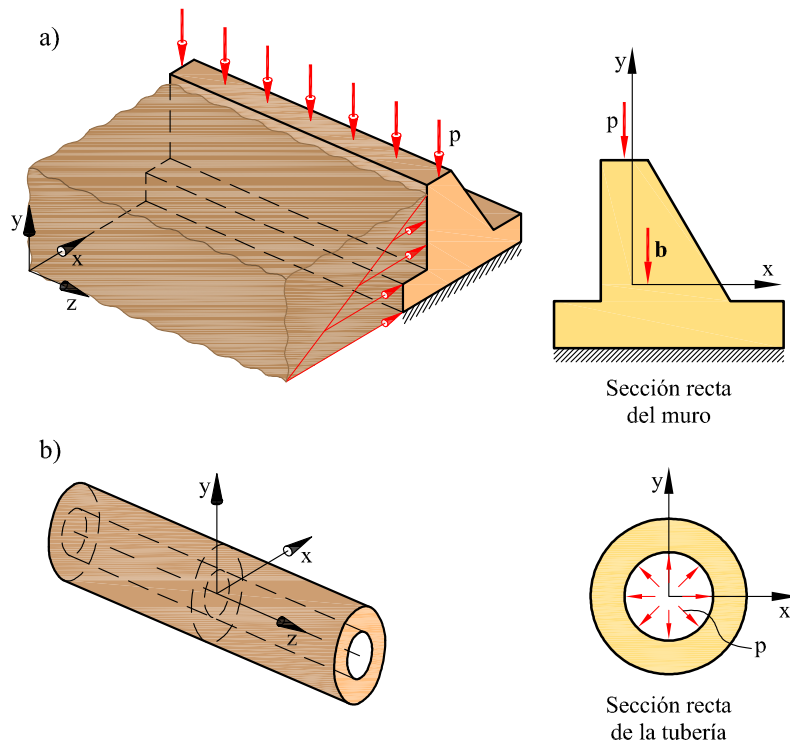


Fig. 2.13: Ejemplos de estado plano de deformaciones: (a) muro de contención y (b) tubería bajo presión interna o externa

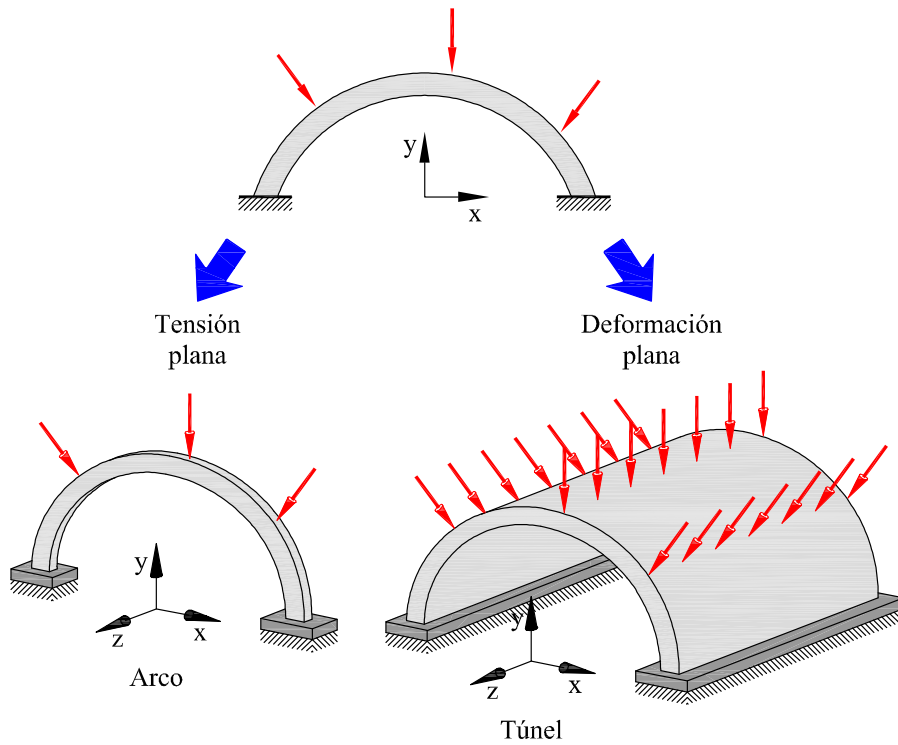


Fig. 2.14: Diferencia entre estado de tensión plana y estado de deformación plana

De la comparación de las expresiones obtenidas para los estados de tensión y deformación plana se observa que ambos son muy similares una vez la atención se centra sobre el plano de análisis (el plano xy en la descripción anterior). Sin embargo, hay que resaltar que fuera de dicho plano (a lo largo del eje z) la realidad es muy diferente en ambos casos, tal y como se ilustra en la Figura 2.14.

2.5 Relación tensión-deformación. Estudio experimental

La relación real entre tensión y deformación de un material se determina de forma experimental mediante ensayos en laboratorio. Los ensayos más simples de realizar son los de tracción o de compresión pura sobre probetas cilíndricas o prismáticas normalizadas.

Estos ensayos se realizan aplicando en los extremos de la probeta una fuerza P en dirección del eje de la misma (Figura 2.15). Llamando A al área inicial de la sección transversal de la probeta, se define como *tensión nominal* (media) a la relación:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2.25)$$

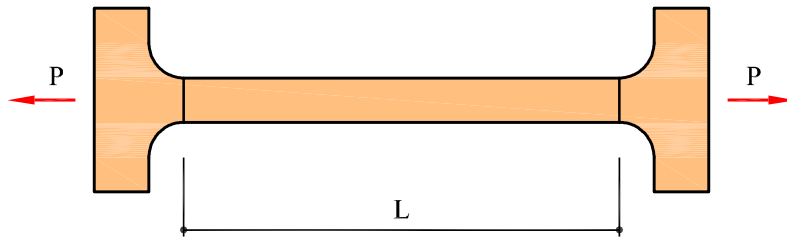


Fig. 2.15: Probeta para ensayo de tracción uniaxial

Por otro lado, llamando L a la longitud calibrada de la probeta y ΔL al alargamiento de ésta producida por la fuerza axial, se define como *deformación axial nominal* a la relación:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.26)$$

Si en el ensayo se mide también la variación Δd de una de las dimensiones transversales de la probeta, de longitud inicial d , se puede calcular la *deformación transversal nominal* como:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d} \quad (2.27)$$

El ensayo se realiza aumentando progresivamente la fuerza P aplicada de forma lenta y gradual y midiendo los alargamientos axiales ΔL y los acortamientos transversales Δd correspondientes a cada nivel de carga. A partir de los conjuntos de valores $(P, \Delta L, \Delta d)$ obtenidos, se calculan los correspondientes conjuntos de valores de tensión y deformación nominales $(\sigma, \varepsilon, \varepsilon_t)$. Los pares (σ, ε) se representan en una curva que se denomina curva de tensión-deformación del material (Figura 2.16).

Aunque el comportamiento de cada material es diferente, en la curva tensión-deformación se distinguen, en general, las zonas y tensiones límite siguientes:

- *Tramo proporcional (OA)*. En este tramo inicial se cumple la ley de Hooke, es decir, la relación entre tensión y deformación es lineal para tensiones inferiores al valor σ_p que se llama *límite de proporcionalidad*. La pendiente del tramo determina el valor del módulo de elasticidad o de Young (E) del material. El coeficiente de Poisson puede calcularse como la relación entre la deformación transversal y la longitudinal, $\nu = -\varepsilon_t/\varepsilon$.
- *Tramo elástico (OB)*. En este tramo la descarga se produce de forma elástica, es decir, sin que aparezcan deformaciones permanentes al disminuir la carga hasta anularla. Se llama *límite elástico* (σ_e) a la máxima tensión que se puede alcanzar

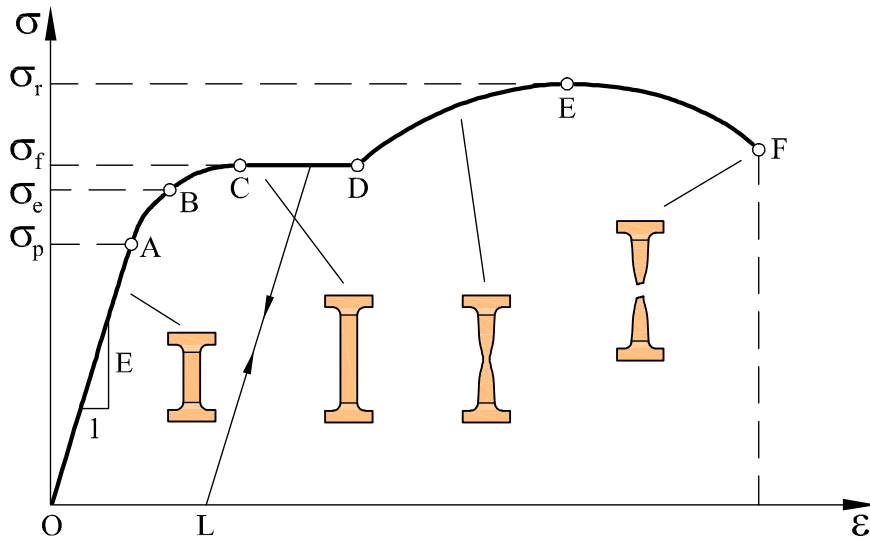


Fig. 2.16: Curva tensión-deformación uniaxial

sin que se produzcan deformaciones permanentes, también llamadas inelásticas o plásticas. El tramo AB , de comportamiento elástico *no lineal*, puede ser más o menos observable dependiendo del material.

- *Tramo plástico (BD)*. En este tramo se observa deformación permanente al descargar la probeta, por ejemplo la marcada OL en el diagrama. Se llama *límite de fluencia* (σ_f) a la tensión a partir de la cual el material se deforma casi sin aumento de la tensión.
- *Tramo de fluencia (CD)*. En este tramo la deformación aumenta sin que se produzca un aumento apreciable de la tensión. Hasta llegar al punto D la deformación longitudinal y las deformaciones transversales son sensiblemente uniformes a lo largo de la longitud útil de la probeta.
- *Tramo de endurecimiento por deformación (DE)*. A partir de un determinado valor de la deformación, la tensión necesaria para seguir aumentando la deformación plástica se incrementa. A este fenómeno se le llama *endurecimiento por deformación* y suele venir acompañado por la pérdida del estado uniforme de deformaciones y el inicio de la localización de éstas en la zona media de la probeta.
- *Tramo de estricción (EF)*. En este tramo la sección de una parte de la probeta comienza a disminuir de forma apreciable. Este fenómeno de localización de las

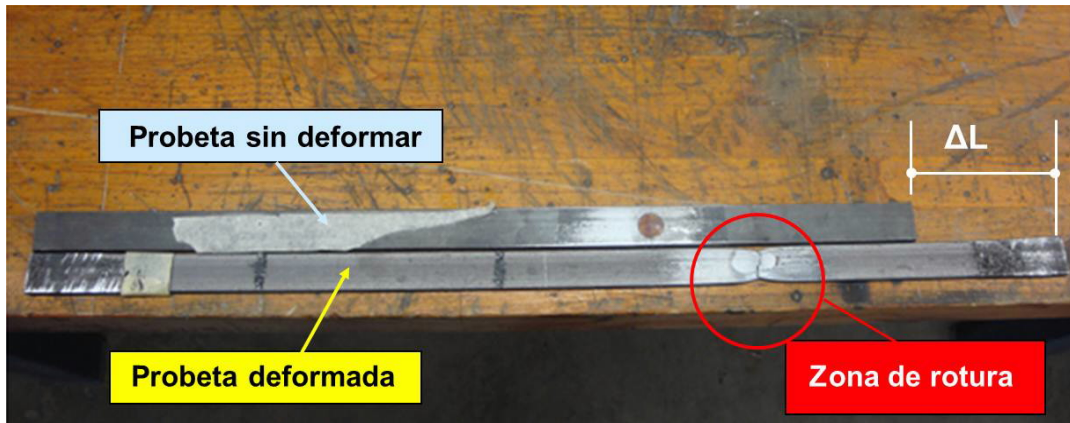


Fig. 2.17: Barra de acero sin deformar y deformada después de un ensayo a tracción

deformaciones longitudinales y transversales, con pérdida del estado uniforme anterior, se denomina *estricción* (Figura 2.17). La aparente pérdida de tensión en este tramo se debe a la definición nominal de la tensión, que está calculada sobre el área inicial de la probeta, en lugar de calcularla sobre el área real en cada momento, y que es menor debido a la estricción. Se denomina *tensión de rotura* (σ_r) a la máxima tensión medida en el ensayo.

El tipo de curva tensión-deformación descrito corresponde a los materiales llamados *dúctiles*, como por ejemplo el acero o el cobre, que presentan un marcado comportamiento plástico y alcanzan la rotura con un nivel elevado de deformación. Así,

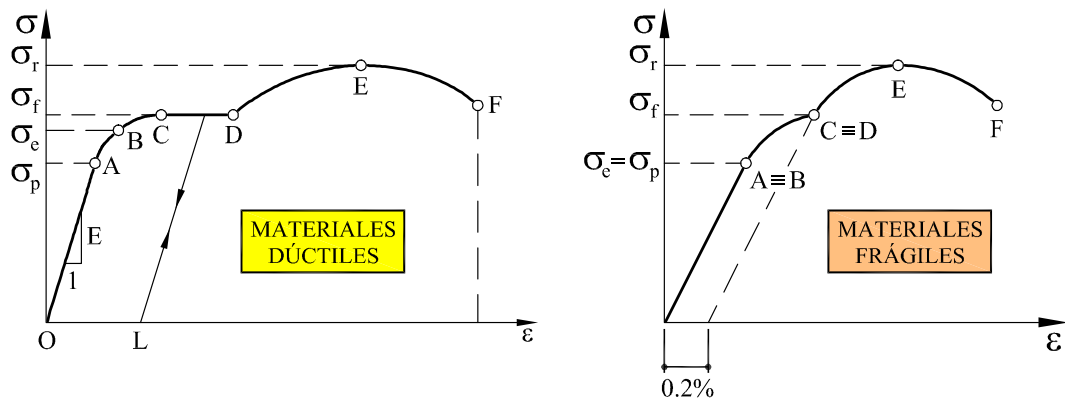


Fig. 2.18: Curvas tensión-deformación para materiales: a) dúctiles y b) frágiles

para estos materiales, $\varepsilon_D \simeq 20 \varepsilon_A$ y $\varepsilon_F \simeq 200 \varepsilon_A$, y los tramos descritos son fácilmente identificables.

En otros materiales como, por ejemplo, la fundición, el hormigón o el vidrio, llamados *frágiles*, no se presenta una zona de fluencia plástica bien definida. En estos materiales se toma convencionalmente como tensión de fluencia, σ_f , la correspondiente a una deformación permanente de 0,2 % (Figura 2.18). Estos materiales rompen con poca deformación ($\varepsilon_F \simeq 5 \varepsilon_A$), bruscamente, circunstancia peligrosa para la seguridad de las estructuras. No obstante lo dicho, no es del todo riguroso calificar a un material concreto como dúctil o frágil, ya que el comportamiento mecánico depende en gran medida de las condiciones de carga. Así, un acero dúctil en condiciones “normales” puede mostrar un comportamiento marcadamente frágil a bajas temperaturas o a altas velocidades de carga. Por otra parte, el hierro fundido o el vidrio muestran un comportamiento dúctil a altas temperaturas.

Debe señalarse también que muchos materiales frágiles exhiben resistencias muy diferentes según estén solicitados a tracción o a compresión. Así por ejemplo, el hormigón y la mayoría de las rocas naturales tienen un comportamiento muy frágil a tracción con una resistencia relativamente baja. Por otro lado, su comportamiento a compresión es mucho más dúctil, aunque sin mostrar una zona clara de fluencia, y su resistencia a compresión es mucho mayor que a tracción, del orden de 10 veces mayor, tal como se muestra en la Figura 2.19.

Los aceros de construcción, en cambio, tienen un comportamiento parecido en tracción y en compresión (para piezas poco esbeltas), y con marcados tramos de fluencia

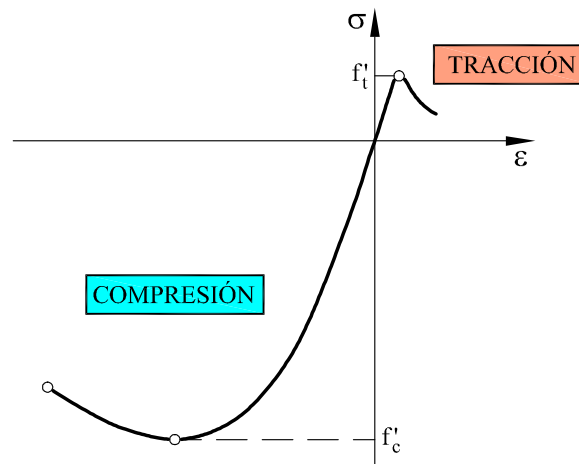


Fig. 2.19: Curva tensión-deformación para el hormigón

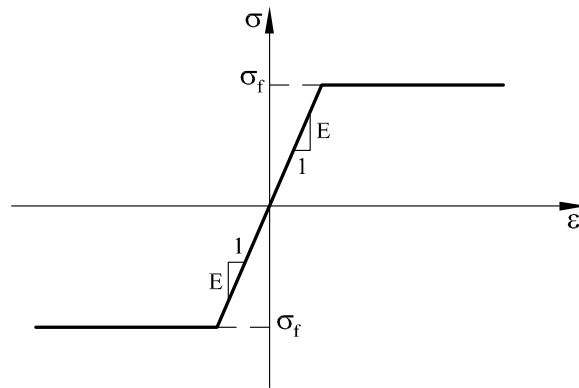


Fig. 2.20: Curva tensión-deformación idealizada para el acero de construcción

en ambos casos. Para estos materiales la curva tensión-deformación se suele representar mediante diagramas trilineales (Figura 2.20), en los que sólo se consideran los tramos proporcionales y los tramos de fluencia. Otros tipos de aleación de acero, por su parte, apenas muestran un tramo horizontal de fluencia, pero tienen una zona clara de endurecimiento por deformación, habitualmente lineal.

Ejemplo 2.5.1

La barra de la Figura 2.21, con un diámetro de 12 mm y longitud de 60 mm, se somete a un ensayo de tracción hasta la rotura. Partiendo de las medidas obtenidas en el ensayo, calcular: a) el límite de proporcionalidad σ_p , b) el módulo de elasticidad o de Young y c) la tensión de rotura σ_r .

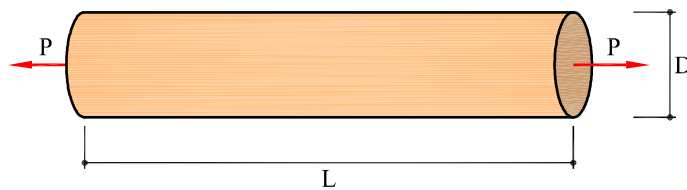


Fig. 2.21: Barra del Ejemplo 2.5.1

A partir de las mediciones del ensayo se calculan las tensiones y deformaciones:

<i>Cargas y alargamientos en el ensayo de tracción</i>										
P [kN]	0	6	12	18	24	30	36	42	48	57 (aprox)
$\Delta L \cdot 10^{-3}$ [mm]	0	12	24	36	48	60	98	144	240	rotura

<i>Tensiones y deformaciones en el ensayo de tracción</i>									
σ [MPa]	0	53	106	159	212	265	318	371	424
$\varepsilon \cdot 10^{-6}$	0	200	400	600	800	1000	1630	2400	4000

teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \text{Área inicial de la barra } A &= \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 12^2}{4} = 113 \text{ mm}^2 \\ \text{Tensión nominal } \sigma &= \frac{P}{A} \\ \text{Deformación axial nominal } \varepsilon &= \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \end{aligned}$$

En la curva tensión-deformación correspondiente (Figura 2.22) puede verse que el límite de proporcionalidad corresponde a la tensión $\sigma_p = 265$ MPa. La deformación unitaria que se produce al alcanzar dicho límite de proporcionalidad es igual a $\varepsilon = 10^{-3}$.

El módulo de elasticidad o módulo de Young es la pendiente de la recta que representa el comportamiento elástico proporcional:

$$E = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon} = \frac{265}{10^{-3}} = 265 \text{ GPa}$$

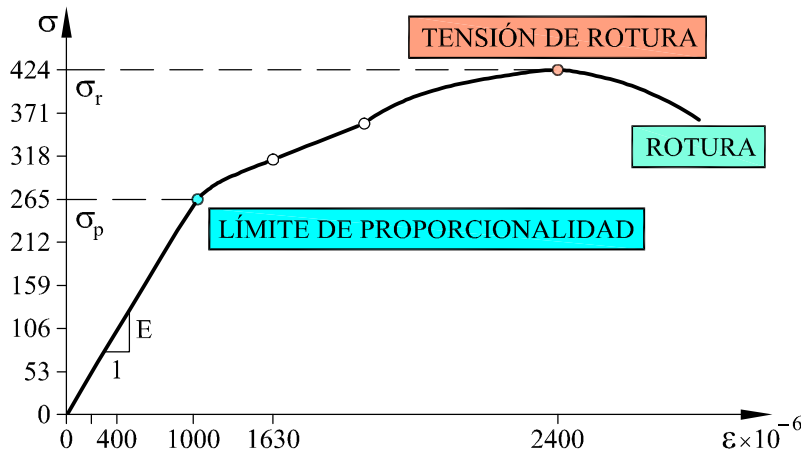


Fig. 2.22: Curva tensión-deformación de la barra ensayada

La tensión de rotura σ_r es la máxima tensión medida en el ensayo, en este caso corresponde a $\sigma_r = 424$ MPa. El tipo de diagrama tensión-deformación obtenido indica que el material ensayado es un *material dúctil*.

Ejemplo 2.5.2

En el límite de proporcionalidad la barra de la Figura 2.23 se alarga 0,34 mm y la dimensión transversal $h = 18$ mm disminuye en $7 \cdot 10^{-3}$ mm. Si la carga correspondiente es 32 kN, calcular: a) el límite de proporcionalidad σ_p , b) el módulo de elasticidad y c) el coeficiente de Poisson.

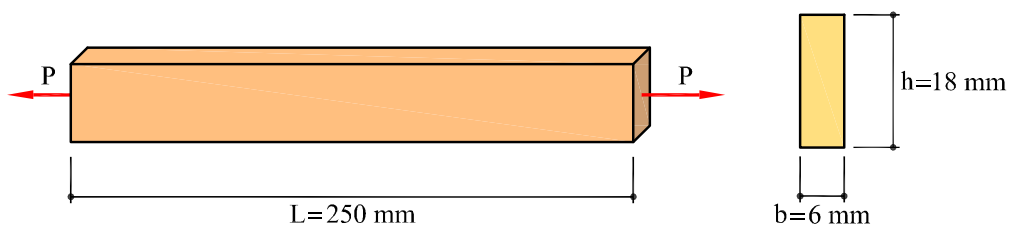


Fig. 2.23: Barra del Ejemplo 2.5.2

La carga en el límite de proporcionalidad es $P_p = 32$ kN, y al área de la sección transversal de la barra es: $A = 6 \cdot 18 = 108$ mm², luego el límite de proporcionalidad resulta:

$$\sigma_p = \frac{P_p}{A} = \frac{32 \cdot 10^3}{108} = 296 \text{ MPa}$$

La deformación axial nominal es:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0,36}{250} = 1,36 \cdot 10^{-3}$$

Por tanto, el módulo de elasticidad o de Young es:

$$E = \frac{\sigma_p}{\varepsilon} = \frac{296 \cdot 10^6}{1,36 \cdot 10^{-3}} = 217 \text{ GPa}$$

La variación de la dimensión transversal h es $\Delta h = -7,1 \cdot 10^{-3}$, luego, la deformación transversal nominal es:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta h}{h} = \frac{-7,1 \cdot 10^{-3}}{18} = -0,394 \cdot 10^{-3}$$

Por definición, el coeficiente de Poisson es igual a:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} = -\frac{-0,394 \cdot 10^{-3}}{1,36 \cdot 10^{-3}} = 0,289$$

2.6 Tensión límite, tensión admisible y coeficiente de seguridad

A lo largo de su vida útil, las estructuras se ven sometidas a acciones y cargas permanentes, variables o excepcionales que pueden producir fallos estructurales totales o parciales.

El requisito de seguridad exigible a las estructuras que se proyectan y se construyen conlleva la definición de un valor superior de la tensión que el material puede alcanzar sin que exista riesgo de que se produzca un fallo estructural. Así, se define *tensión límite*, σ_{lim} , como aquel valor de la tensión al cual el material alcanza su límite de resistencia, y por debajo del cual no se producen ni deformaciones excesivas ni, por supuesto, la rotura del mismo. En los materiales dúctiles, tales como el acero, es habitual considerar como tensión límite la tensión de fluencia ($\sigma_{\text{lim}} = \sigma_f$), mientras que en los materiales frágiles, como el hormigón, se suele considerar como tensión límite la tensión de rotura ($\sigma_{\text{lim}} = \sigma_r$).

Sin embargo, en la práctica, las estructuras se diseñan para trabajar a niveles de tensión significativamente por debajo de la tensión límite de los correspondientes materiales estructurales. Los motivos para esta práctica son varios, y fundamentalmente debidos a la existencia de incertidumbres que el proyectista debe contemplar en la fase de diseño:

- *incertidumbres asociadas a la caracterización de las propiedades mecánicas de los materiales*, debidas a la calidad y homogeneidad del material, a la dispersión en los ensayos experimentales, a la adecuación de éstos a las condiciones reales de servicio, a fenómenos de fluencia y relajación, degradación debida a causas físicas o químicas, a efectos cíclicos o dinámicos, fatiga, etc.
- *incertidumbres asociadas a la definición y caracterización de las acciones*, ya sea por la insuficiencia de datos para estimarlas (efectos climáticos y ambientales, efectos sísmicos), por su insuficiente definición en la fase de proyecto (cargas de servicio o cargas excepcionales), por la variabilidad temporal de su naturaleza, por el desconocimiento de su evolución durante la vida útil de la estructura, etc.
- *incertidumbres asociadas a los métodos de cálculo*, ya sea por las hipótesis simplificativas adoptadas en las bases de cálculo, por la propia naturaleza de los

métodos de análisis o por la dificultad asociada a éstos en caso de utilizar métodos sofisticados.

- *incertidumbres asociadas a los métodos de construcción*, y que pueden estar relacionadas con el proceso constructivo previsto, los procedimientos de ejecución y de control de calidad empleados, etc.
- *incertidumbres asociadas a los métodos de conservación y mantenimiento*, que pueden reflejarse en fenómenos de degradación progresiva, corrosión, agresiones ambientales, etc.

En consecuencia, se define *tensión admisible*, σ_{adm} , como:

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n} \leq \sigma_{\text{lim}} \quad (2.28)$$

donde σ_{lim} es la tensión límite del material y n es un coeficiente mayor (o excepcionalmente igual) que la unidad denominado *coeficiente de seguridad*. Las estructuras se diseñan, por tanto, con el criterio de que la tensión en cualquier punto sea inferior al valor de la tensión admisible; es decir, si σ_{max} es el valor máximo de la tensión en la estructura, debe cumplirse que

$$\sigma_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{adm}} \leq \sigma_{\text{lim}} \quad (2.29)$$

La determinación del coeficiente de seguridad depende de un gran número de factores, pero éste debe ser mayor cuanto mayor sea el grado de incertidumbre en la fase de proyecto o cuanto mayor sea el impacto, en términos socio-económicos, que acarrearía un eventual fallo estructural. El coeficiente de seguridad puede reducirse en estructuras de poca complejidad o de vida útil reducida. En cualquier caso, este coeficiente se fija según la experiencia adquirida en estructuras análogas y en el nivel tecnológico aplicable. En edificación e ingeniería de la construcción se usan coeficientes de seguridad entre 2 y 5, adoptándose valores más altos para la construcción *in situ* que para la prefabricación. En ingeniería aeronáutica se usan, necesariamente, coeficientes de seguridad menores, entre 1,5 y 2, pero asociados a métodos de análisis, construcción, conservación y control mucho más complejos.

3 Conceptos y Principios Básicos

3.1 Introducción

La Resistencia de Materiales puede considerarse como aquella parte de la Mecánica de Sólidos Deformables que resulta de aplicar la Teoría de la Elasticidad a un tipo restringido de problemas que se plantean en el día a día de la Ingeniería Estructural para posibilitar su resolución de forma analítica. Esta categoría de problemas viene definida, fundamentalmente, por:

- *La restricción en la definición del problema elástico.* Así, la Resistencia de Materiales se aplica a piezas prismáticas (vigas, columnas, barras, ejes, etc.) que están apoyadas, articuladas o empotradas y sometidas a la acción de fuerzas puntuales o repartidas, descensos de apoyos, cargas térmicas, etc.
- *La adopción de ciertas hipótesis fundamentales.* Estas hipótesis permiten, por un lado, definir un problema lineal y, por otro, abordar un problema inicialmente tridimensional (las piezas tienen longitud, altura y anchura) como un “ensamblaje” de problemas básicamente unidimensionales (las piezas se representan como líneas).

Se presentan en este Capítulo, en forma breve, los fundamentos de la Resistencia de Materiales. Se introducen, primero, conceptos elementales como el de pieza, estructura, apoyo, enlace, etc., y después otros de importancia fundamental como los de esfuerzos sobre una sección, estructuras isostáticas e hiperestáticas, etc.

3.2 Objetivo de la Resistencia de Materiales

La Resistencia de Materiales, como parte integrante de la Mecánica de Estructuras, tiene como objetivo fundamental determinar la respuesta de las estructuras cuando

éstas se ven sometidas a las diferentes acciones que deben soportar durante su construcción y vida útil.

Por “respuesta estructural” se entiende, básicamente, la determinación de los estados de tensión y deformación a los que la estructura va a estar sometida por efecto de los diferentes estados de carga que se consideran. La determinación de los estados de tensión es necesaria para comprobar la satisfacción de los criterios de *resistencia* que establecen las correspondientes normativas y los usos de buena práctica, de cara a garantizar la *seguridad* de las estructuras. Por su parte, la determinación de los estados de deformación suele ser necesaria para satisfacer los criterios de *rigidez*, que están a menudo ligados a requisitos de *funcionalidad* de las estructuras.

Por tanto, la Resistencia de Materiales pretende establecer las condiciones de *resistencia* y *rigidez* de las estructuras analizadas. Ambos aspectos se abordan en los dos tipos de problemas fundamentales que se plantean en la práctica ingenieril: el *dimensionamiento* y la *verificación* de estructuras.

El proceso de construcción de una estructura empieza por la *concepción* de ésta. En esta fase se determina su tipología y se identifican las acciones que actuarán sobre ella. En ese momento entra en juego la Resistencia de Materiales para evaluar la respuesta estructural del correspondiente “prediseño estructural”. En función de los resultados obtenidos, se procede al *dimensionamiento* de los elementos estructurales, es decir, a dar valores concretos a las dimensiones de éstos. Después, se pasa a la fase de *definición* del proyecto, en la cual se persigue satisfacer los requisitos previstos. En esta fase se pueden modificar o ratificar las diversas decisiones tomadas en la fase previa. En cualquier caso, se definen y concretan la tipología estructural y las acciones a considerar (peso propio, cargas vivas, etc.). Se pasa entonces a la *verificación* del modelo estructural resultante. Si esta comprobación *a posteriori* del diseño estructural es satisfactoria, se elabora el *proyecto definitivo*; si no lo es, es necesario volver a la fase de definición. Se procede, pues, de forma iterativa hasta que se satisfacen adecuadamente todos los requisitos necesarios.

3.3 Concepto de pieza

Se llama *pieza prismática*, *viga* o *barra* al cuerpo sólido engendrado por un área plana S que se mueve en el espacio, de manera que su centro de gravedad G recorre una línea dada l y su plano se mantiene constantemente normal a dicha línea. La línea l se denomina *directriz*, *línea media* o *eje de la pieza* y las diversas posiciones que ocupa S a lo largo de la directriz se llaman *secciones rectas* o *secciones normales* de la pieza (Figura 3.1).

Las piezas prismáticas se pueden clasificar por su geometría, según sea su curva

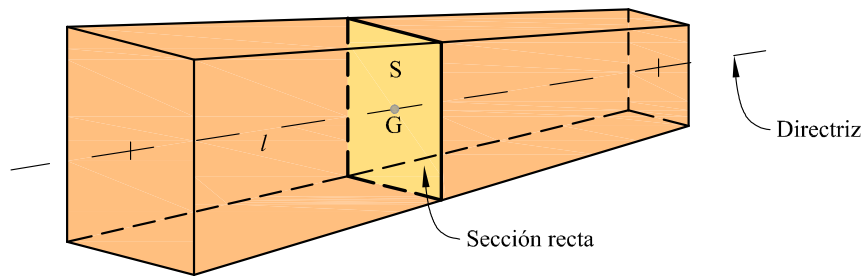


Fig. 3.1: Concepto de pieza prismática

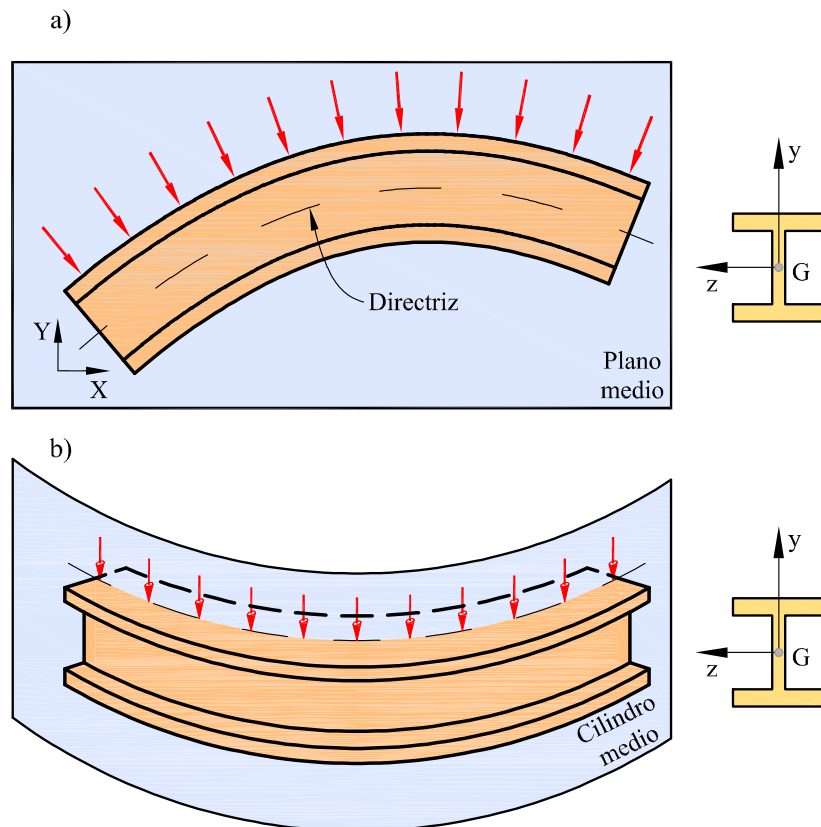


Fig. 3.2: (a) Pieza de plano medio (b) pieza de cilindro medio

directriz o según sea la forma y variación de la sección recta a lo largo de la barra.

La mayoría de las piezas usadas en ingeniería civil y en arquitectura son de directriz *recta*, sin curvatura. También son habituales las piezas *planas*, cuya directriz es una curva plana (con curvatura en un único plano).

Se llama *pieza de plano medio* a aquella pieza plana (recta o curva) en la que la sección recta es simétrica respecto a un plano que contiene a la directriz de la pieza y que está sometida a cargas contenidas en dicho plano medio (Figura 3.2a).

Se llama *pieza de cilindro medio* a aquella pieza plana (recta o curva) en la que la sección recta es simétrica respecto a un plano perpendicular al que contiene a la directriz de la pieza y que está sometida a cargas perpendiculares al plano de la directriz (Figura 3.2b).

Si la directriz presenta curvaturas en dos planos perpendiculares define una pieza *alabeada*.

Además, según la variación de la sección a lo largo de la pieza, ésta puede ser de *sección (o inercia) constante o variable*. La Figura 3.3 muestra la estructura porticada de una nave industrial en la que puede observarse la combinación de piezas de sección constante (pilares y correas) y piezas de sección variable (dinteles).

Según sea la forma de la sección recta de la pieza, se tienen vigas *macizas* (gene-



Fig. 3.3: Piezas prismáticas: diferentes secciones

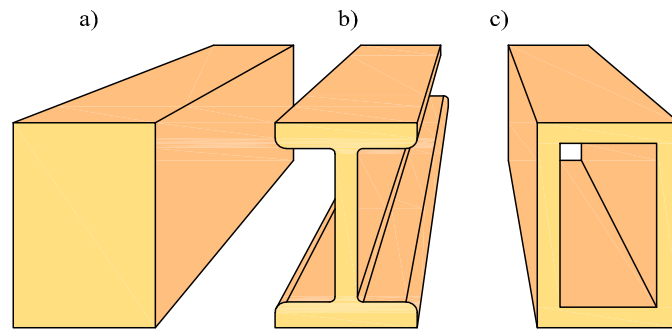


Fig. 3.4: Viga: (a) maciza, (b) en doble T, (c) hueca

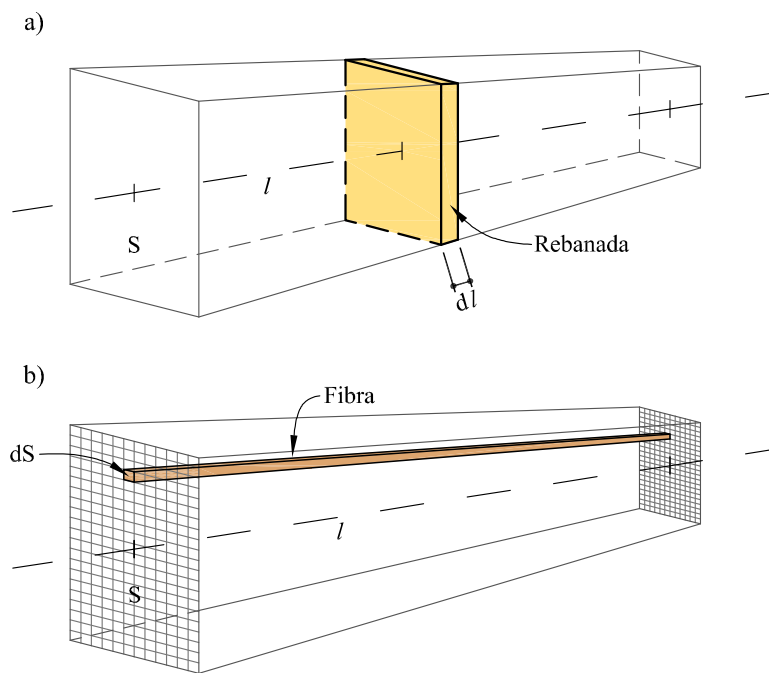


Fig. 3.5: Concepto de: (a) rebanada y (b) fibra

ralmente, rectangulares), *huecas* o *perfiles* (generalmente, de pequeño espesor). La Figura 3.4 muestra tres piezas rectas con sección rectangular maciza (Figura 3.4a), una sección en doble T (Figura 3.4b) y una rectangular hueca (Figura 3.4c).

Se llama *rebanada* al elemento diferencial de pieza contenido entre dos secciones rectas infinitamente próximas (Figura 3.5a). Así, se puede considerar a la viga como un sólido generado por una *sucesión* de rebanadas diferenciales.

Se llama *fibra* al elemento diferencial de volumen generado por un elemento diferencial del área plana S en el movimiento que genera la pieza prismática (Figura 3.5b). Por tanto, se puede considerar a la viga como un sólido formado por un *haz* de fibras diferenciales. La rebanada y la fibra son los elementos diferenciales básicos de estudio en la Resistencia de Materiales.

En la definición de pieza prismática, viga o barra, podemos admitir también piezas de varios materiales siempre que las interfaces entre los distintos materiales sean superficies *paralelas* a la directriz de la pieza. La definición de rebanada y de fibra en piezas de varios materiales son análogas a las correspondientes a la pieza prismática de sección homogénea. Son ejemplo habitual de piezas de varios materiales las vigas de hormigón armado, donde las barras de acero que constituyen el armado longitudinal son fibras de un material embebidas en el hormigón circundante. También responden a esta categoría los tableros mixtos de puente, donde se coloca una cabeza de hormigón sobre una base de vigas o un cajón de acero.

3.4 Concepto de estructura de barras

Se llama *estructura de barras* al sistema mecánico formado por el ensamblaje de piezas prismáticas. Su finalidad consiste en soportar las acciones que actúan sobre ella y transmitir las correspondientes fuerzas y momentos al medio de sustentación. Aunque las estructuras de barras no son la única tipología existente, sí es la comunmente utilizada. Por este motivo, es la tratada en este Libro.

Es habitual clasificar las estructuras de barras según la *disposición de las directrices* de las piezas y según el *tipo de unión* de éstas.

Así, según las disposición de las directrices de las piezas que forman la estructura, se habla de *estructura plana* cuando las directrices de todas las piezas están contenidas en un mismo plano, y de *estructura espacial* en caso contrario.

Las estructuras espaciales son mucho más complejas de concebir, diseñar y construir que las estructuras planas. Por eso, es común que muchas estructuras aparentemente tridimensionales se diseñen realmente como un conjunto de estructuras planas que trabajan solidariamente para conseguir los mecanismos resistentes necesarios.

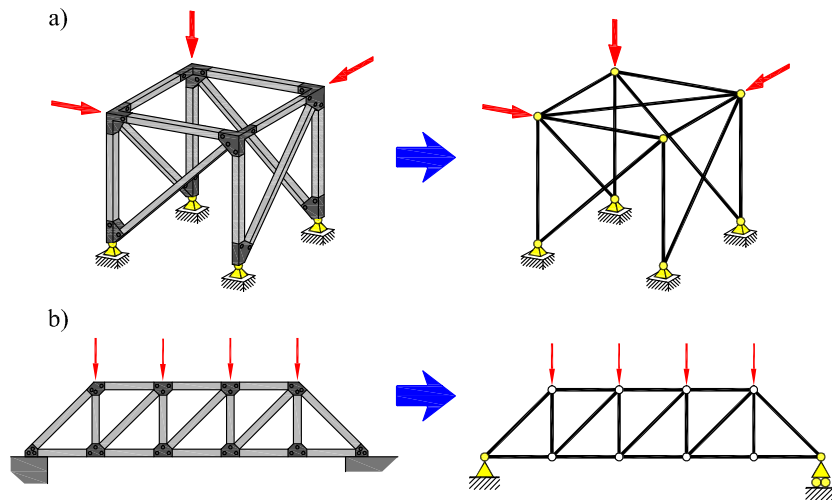


Fig. 3.6: Idealización de estructuras de barras articuladas: (a) espacial (b) plana

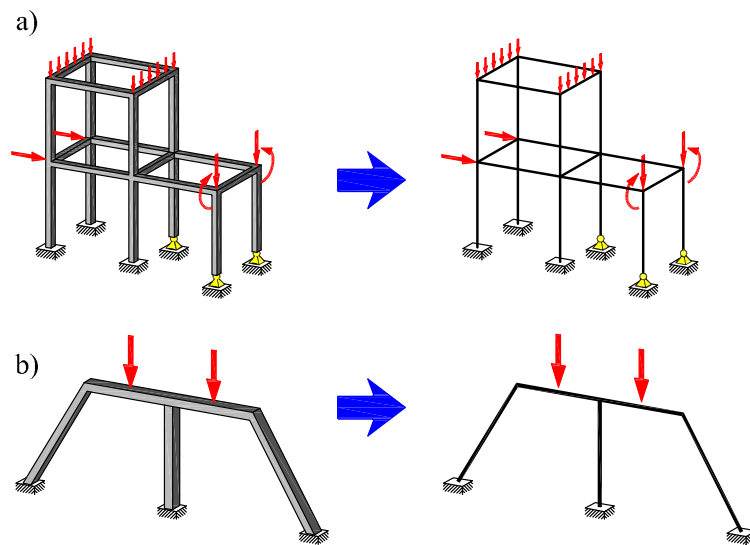


Fig. 3.7: Idealización de estructuras de barras reticuladas: (a) espacial (b) plana

Si la unión de las piezas prismáticas es tal que permite el giro relativo entre las piezas, la estructura se llama *articulada* y trabaja fundamentalmente a esfuerzo axil. Las estructuras articuladas se representan de forma idealizada de la siguiente manera: la barra se representa mediante una línea que es la directriz de la pieza; los nudos articulados se representan mediante un círculo y los apoyos se representan teniendo en cuenta los grados de libertad restringidos: articulado móvil o fijo (ver Figura 3.6).

Si la unión de las piezas prismáticas se realiza de tal manera que impide totalmente el giro relativo entre las piezas, la estructura de barras se llama *reticulada* y trabaja fundamentalmente a flexión y, en su caso, a torsión. Como se verá en este Libro, la flexión y la torsión se dan a menudo acompañadas de esfuerzos de cortante. Las estructuras reticuladas se idealizan de forma que las barras se representan mediante su directriz y los nudos rígidos se idealizan mediante un punto en el que concurren las directrices de las barras (Figura 3.7).

Se llama *estructura de plano medio* a la estructura plana formada por piezas de plano medio, y que están sometidas a cargas contenidas en dicho plano medio. Se llama *emparrillado plano* a la estructura plana formada por piezas de cilindro medio, y que están sometidas a cargas perpendiculares a su plano medio.

3.5 Elementos estructurales

Las piezas prismáticas que forman las estructuras reciben una denominación diferente según la función que desempeñan y su forma de trabajar. Así, se llama *viga* al elemento estructural horizontal, generalmente recto, que soporta principalmente cargas verticales y trabaja fundamentalmente a flexión. Se llama *pilar*, *soporte* o *columna*, al elemento estructural, generalmente recto y vertical, que resiste cargas axiales de compresión y en algunos casos también momentos de flexión. Se llama *cable* o *tirante* al elemento estructural sometido a tracción. Se suelen utilizar para salvar grandes distancias, ya que están limitados sólo por su peso y su forma de anclaje.

La Figura 3.8 muestra un puente atirantado en el que se combinan estos tres elementos estructurales básicos.

Los *arcos* son elementos estructurales planos de directriz curva o poligonal que soportan sus cargas fundamentalmente a compresión. A diferencia del cable, deben ser rígidos para mantener su forma, y esto genera esfuerzos secundarios (momentos y cortantes) que deben considerarse en su diseño.

La Figura 3.9 muestra una pasarela fluvial levadiza que combina estos elementos para soportar el tablero, una viga balcón de planta curva.



Fig. 3.8: Elementos estructurales: vigas, columnas y tirantes



Fig. 3.9: Elementos estructurales: arco, tirantes y viga balcon

3.6 Apoyos y enlaces en estructuras de barras

3.6.1 Apoyos

Se llama *apoyo* a todo dispositivo destinado a unir una estructura al medio de sustentación. Los apoyos cumplen la triple función de:

- (a) impedir los movimientos de sólido rígido de la estructura
- (b) limitar la deformación que sufre
- (c) transmitir las cargas que soporta la estructura al medio de sustentación.

En lo que sigue se describen los tipos de apoyo más usuales en estructuras articuladas y reticuladas planas. Naturalmente, las estructuras espaciales tienen también sus dispositivos de apoyo que no se describen aquí.

Apoyos en estructuras articuladas planas

Una sección de una pieza articulada plana tiene dos grados de libertad, dos traslaciones independientes. Existen, por tanto, dos tipos de apoyo, según coarten uno o los dos grados de libertad de la sección de apoyo. Por cada grado de libertad coartado, se transmite una reacción que impide el movimiento.

(a) Apoyo simple o articulado móvil

Es un tipo de apoyo que sólo coarta el movimiento de traslación en una dirección de la sección de apoyo, permitiendo la traslación en la dirección perpendicular y el giro de la sección de apoyo. La reacción que produce es una fuerza perpendicular a la dirección de

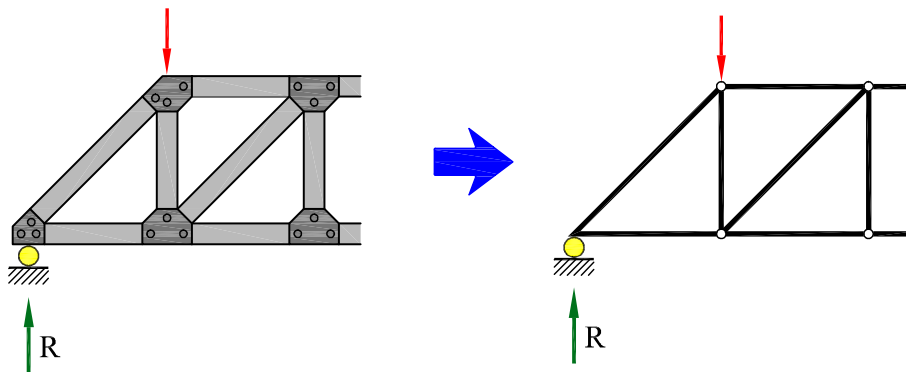


Fig. 3.10: Estructuras articuladas: apoyo simple o móvil

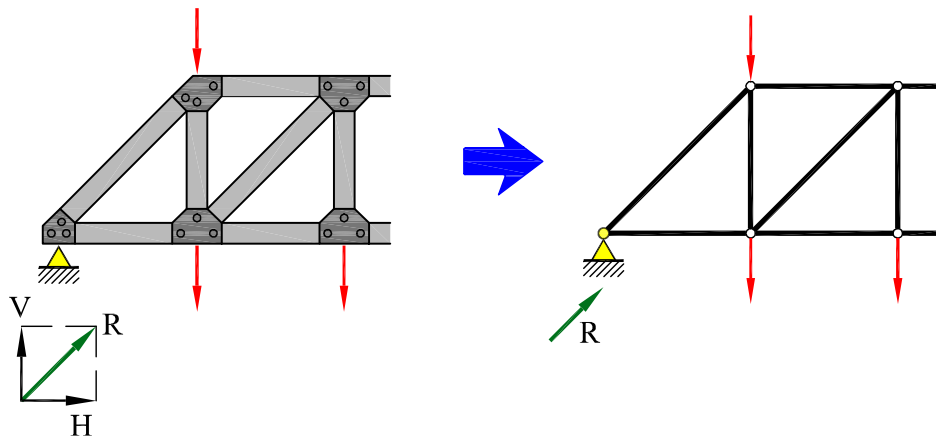


Fig. 3.11: Estructuras articuladas: apoyo fijo o articulación

rodadura, o sea, al movimiento permitido. Se introduce *una sola incógnita*, el módulo de la reacción (dirección conocida) (Figura 3.10).

(b) Apoyo fijo o articulación

Este tipo de apoyo impide totalmente el movimiento de traslación de la sección de apoyo, pero permite el giro.

La reacción que produce es una fuerza de dirección y módulo desconocidos. Se introducen *dos incógnitas*: las componentes de la reacción respecto a dos ejes perpendiculares cualesquiera (Figura 3.11).

3.6.2 Apoyos en estructuras reticuladas de plano medio

Se describen, a continuación, los tipos de apoyo más usuales en estructuras de plano medio. Dado que una sección de una pieza de plano medio tiene tres grados de libertad, dos traslaciones independientes en el plano medio y un giro perpendicular a éste, existen varios tipos de apoyo, según coarten uno, dos o los tres grados de libertad de la sección de apoyo. Por cada grado de libertad coartado, el apoyo transmite a la estructura una *reacción* que impide el movimiento. Estas reacciones son, naturalmente, iguales y de sentidos opuestos a las fuerzas que la estructura transmite al medio de sustentación.

(a) Apoyo simple o articulado móvil

Este tipo de apoyo sólo coarta el movimiento de la sección de apoyo en una dirección,

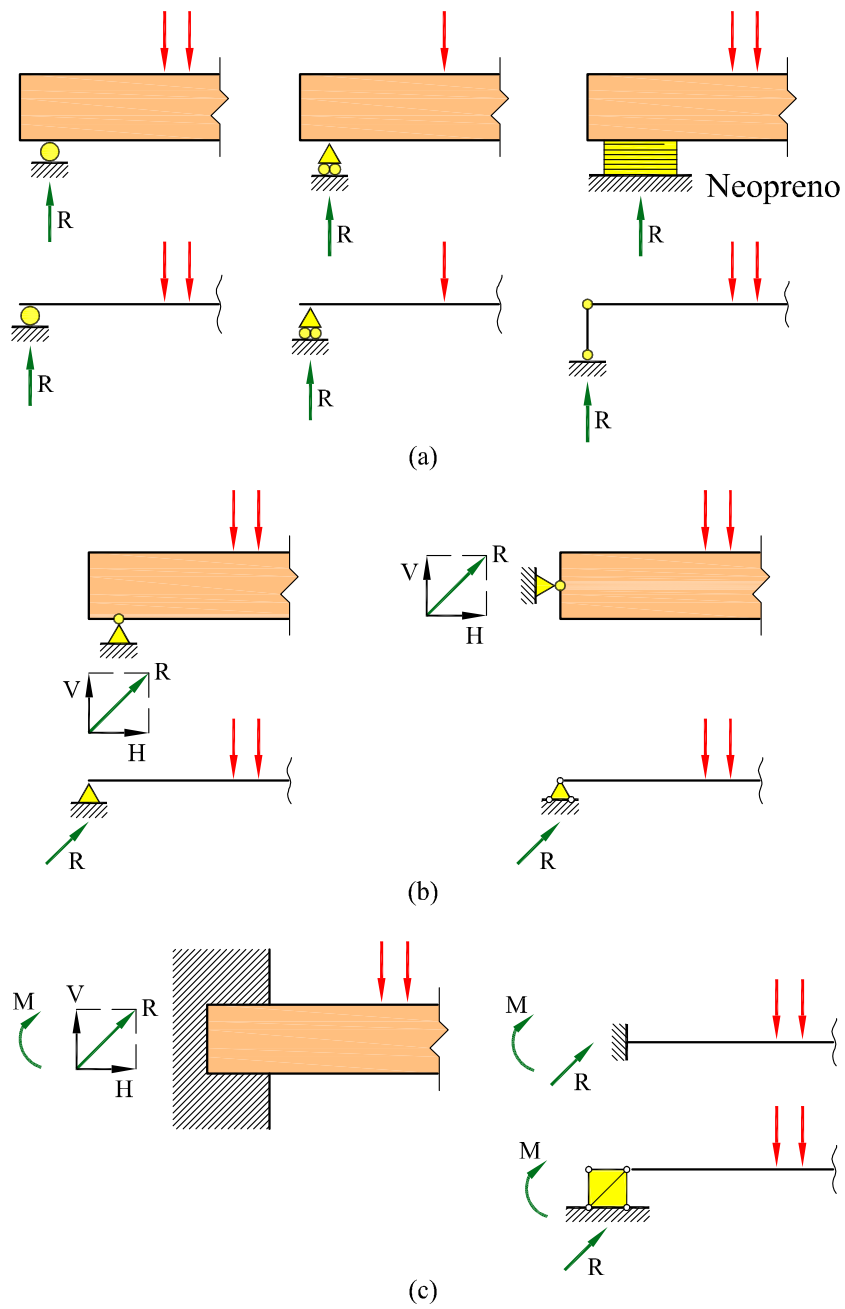


Fig. 3.12: Apoyos en estructuras de plano medio: (a) apoyo simple o móvil, (b) apoyo fijo y (c) empotramiento

permitiendo la traslación en la dirección perpendicular y el giro de la sección de apoyo (Figura 3.12a). La reacción que produce es una fuerza perpendicular a la dirección de rodadura, o sea, al movimiento permitido. Asociada a un apoyo simple se introduce, por tanto, una sola incógnita, el módulo de la reacción, ya que su posición y dirección son conocidas.

(b) Apoyo fijo o articulación

Este tipo de apoyo impide totalmente el movimiento de traslación de la sección de apoyo, pero permite el giro (Figura 3.12b). La reacción que produce es una fuerza de dirección y módulo desconocidos. Se introducen, pues, dos incógnitas: las componentes de la reacción respecto a dos ejes perpendiculares cualesquiera.

(c) Empotramiento

Este tipo de apoyo impide todo movimiento de la sección de apoyo, tanto de traslación como de giro (Figura 3.12c). La reacción que se produce es una fuerza de posición, dirección y módulo desconocidos. Se introducen, pues, tres incógnitas: dos componentes de la reacción y el momento sobre la sección de apoyo.

3.6.3 Enlaces

Se llama *enlace* o *nudo* a todo dispositivo destinado a unir entre sí las diferentes piezas que forman una estructura. Los enlaces cumplen la doble función de:

- (a) impedir o limitar los movimientos *relativos* de unas piezas respecto a otras, y
- (b) de transmitir las cargas que unas soportan a las demás (Figura 3.13).

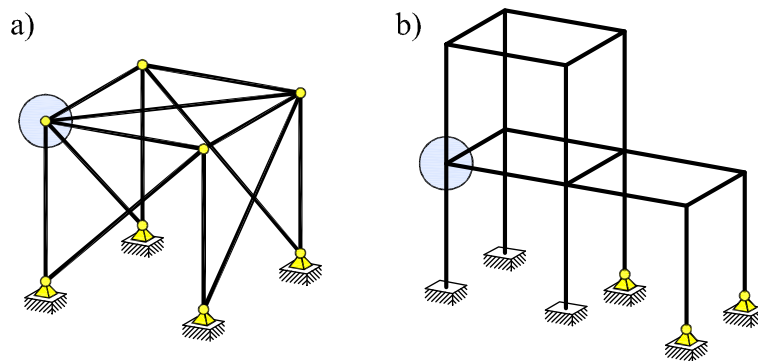


Fig. 3.13: Enlace o nudo: (a) articulación (b) nudo rígido

Por cada grado de libertad coartado a la sección de enlace, éste transmite a las piezas concurrentes una reacción interna. Estas reacciones son iguales y de sentidos opuestos en las dos piezas que se unen en la sección de enlace.

Se describen, a continuación, los tipos de enlaces más usuales en estructuras planas. Aunque sólo se ilustran enlaces en estructuras planas, pueden generalizarse al caso tridimensional.

(a) Enlace deslizante

Este tipo de enlace sólo coarta el movimiento relativo en una dirección, permitiendo la traslación en la dirección perpendicular y el giro de la sección de enlace (Figura 3.14a). La reacción que produce es un par de fuerzas, iguales y opuestas, perpendiculares al movimiento permitido. Se introduce, por tanto, una sola incógnita: el módulo de las reacciones. Se suele representar como un rodillo entre las piezas que deslizan.

(b) Articulación o nudo articulado

Este tipo de enlace impide totalmente la traslación relativa de la sección de enlace, pero permite el giro relativo de la misma (Figura 3.14b). La reacción que produce es un par de fuerzas de dirección y módulo desconocidos. En una articulación interna se introducen, pues, dos incógnitas: las componentes de la reacción respecto a dos ejes perpendiculares cualesquiera. El momento flector es necesariamente nulo en una articulación.

Este tipo de enlace, también llamado *nudo articulado*, es el que une entre sí las distintas barras de una estructura articulada. También puede darse ocasionalmente en una estructura de barras de otra tipología. Se suele representar con un círculo sobre el nudo.

(c) Empotramiento o nudo rígido

Este tipo de enlace impide todo movimiento de la sección de enlace, tanto de traslación como de giro (Figura 3.14c). La reacción que produce es un par de fuerzas de posición, dirección y módulo desconocidos. En un nudo rígido se introducen, por tanto, tres incógnitas: dos componentes de la reacción y el momento de la sección de enlace.

Este tipo de enlace, también llamado *nudo rígido*, es el que une entre sí las distintas barras de una estructura reticulada. Se suele representar como una unión continua entre las piezas.

Los apoyos y enlaces considerados para estructuras planas pueden fácilmente generalizarse para estructuras espaciales. En este caso, el número de grados de libertad de

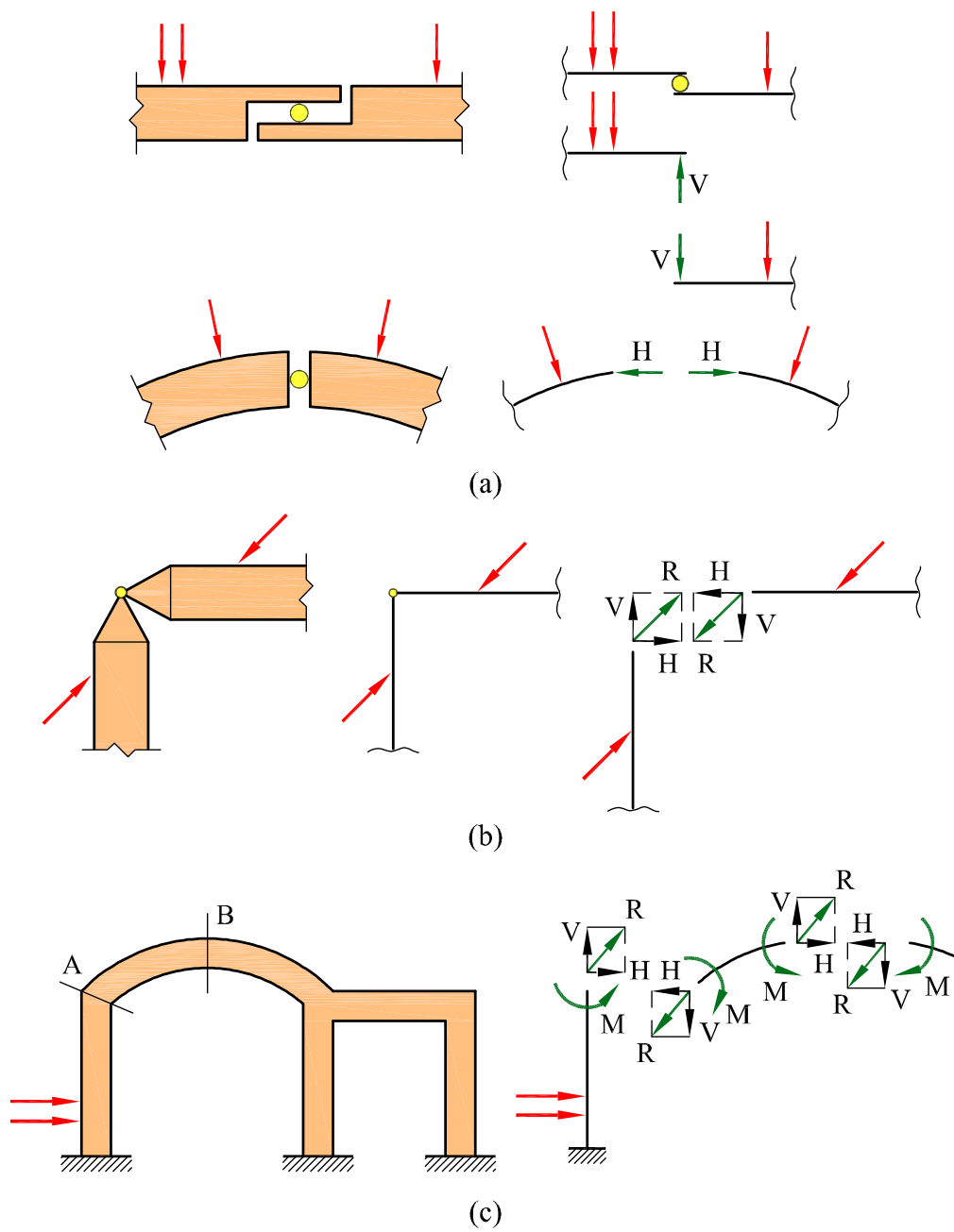


Fig. 3.14: Enlaces en estructuras de plano medio: (a) enlace deslizante, (b) nudo articulado y (c) empotramiento

la sección es seis (tres traslaciones y tres rotaciones), y por tanto, el número de tipos de apoyos y enlaces posibles es mucho mayor.

3.7 Principios de la Resistencia de Materiales

La Resistencia de Materiales es una disciplina que se basa en tres principios o hipótesis fundamentales: el Principio de rigidez, el Principio de superposición y el Principio de Saint-Venant. La validez de los resultados obtenidos mediante esta teoría depende, básicamente, del grado de satisfacción de estos principios en el caso concreto en que se aplique.

3.7.1 Principio de rigidez

El Principio de rigidez es una consecuencia directa de la hipótesis de pequeños movimientos aplicada al análisis de estructuras y establece que

“las ecuaciones de equilibrio se pueden formular sobre la geometría indeformada, es decir, sin considerar los movimientos provocados por el sistema de cargas.”

Esta hipótesis implica que los movimientos de la estructura debidos al sistema de cargas sean pequeños: los desplazamientos, comparados con las dimensiones de la estructura, y los giros (en radianes), comparados con la unidad. Si esta condición no se cumple, las ecuaciones de equilibrio deben formularse en la geometría deformada, y el problema deja de ser lineal para transformarse en un problema *geoméricamente* no lineal.

En la Figura 3.15 se ilustra la aplicación del Principio de rigidez. Bajo la hipótesis de pequeños movimientos (izquierda), las reacciones en el empotramiento sólo dependen de la geometría inicial y de las cargas ($M = F_1 l$); sin ella (derecha), las reacciones dependen de la deformación de la estructura ($M = F_1 (l - \delta) + F_2 f$), y ésta es desconocida *a priori*.

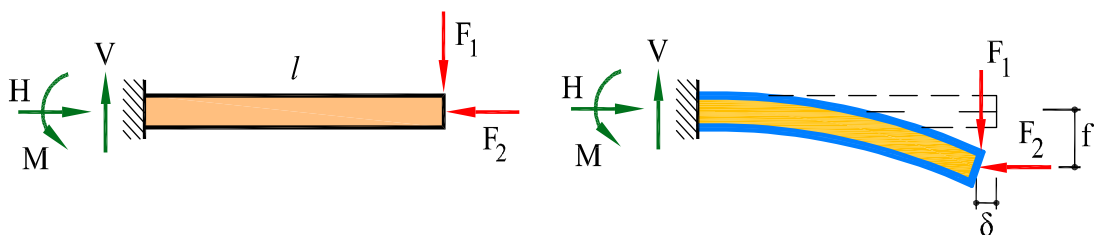


Fig. 3.15: Implicación del Principio de rigidez

3.7.2 Principio de superposición

Como ya se indicó en el Capítulo 2, si es válida la hipótesis de pequeños desplazamientos y se cumple la ley de Hooke, entonces el problema elástico es lineal. La resolución de un problema estructural lineal es mucho más sencilla que la de uno no lineal; además de otras dificultades de tipo práctico, en un problema no lineal no existe, en general, garantía de que la solución exista y sea única.

Además, si el problema es lineal puede aplicarse el Principio de superposición. Éste establece que

“los efectos que un sistema de fuerzas origina sobre una estructura son iguales a la suma de los efectos que originan cada una de las fuerzas del sistema actuando por separado”.

El principio de superposición implica que las reacciones, movimientos, tensiones y deformaciones que provoca sobre la estructura el estado de cargas original es igual a la suma de las reacciones, movimientos, tensiones y deformaciones que provocan los estados en los que éste se descompone.

Así, por ejemplo, en la Figura 3.16 se muestra una viga biapoyada sobre la que actúa un sistema de carga consistente en dos fuerzas puntuales; este sistema puede descomponerse en los dos sistemas más simples de la parte inferior de la Figura a efectos, por ejemplo, de calcular la flecha vertical en el punto C .

Asimismo, en la viga biapoyada de la Figura 3.17, el momento flector debido al sistema de cargas $F_1 + F_2$ es igual a la suma del momento flector debido a F_1 más el debido a F_2 , actuando separadamente.

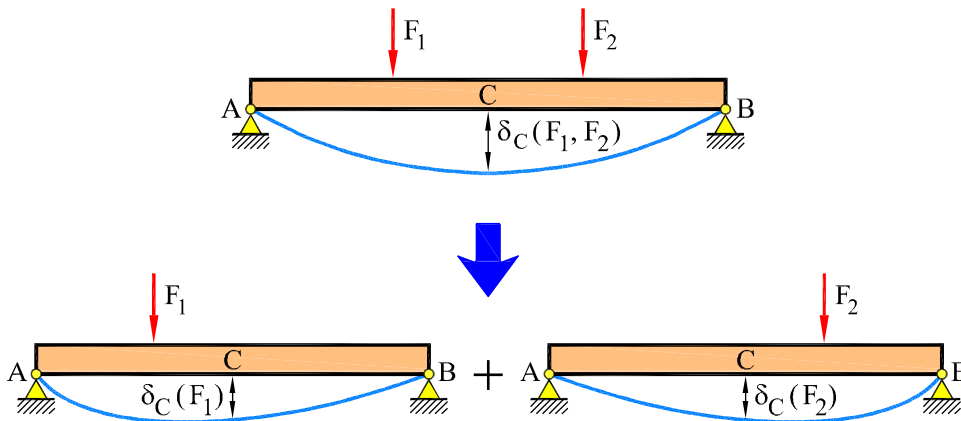


Fig. 3.16: Implicación del Principio de superposición

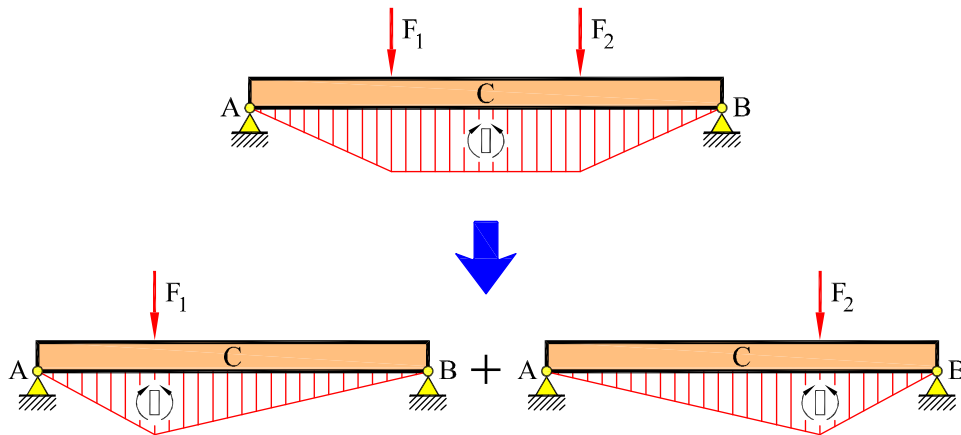


Fig. 3.17: Ejemplo de aplicación del Principio de Superposición

Una consecuencia inmediata del citado principio es que el estado final (tensional y deformacional) de una estructura sometida a un sistema de fuerzas no depende del orden de aplicación de dichas fuerzas. Esto permite, por ejemplo, analizar el caso de una sollicitación compleja descomponiéndola en casos más simples de estudiar. Es posible, asimismo, la definición y el análisis de estados de carga de interés como combinación de estados de carga previamente definidos y analizados. Ambas posibilidades son utilizadas frecuentemente en Resistencia de Materiales.

3.7.3 Principio de Saint-Venant

El Principio de Saint-Venant puede considerarse la verdadera piedra angular sobre la que se edifica la Resistencia de Materiales, ya que establece que

“en una pieza prismática, las tensiones que actúan sobre una sección recta, alejada de los puntos de aplicación de un sistema de cargas, sólo dependen de la fuerza y del momento resultantes de las fuerzas situadas a un lado de la sección considerada”.

Esta hipótesis implica que los efectos locales (fuerzas concentradas, apoyos, variaciones de sección) sólo afectan a una zona localizada a uno y otro lado de las secciones en que se producen. La forma precisa en que se aplican las cargas o los dispositivos empleados para aplicarlas, así como la disposición constructiva concreta de los aparatos de apoyo, sólo afectan al estado tensional de esta zona localizada, de una longitud aproximadamente igual al canto de la pieza. El estudio tensional de las zonas afectadas por los efectos locales es complejo y debe hacerse mediante la Teoría de la Elasticidad.

En la Sección 3.8 se define el concepto de *esfuerzos sobre una sección*, precisamente,

como las componentes de la fuerza y del momento resultantes de las fuerzas situadas a un lado de la sección. El cálculo de esfuerzos juega un papel fundamental en la Teoría de Resistencia de Materiales y Cálculo de Estructuras, ya que, según el Principio de Saint-Venant, las tensiones en una sección sólo dependen del valor de éstos.

En la Figura 3.18 se muestran dos ejemplos de voladizos con momento aplicado en sus extremos libres. En el primer caso, el empotramiento se consigue apoyando la viga contra el soporte y coartando el giro mediante sendos angulares soldados a ambos; el momento en el extremo es la resultante de un par fuerzas horizontales. En el segundo caso, el empotramiento se consigue encastrando adecuadamente la viga en el soporte; el momento en el extremo es la resultante de un par fuerzas inclinadas respecto al eje de la viga. En ambas situaciones, el momento resultante de las fuerzas actuantes es idéntico, mientras que la resultante de fuerzas es nula.

A pesar de que las materializaciones de las condiciones de empotramiento y de los momentos aplicados son diferentes, su idealización a efectos de cálculo es idéntica, tal como se muestra en la Figura 3.18. Según el Principio de Saint-Venant, las tensiones que aparecen en las zonas centrales de las piezas dependen, exclusivamente, del momento resultante de las fuerzas actuantes; las zonas extremas, por el contrario, se ven afectadas por los efectos locales, y la determinación de su estado tensional requerirá consideraciones más cuidadosas.

En la práctica ingenieril, el estudio del estado tensional de un elemento estructural suele hacerse suponiendo que el Principio de Saint-Venant es aplicable a la totalidad

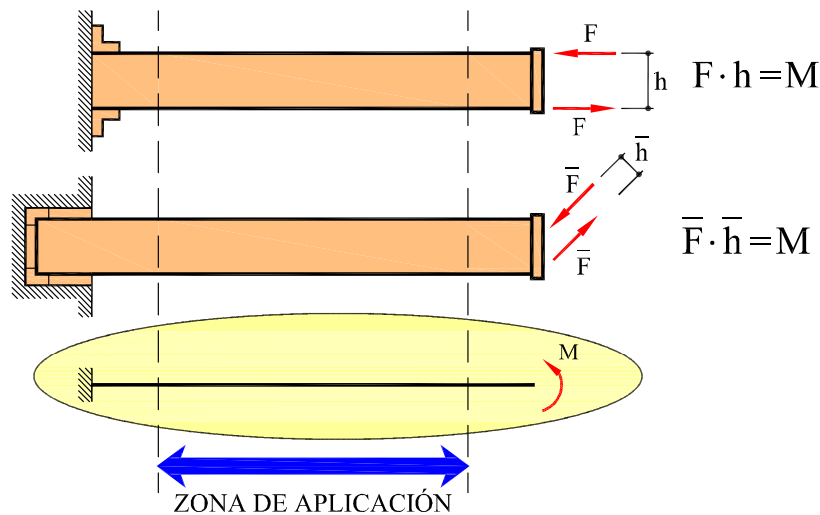


Fig. 3.18: Ilustración del Principio de Saint-Venant

de las secciones analizadas. El dimensionamiento de las piezas suele hacerse en función de los resultados así obtenidos. *A posteriori*, se adoptan las disposiciones constructivas necesarias para reducir o soportar de forma adecuada los efectos locales en las zonas en las que los resultados calculados en esta forma no son aplicables.

3.7.4 Restricciones geométricas

Para que los principios fundamentales enunciados se cumplan y los resultados de la Resistencia de Materiales sean válidos, las piezas deben cumplir ciertas condiciones:

- *Geometría de la directriz.* En piezas de directriz curva, los radios de curvatura de ésta deben ser grandes en relación al canto de las piezas. Si esta relación es suficientemente grande, los efectos de la curvatura pueden llegar a despreciarse en el análisis del comportamiento de las rebanadas y utilizar las expresiones obtenidas para piezas de directriz recta.
- *Geometría de las secciones:*
 - *Dimensiones.* Las dimensiones transversales de las piezas, canto y ancho, deben ser pequeñas en relación a su longitud. Esto es necesario para que se cumplan el principio de Saint-Venant y las hipótesis de deformación de las secciones que se utilizan habitualmente. Por otro lado, las características geométricas de las secciones rectas deben asegurar que las piezas tengan la rigidez necesaria para que los movimientos sean pequeños. En general, son admisibles las relaciones *canto/luz* (h/l) siguientes:

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{10} \text{ a } \frac{1}{12} \quad \text{para piezas rectas de hormigón armado}$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{15} \text{ a } \frac{1}{25} \quad \text{para piezas rectas de hormigón pretensado}$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{20} \text{ a } \frac{1}{35} \quad \text{para piezas rectas de acero laminado}$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{40} \text{ a } \frac{1}{100} \quad \text{para arcos}$$

- *Variación.* En piezas de sección variable, la variación de las dimensiones transversales debe ser gradual y lenta. Las variaciones bruscas en las características geométricas de las secciones producen efectos locales que invalidan el principio de Saint-Venant.

3.8 Definición de esfuerzos en una sección

Dada una viga sometida a la acción de un sistema de cargas exteriores, supondremos que una sección recta cualquiera, S , divide la pieza en dos partes, (A) y (B) , situadas cada una a un lado de la sección considerada, tal como se muestra en la Figura 3.19.

El sistema de fuerzas (acciones y reacciones) que actúan sobre la viga debe estar en equilibrio estático. Si llamamos \mathbf{F}_A al sistema de fuerzas que actúa sobre la parte (A) de la pieza y \mathbf{F}_B al sistema de fuerzas que actúa sobre la parte (B) , por equilibrio de la viga debe ser:

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = 0 \quad (3.1)$$

Asimismo, tomando momentos respecto al centro de gravedad G de la sección S , debe cumplirse:

$$M_{F_A}^G + M_{F_B}^G = 0 \quad (3.2)$$

Consideremos ahora, por separado, el equilibrio de las dos partes de la pieza (A) y (B) . Para que tal equilibrio exista, es necesario suponer que existen unas fuerzas de interacción que ambas partes se ejercen entre sí, a través de la superficie S .

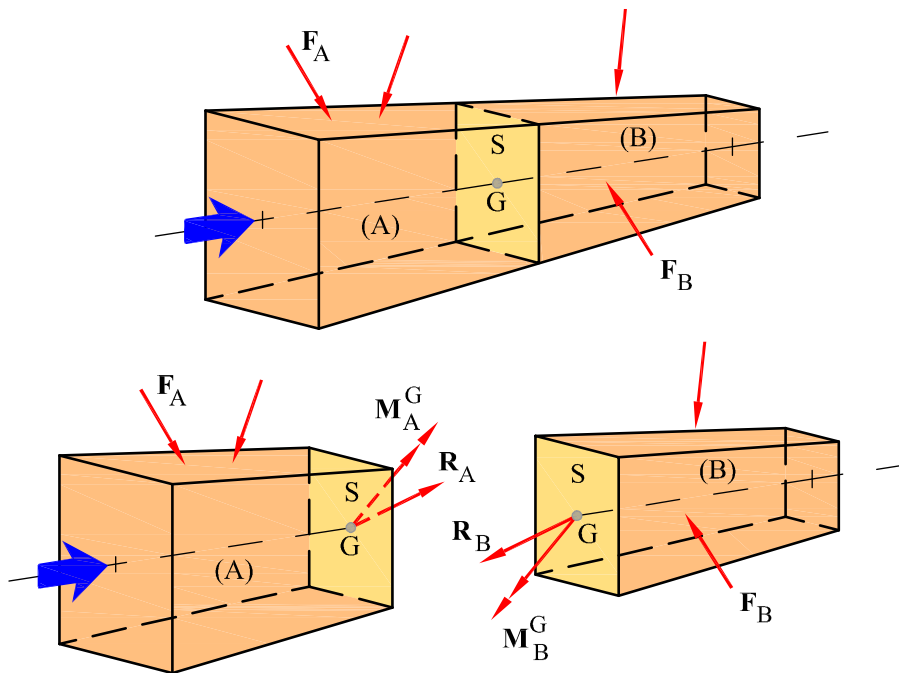


Fig. 3.19: Fuerza y momento resultantes en una sección

Así, la parte (B) ejercerá sobre la parte (A) unas fuerzas que podemos reducir a una resultante \mathbf{R}_A y un momento resultante, respecto a G , \mathbf{M}_A^G . De forma análoga, la parte (A) ejerce sobre la parte (B) una fuerza resultante \mathbf{R}_B y un momento resultante \mathbf{M}_B^G .

Por equilibrio de la parte (A) debe ser:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_A + \mathbf{R}_A &= 0 \\ \mathbf{M}_{F_A}^G + \mathbf{M}_A^G &= 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

Por equilibrio de la parte (B) debe ser:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_B + \mathbf{R}_B &= 0 \\ \mathbf{M}_{F_B}^G + \mathbf{M}_B^G &= 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

Sumando las ecuaciones (3.3) y (3.4) y teniendo en cuenta el equilibrio global (ecuaciones (3.1) y (3.2)), se tiene:

$$(\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B) + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_A = -\mathbf{R}_B \quad (3.5a)$$

$$(\mathbf{M}_{F_A}^G + \mathbf{M}_{F_B}^G) + \mathbf{M}_A^G + \mathbf{M}_B^G = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_A^G = -\mathbf{M}_B^G \quad (3.5b)$$

Por lo tanto, las acciones que una parte ejerce sobre la otra son iguales y de sentido contrario.

Llamando por simplicidad:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_A = -\mathbf{R}_B \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_A^G = -\mathbf{M}_B^G$$

se tendrá también que:

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{R} &= -\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_B \\ \mathbf{M} &= -\mathbf{M}_{F_A}^G = \mathbf{M}_{F_B}^G\end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Cuando la fuerza resultante \mathbf{R} y el momento resultante \mathbf{M} se calculan en la forma:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_B \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_{F_B}^G \quad (3.7)$$

es decir, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan “por delante” de S (en la parte B), el cálculo se llama *frontal*.

Cuando \mathbf{R} y \mathbf{M} se calculan en la forma

$$\mathbf{R} = -\mathbf{F}_A \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = -\mathbf{M}_{F_A}^G \quad (3.8)$$

es decir, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan “por detrás” de S (en la parte A), el cálculo se llama *dorsal*. Es evidente que ambos procedimientos conducen a resultados idénticos.

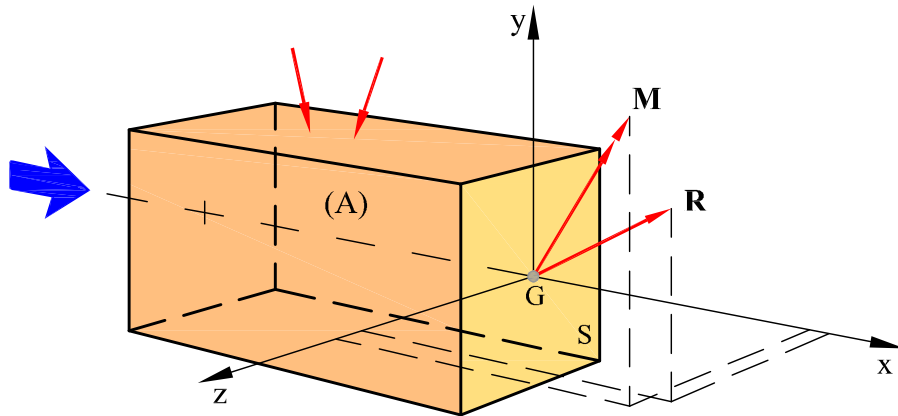


Fig. 3.20: Fuerza y momento resultantes en una sección

Definimos el triedro cartesiano dextrógiro xyz , con origen en el centro de gravedad G de la sección S , en el que el eje x es normal a la sección S , orientada de (A) a (B) y tangente a la directriz de la viga, y los ejes (y, z) son los ejes principales de inercia de la sección S (Figura 3.20). Proyectando la fuerza resultante \mathbf{R} sobre estos ejes (Figura 3.21a) se define como:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Esfuerzo Axil } N \\ \text{Esfuerzo Cortante } T_y \\ \text{Esfuerzo Cortante } T_z \end{array} \right\} \text{ a la proyección de } \mathbf{R} \text{ según el eje } \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$$

Análogamente, proyectando el momento resultante \mathbf{M} sobre los ejes (Figura 3.21b),

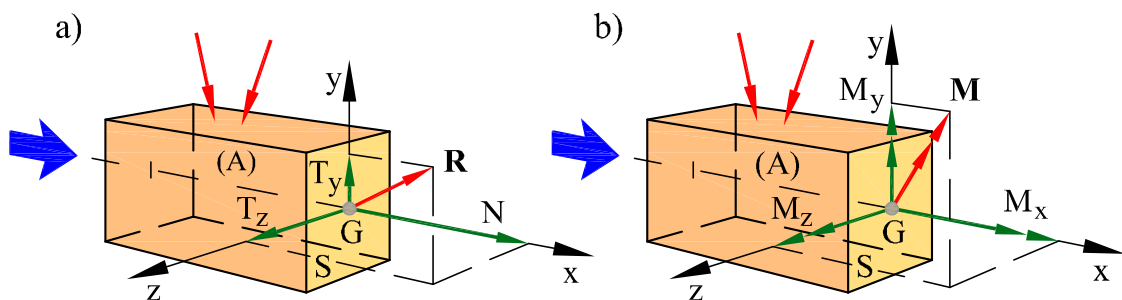


Fig. 3.21: Definición de esfuerzos en una sección

se define como:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Momento Torsor } M_t \\ \text{Momento Flector } M_y \\ \text{Momento Flector } M_z \end{array} \right\} \text{ a la proyección de } \mathbf{M} \text{ según el eje } \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$$

3.9 Relación entre esfuerzos y tensiones

Las resultantes \mathbf{R} y \mathbf{M} , y sus respectivas componentes, es decir, los esfuerzos en la sección, son las resultantes estáticas de las *tensiones* que actúan sobre la sección S . Tal como se definió en el Capítulo anterior, dichas tensiones son las fuerzas de interacción que una parte de la viga ejerce sobre la otra, definidas por unidad de superficie de la sección S .

Así, tal como se muestra en la Figura 3.22, sobre un diferencial de área dS , de la sección S , actuará una tensión \mathbf{t} , que puede descomponerse en una tensión normal σ_x , según el eje x , y una tensión tangencial τ sobre la sección S . La tensión tangencial puede descomponerse, a su vez, en sus componentes cartesianas según los ejes (y, z) ,

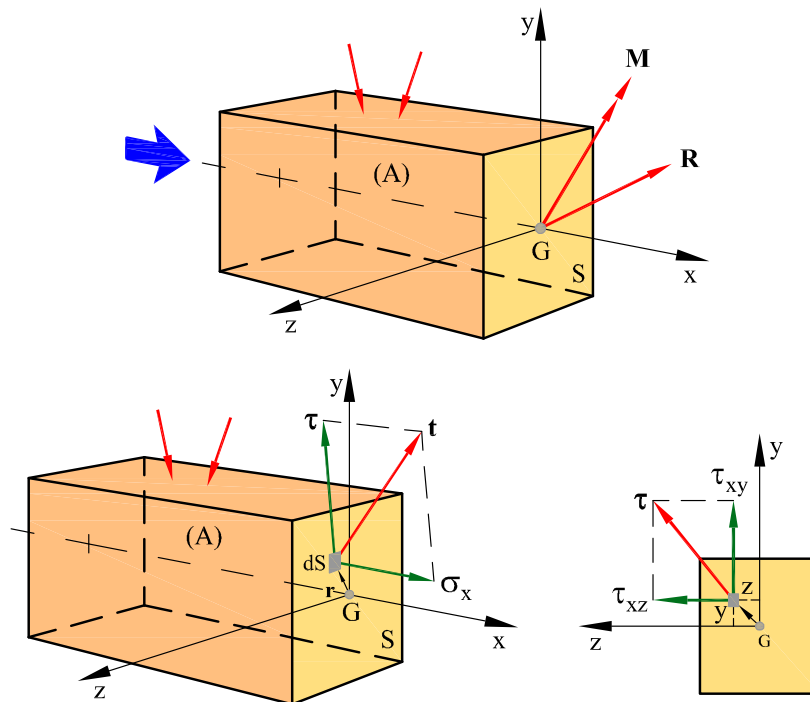


Fig. 3.22: Definición de esfuerzos en una sección

dando las tensiones τ_{xy}, τ_{xz} , respectivamente.

Para que \mathbf{R} y \mathbf{M} formen un sistema equivalente al sistema de fuerzas internas diferenciales $d\mathbf{F} = \mathbf{t} dS$, deben cumplirse las siguientes relaciones vectoriales:

$$\mathbf{R} = \int_S \mathbf{t} dS \quad ; \quad \mathbf{M} = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS \quad (3.9)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición de dS respecto al centro de gravedad de la sección, con componentes $\mathbf{r}(0, y, z)$.

Las anteriores relaciones vectoriales se pueden descomponer en las correspondientes ecuaciones escalares. Así, la primera de las ecuaciones (3.9) se descompone en:

$$N = \int_S \sigma_x dS \quad ; \quad T_y = \int_S \tau_{xy} dS \quad ; \quad T_z = \int_S \tau_{xz} dS \quad (3.10)$$

Análogamente, la segunda de las ecuaciones (3.9) se descompone en:

$$M_t = \int_S (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dS \quad ; \quad M_y = \int_S \sigma_x z dS \quad ; \quad M_z = - \int_S \sigma_x y dS \quad (3.11)$$

Estas ecuaciones muestran la relación entre los esfuerzos y las tensiones actuantes en una sección y serán empleadas a menudo en los Capítulos posteriores.

La Figura 3.23 muestra el convenio de signos utilizado para las componentes de tensión y de momento. Las tensiones sobre la sección son positivas si tienen el sentido de los correspondientes semiejes positivos. Los momentos son positivos si, adoptando el criterio de la mano derecha, el sentido de los vectores momento es positivo.

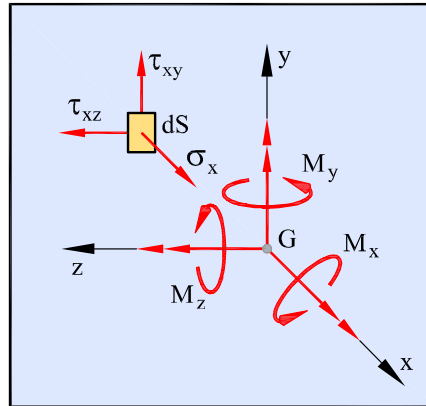


Fig. 3.23: Convenio de signos de tensiones y momentos

3.10 Esfuerzos en piezas de plano medio

Consideremos una pieza de plano medio tal como la que se muestra en la Figura 3.24. Llamaremos XY al plano medio que, recordemos, contiene a la directriz, es plano de simetría de las secciones rectas y contiene también a las cargas que actúan sobre la pieza.

El triedro de referencia xyz local de una sección genérica se define de la forma siguiente. El eje x es tangente a la directriz de la pieza en el centro de gravedad de la sección G , y orientado según el sentido positivo de recorrido de la directriz. El eje y está también en el plano medio que, por simetría, es plano principal de inercia, y es normal al eje x , formando con éste un ángulo de $\pi/2$ radianes (antihorario). El eje z es normal a los ejes (x, y) y de sentido tal que el triedro (x, y, z) es dextrógiro. Así, el plano XY coincide con el plano xy , y el eje z es perpendicular a éste.

Al actuar las fuerzas exteriores sólo en el plano XY , la resultante \mathbf{R} de las fuerzas que actúan a uno u otro lado de la sección está contenida en dicho plano, y se descompone en un esfuerzo axial N (según el eje x) y un esfuerzo cortante T (según el eje y). Por simetría respecto al plano medio, T_z es nulo. Por el mismo motivo, el momento resultante \mathbf{M} de las fuerzas que actúan a uno u otro lado de la sección es perpendicular al plano XY y se llama momento flector M a su única componente según el eje z . Las otras dos componentes M_t y M_y son nulas por simetría respecto al plano medio.

Al referirnos a los esfuerzos en piezas de plano medio adoptaremos el siguiente convenio de signos, que se muestra en la Figura 3.25:

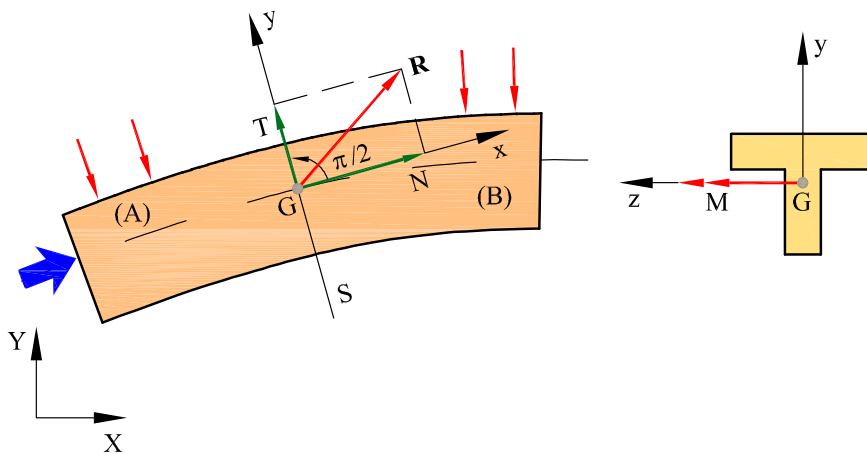


Fig. 3.24: Esfuerzos en piezas de plano medio

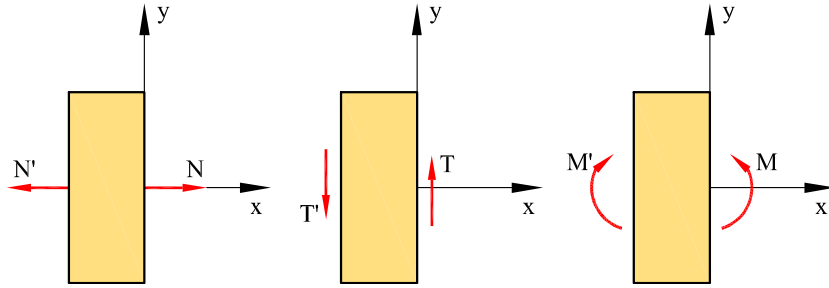


Fig. 3.25: Convenio de signos para esfuerzos en piezas de plano medio

- El esfuerzo axial N es positivo si es de tracción (según el sentido positivo del eje x en la cara frontal) y negativo si es de compresión.
- El esfuerzo cortante T es positivo si hace girar la rebanada en sentido antihorario (según el sentido positivo del eje y en la cara frontal), y negativo en caso contrario.
- El momento flector M es positivo si es antihorario sobre la cara frontal (según el sentido positivo del eje z en la cara frontal), y negativo en caso contrario.

3.11 Ecuaciones de equilibrio en piezas rectas

Consideremos el equilibrio de una rebanada diferencial de una pieza recta *de plano medio*, sobre la que actúan unas fuerzas repartidas por unidad de longitud, de componentes (p_x, p_y) según los ejes coordenados, aplicadas en la directriz de dicha rebanada. Tal como se muestra en la Figura 3.26, se tiene:

a) por equilibrio de fuerzas según el eje x :

$$-N + p_x dx + (N + dN) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = -\frac{dN}{dx} \quad (3.12)$$

b) por equilibrio de fuerzas según el eje y :

$$-T_y + p_y dx + (T_y + dT_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_y = -\frac{dT_y}{dx} \quad (3.13)$$

c) por equilibrio de momentos respecto al centro de gravedad de la cara frontal:

$$-M_z + T_y dx + (M_z + dM_z) - p_y \frac{dx^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_y = -\frac{dM_z}{dx} \quad (3.14)$$

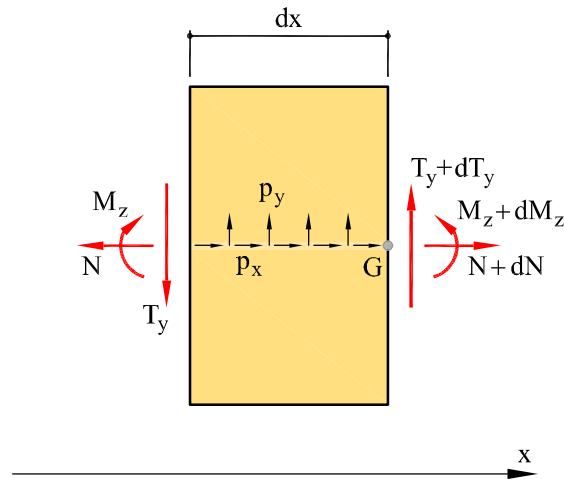


Fig. 3.26: Acciones sobre una rebanada de pieza recta

donde se ha despreciado el término de segundo orden debido a las fuerzas repartidas.

Estas ecuaciones establecen relaciones diferenciales entre la ley de cargas y las leyes de esfuerzos de una viga recta de plano medio. En casos sencillos, estas relaciones pueden integrarse directamente para calcular las leyes de esfuerzos. En casos más complejos, estas relaciones sirven de ayuda para calcular o dibujar dichas leyes.

La generalización de las ecuaciones diferenciales de equilibrio de la rebanada para una viga de directriz recta general (no de plano medio), sometida a unas fuerzas repartidas por unidad de longitud de componentes (p_x , p_y , p_z) según el triedro local de referencia se pueden obtener de forma análoga, y son:

$$\begin{aligned}
 p_x &= -\frac{dN}{dx} & p_y &= -\frac{dT_y}{dx} & p_z &= -\frac{dT_z}{dx} \\
 T_y &= -\frac{dM_z}{dx} & T_z &= +\frac{dM_y}{dx}
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Ejemplo 3.11.1

Calcular los esfuerzos en la sección media de la pieza sometida a la acción de la carga p uniformemente repartida y a las fuerzas F y V que se indican (Figura 3.27).

Datos: $L = 10$ m, $h = 0,80$ m, $b = 0,35$ m, $p = 3$ kN/m, $F = 30$ kN y $V = 15$ kN.

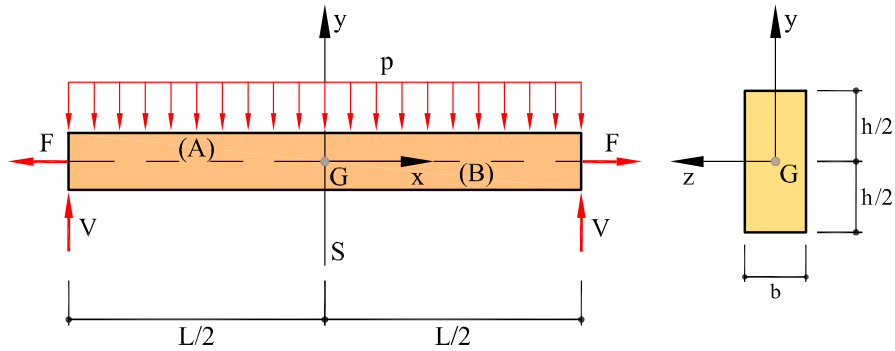


Fig. 3.27: Viga del Ejemplo 3.11.1

Llamaremos N , T y M los esfuerzos axil, cortante y flector en la sección media de la viga. Esta sección divide a la pieza en dos partes: (A) a la izquierda y (B) a la derecha (Figura 3.28). Por equilibrio de la parte (A):

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -F + N = 0 \\ \sum F_y &= T + V - \frac{pL}{2} = 0 \\ \sum M_G &= M - V\frac{L}{2} + \frac{pL^2}{8} = 0\end{aligned}$$

Resolviendo se obtiene:

$$N = 30 \text{ kN} \quad T = -15 + \frac{3 \cdot 10}{2} = 0 \quad M = 15 \cdot 5 - \frac{3 \cdot 10^2}{8} = 37,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

que son los esfuerzos en la sección media de la viga.

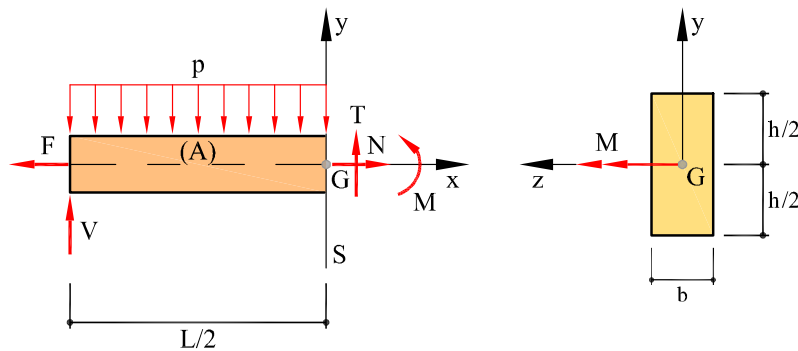


Fig. 3.28: Equilibrio de fuerzas y momentos

Ejemplo 3.11.2

Calcular los esfuerzos en la sección media de la pieza sometida a las cargas que se indican (Figura 3.29).

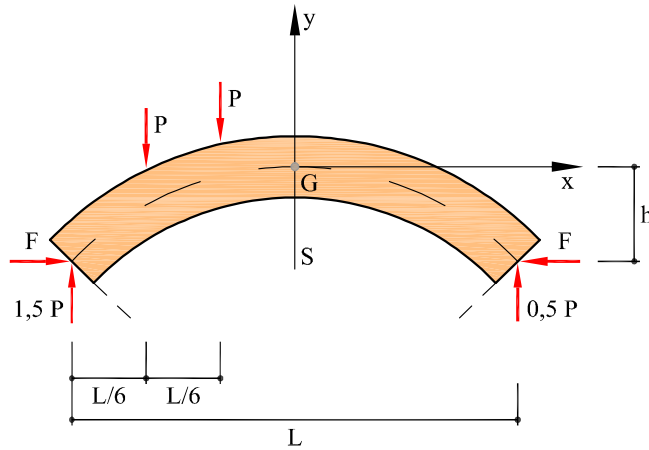


Fig. 3.29: Viga del Ejemplo 3.11.2

Sean N , T y M los esfuerzos axial, cortante y flector en la sección media de la viga, respectivamente. Esta sección divide a la pieza en dos partes: (A) a la izquierda y (B) a la derecha (Figura 3.30).

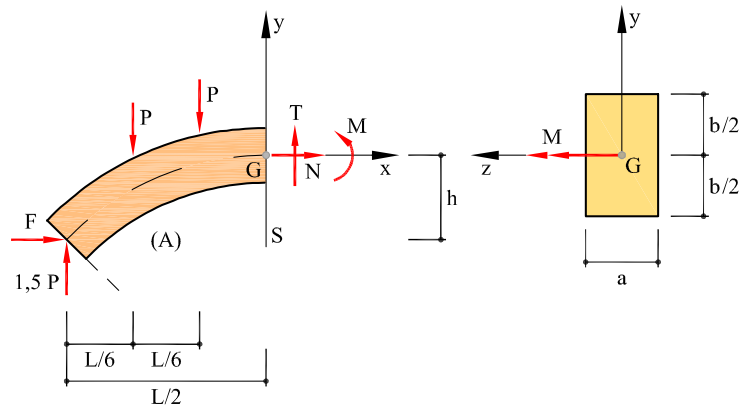


Fig. 3.30: Equilibrio de fuerzas y momentos

Por equilibrio de la parte (A) puede escribirse (Figura 3.30):

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F + N = 0 \\ \sum F_y &= T + 1,5P - 2P = 0 \\ \sum M_G &= M - 1,5P\frac{L}{2} + \frac{2}{6}PL + \frac{1}{6}PL + Fh = 0\end{aligned}$$

Resolviendo, se tiene:

$$N = -F \qquad T = 0,5P \qquad M = 0,25PL - Fh$$

que son los esfuerzos en la sección media de la pieza.

3.12 Estructuras isostáticas e hiperestáticas

3.12.1 Equilibrio estático y resolución de estructuras

Las fuerzas (acciones y reacciones) que actúan sobre una estructura deben estar en equilibrio estático. Esto significa que deben formar un sistema de fuerzas de resultante nula y de momento resultante nulo; por tanto, deben cumplir las ecuaciones que se conocen con el nombre de *ecuaciones de la estática*, que, en forma vectorial, pueden escribirse como:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \qquad (3.16a)$$

$$\sum_i \mathbf{M}_i^o = 0 \qquad (3.16b)$$

donde \mathbf{F}_i representa a cada una de las fuerzas que actúan sobre la estructura, \mathbf{M}_i^o representa el momento de cada una de las fuerzas respecto de un punto arbitrario O y el símbolo \sum_i representa la suma sobre todas las fuerzas i .

En el caso de estructuras planas cargadas en su plano, las anteriores ecuaciones vectoriales se reducen a tres ecuaciones escalares de la forma:

$$\sum_i (F_x)_i = 0 \quad ; \quad \sum_i (F_y)_i = 0 \quad ; \quad \sum_i (M_z)_i^o = 0 \qquad (3.17)$$

donde los ejes x e y están sobre el plano de la estructura y el eje z es perpendicular a éstos.

Pero la condición de equilibrio estático, tal como lo expresan las Ecs. (3.14) o (3.17) son condiciones *necesarias* para el equilibrio, pero no son *suficientes*. Esto es porque la condición de equilibrio y las correspondientes ecuaciones que lo expresan

matemáticamente, no son sólo aplicables a la estructura considerada en su conjunto, sino que debe satisfacerse también para cada parte integrante de ella, siempre que se consideren de forma explícita las fuerzas y momentos que el resto de la estructura ejerce sobre la parte considerada. En particular, las piezas que forman una estructura de barras deben estar en equilibrio, siempre que se consideren las fuerzas y momentos de extremo de barra que la estructura ejerce sobre las piezas. Análogamente, los nudos de la estructura deben estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas y momentos que actúan en los extremos de las barras que concurren en ellos.

En Mecánica de Estructuras se llama *resolver* una estructura a calcular el valor de los esfuerzos que actúan sobre cada una de las secciones de todas las piezas que componen la estructura. Cuando este cálculo puede realizarse íntegramente utilizando sólo las *ecuaciones de la estática*, la estructura se llama *isostática* o *estáticamente determinada*. En caso contrario, se le llama *hiperestática* o *estáticamente indeterminada*.

3.12.2 Estructuras articuladas

Las estructuras articuladas de piezas rectas con cargas aplicadas en los nudos trabajan exclusivamente a esfuerzo axial siendo además estos axiles constantes. Dichas estructuras son *isostáticas* cuando pueden resolverse sólo con las ecuaciones de la estática.

El número de reacciones exteriores (nr) más el número de axiles a determinar, uno por barra (nb), debe ser igual al número de ecuaciones de la estática que se pueden plantear. En estructuras articuladas planas pueden plantearse dos ecuaciones de equilibrio por nudo ($2nn$), por tanto, para que la estructura esté en equilibrio debe cumplirse:

$$nr + nb = 2nn \quad (3.18)$$

En la Figura 3.31 se muestran dos ejemplos de estructuras articuladas isostáticas: en la estructura (a) puede verse que el número de reacciones incógnita es $nr = 3$ y los axiles a determinar (uno por barra) son $nb = 5$, por tanto, el número de incógnitas de la estructura es igual a 8. Dado que el número de ecuaciones de la estática que pueden plantearse es $2nn = 2 \cdot 4 = 8$, la estructura puede resolverse sólo con las ecuaciones de la estática, por tanto es isostática. En la estructura (b) el número de reacciones incógnitas $nr = 4$ y el de los esfuerzos axiles incógnita es $nb = 6$, el número de ecuaciones de equilibrio es igual a $2nn = 2 \cdot 5 = 10$, la estructura también en este caso puede resolverse sólo con las condiciones de la estática y es isostática.

Las estructuras articuladas son *hiperestáticas* cuando las condiciones de equilibrio no bastan para esolver la estructura, es decir:

$$nr + nb > 2nn \quad (3.19)$$

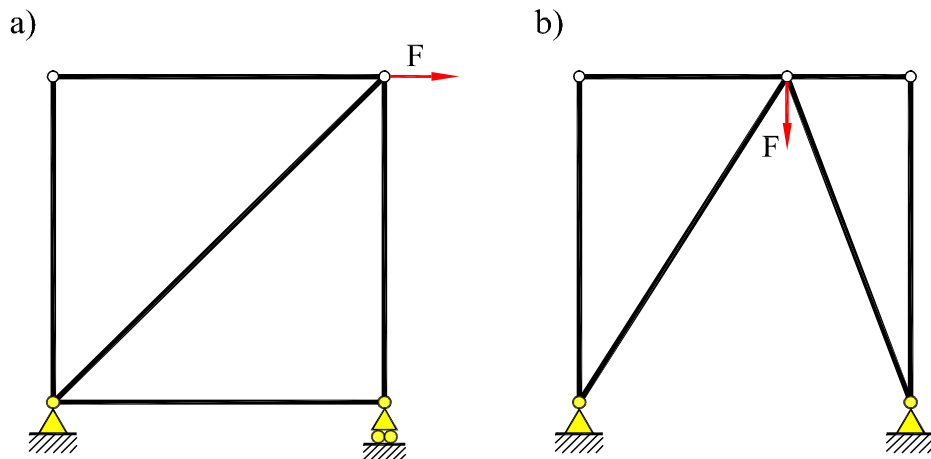


Fig. 3.31: Estructuras articuladas isostáticas

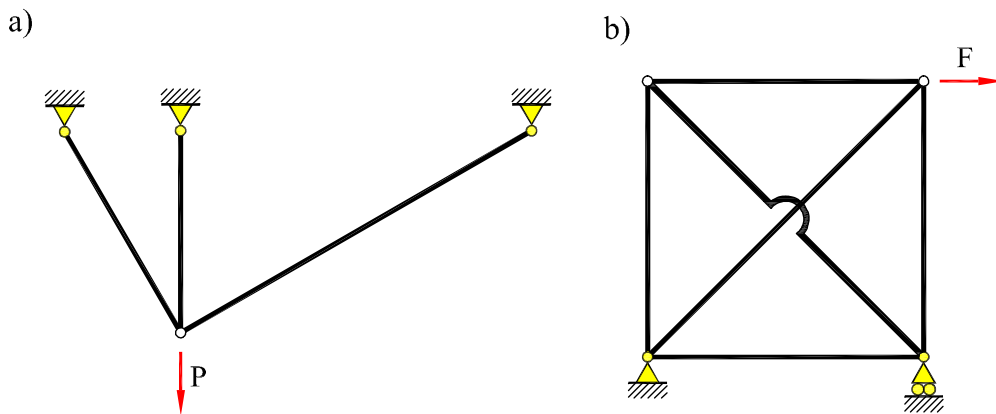


Fig. 3.32: Estructuras articuladas hiperestáticas

En la Figura 3.32 pueden verse dos ejemplos de estructuras articuladas hiperestáticas. Así, en la estructura (a) el número de reacciones es $nr = 6$, el número de barras es $nb = 3$ y el número de ecuaciones de la estática es $2nn = 2 \cdot 4 = 8$, por tanto, la estructura articulada (a) es hiperestática de grado 1.

En la estructura (b) se tiene que el número de reacciones es $nr = 3$, el número de esfuerzos axiales incógnitas es $nb = 6$ y el número de ecuaciones de equilibrio es $2nn = 2 \cdot 4 = 8$. También en este caso, las incógnitas son mayores que las condiciones de la estática y la estructura articulada (b) es hiperestática de grado 1.

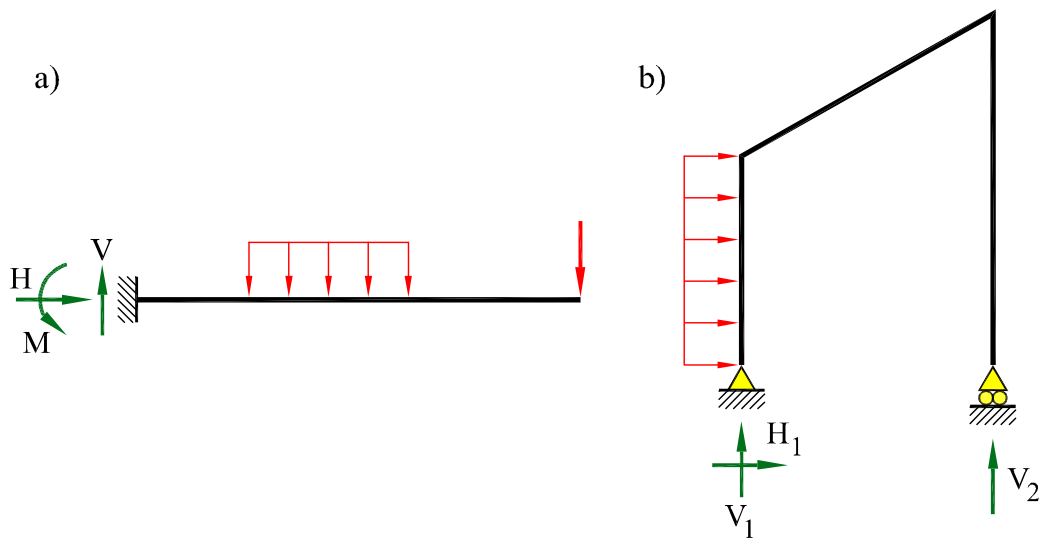


Fig. 3.33: Estructuras reticuladas isostáticas

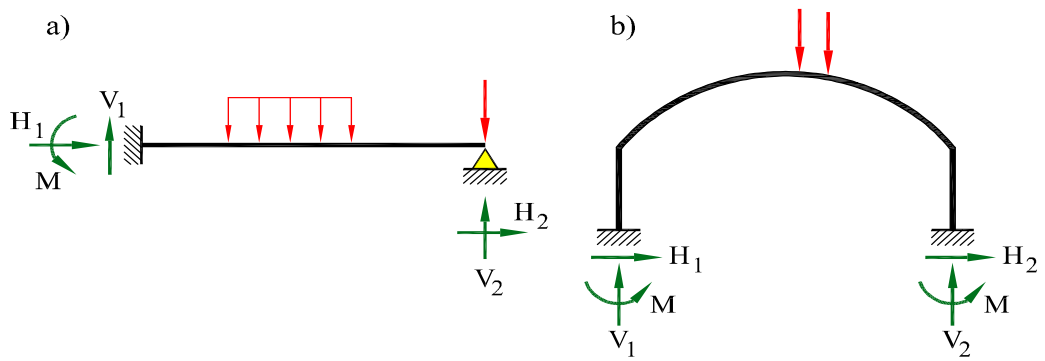


Fig. 3.34: Estructuras reticuladas hiperestáticas

3.12.3 Estructuras reticuladas

Las estructuras reticuladas como se han definido anteriormente están formadas por piezas prismáticas unidas mediante nudos rígidos. En estas estructuras el grado de hiperestatismo se define con independencia de si el origen de éste es la indeterminación de las reacciones en los apoyos o en enlaces internos:

$$h = n - e \quad (3.20)$$

donde n es el número de reacciones (externas o internas) que hay que conocer para poder determinar los esfuerzos actuantes en cualquier sección de la estructura, y e es el número de ecuaciones de la estática.

Una vez calculado el valor h , para

$$\begin{aligned} h = 0 & \quad \text{la estructura es isostática,} \\ h > 0 & \quad \text{la estructura es hiperestática de grado } h, \\ h < 0 & \quad \text{la estructura es un mecanismo de grado } h. \end{aligned}$$

En la Figura 3.33 se muestran dos ejemplos de estructuras reticuladas isostáticas: en la estructura (a) puede verse que el número de reacciones incógnita es $n = 3$ y el número de ecuaciones de equilibrio es $e = 3$, por tanto, el grado de hiperestatismo $h = n - e = 3 - 3 = 0$ la estructura puede resolverse sólo con las ecuaciones de la estática, por tanto es isostática. En la estructura (b) el número de reacciones incógnitas $n = 3$ y el número de ecuaciones de equilibrio es $e = 3$, por tanto, el grado de hiperestatismo es $h = n - e = 3 - 3 = 0$, la estructura también en este caso puede resolverse sólo con las condiciones de la estática y es isostática.

En la Figura 3.34 pueden verse dos ejemplos de estructuras reticuladas hiperestáticas. En la estructura (a) el número de reacciones es $n = 5$ y el número de ecuaciones de la estática es $e = 3$, por tanto, la estructura reticulada (a) es hiperestática de grado $h = n - e = 5 - 3 = 2$.

En la estructura (b) el número de reacciones es $n = 6$, y el número de ecuaciones de equilibrio es $e = 3$. También en este caso, las incógnitas son mayores que las condiciones de la estática y la estructura reticulada (b) es hiperestática de grado $h = 3$.

4 Leyes de Esfuerzos

4.1 Introducción

El Principio de Saint-Venant (Sección 3.7.3) establece que, en una pieza prismática, las tensiones (y las deformaciones) que actúan sobre una sección recta, alejada de los puntos de aplicación de un sistema de cargas, sólo dependen de la fuerza \mathbf{R} y del momento \mathbf{M} resultantes de las fuerzas situadas a un lado de la sección considerada.

Las componentes de la fuerza \mathbf{R} y momento \mathbf{M} resultantes sobre el sistema de referencia de la sección definen los *esfuerzos* sobre la sección (Sección 3.8).

Por tanto, el Principio de Saint-Venant dice que las tensiones (y deformaciones) en la sección sólo dependen de los esfuerzos que actúan sobre ésta. Esto convierte la determinación de los esfuerzos en el punto inicial de cualquier cálculo de Resistencia de Materiales.

4.2 Leyes de esfuerzos

En las estructuras isostáticas es posible calcular la fuerza y momento resultantes, \mathbf{R} y \mathbf{M} , sobre una sección S cualquiera de la estructura utilizando únicamente las ecuaciones de equilibrio estático. De acuerdo con lo expuesto en la Sección 3.8, se definen los *esfuerzos* sobre la sección como las proyecciones de estas resultantes sobre un triedro cartesiano dextrógiro xyz , con origen en el centro de gravedad G de la sección S , en el que el eje x es normal a la sección S y tangente a la directriz de la viga, y los ejes (y, z) son los ejes principales de inercia de la sección S .

Así, proyectando la fuerza resultante \mathbf{R} sobre los ejes (x, y, z) , se definen el esfuerzo axial N , el esfuerzo cortante T_y y el esfuerzo cortante T_z , respectivamente. Análogamente, proyectando el momento resultante \mathbf{M} sobre los ejes (x, y, z) , se definen el momento torsor M_t , el momento flector M_y y el momento flector M_z , respectivamente.

Se llama *leyes de esfuerzos* o *diagramas de esfuerzos* a la representación gráfica

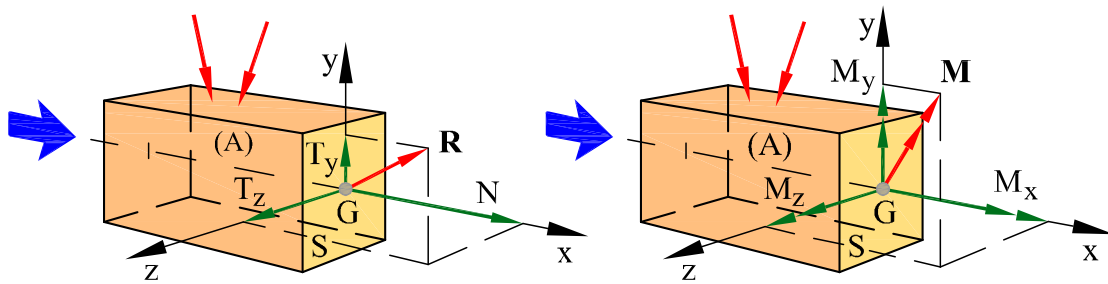


Fig. 4.1: Definición de esfuerzos en una sección

de la variación de dichos esfuerzos a lo largo de las piezas de la estructura. Esta representación permite determinar, para cada pieza, las secciones de ésta en las que los esfuerzos alcanzan sus valores máximos. Esta es una información imprescindible para el dimensionamiento de las piezas o, una vez dimensionadas, para la comprobación *a posteriori* de que se cumplen los criterios de resistencia.

En una estructura isostática la determinación de las leyes de esfuerzos sigue los pasos siguientes:

1. determinación de las reacciones exteriores,
2. determinación de la variación de los diferentes esfuerzos en cada pieza,
3. determinación de los valores máximos de los esfuerzos, a nivel de pieza y estructura.

Las relaciones diferenciales entre las leyes de cargas aplicadas y los esfuerzos obtenidos en la Sección 3.11 son de gran utilidad a la hora de definir la forma que tienen las leyes de esfuerzos en cada barra.

4.3 Leyes de esfuerzos en estructuras articuladas

Las estructuras articuladas son aquellas formadas por piezas prismáticas unidas entre sí por nudos articulados (Sección 3.12.2). En las estructuras articuladas isostáticas es posible calcular las reacciones sólo aplicando las ecuaciones de la estática. Además, bajo cargas aplicadas en los nudos, los esfuerzos sobre una sección se reducen al esfuerzo axial N de valor constante.

Por tanto, la determinación de las leyes de esfuerzos sigue los pasos siguientes:

1. determinación de las reacciones exteriores,
2. determinación de los esfuerzos axiales en cada pieza.

A continuación, se desarrollan algunos ejemplos de cálculo de axiles en estructuras articuladas planas. Se mantendrá la convención de signos adoptada al definir el equilibrio de la rebanada de la pieza prismática recta (Sección 3.10).

Ejemplo 4.3.1

La estructura articulada ABC de la Figura 4.2 está formada por dos barras del mismo material. Para una carga P actuando en C , determinar los axiles en las barras.

Datos: $P = 40 \text{ kN}$, $a = 3 \text{ m}$ y $\alpha = 30^\circ$.

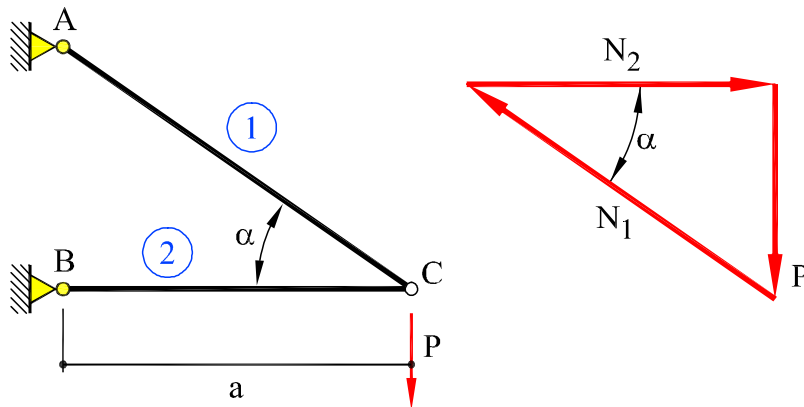


Fig. 4.2: Estructura del Ejemplo 4.3.1 y equilibrio de fuerzas en C

La estructura es isostática y los axiles en las barras 1 y 2 pueden calcularse directamente por equilibrio de fuerzas en el nudo C :

$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha} = 80 \text{ kN} \quad (\text{tracción})$$

$$N_2 = -\frac{P}{\tan \alpha} = -69,3 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

Ejemplo 4.3.2

La estructura articulada de la Figura 4.3 está formada por tres barras del mismo material. Para la fuerza que se indica F actuando en C , determinar los axiles en las barras.

Datos: $a = 5 \text{ m}$, $F = 20 \text{ kN}$.

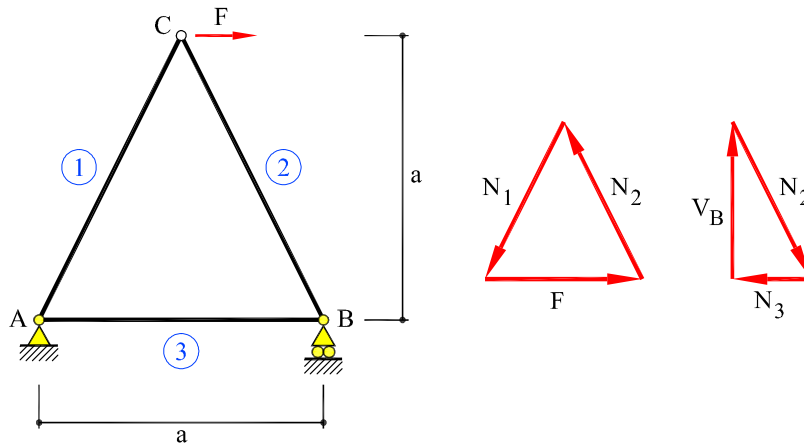


Fig. 4.3: Estructura del Ejemplo 4.3.2 y equilibrio de fuerzas en los nudos C y B

La estructura es isostática. Los axiles pueden calcularse considerando el equilibrio de fuerzas en los nudos.

Por equilibrio de fuerzas en el nudo C se obtiene el valor de los axiles en las barras 1 y 2, y por equilibrio en el nudo B se obtienen el valor del axil en la barra 3 (Figura 4.3):

$$N_1 = 22,4 \text{ kN} \quad N_2 = -22,4 \text{ kN} \quad N_3 = 10 \text{ kN}$$

Las barras 1 y 3 están traccionadas y la barra 2 está comprimida, tal como indican los signos de los esfuerzos axiles obtenidos.

Ejemplo 4.3.3

La estructura articulada de la Figura 4.4 está formada por cinco barras del mismo material. Determinar los axiles en las barras, para una fuerza horizontal F actuando en B . Datos: $a = 4 \text{ m}$, $F = 10 \text{ kN}$.

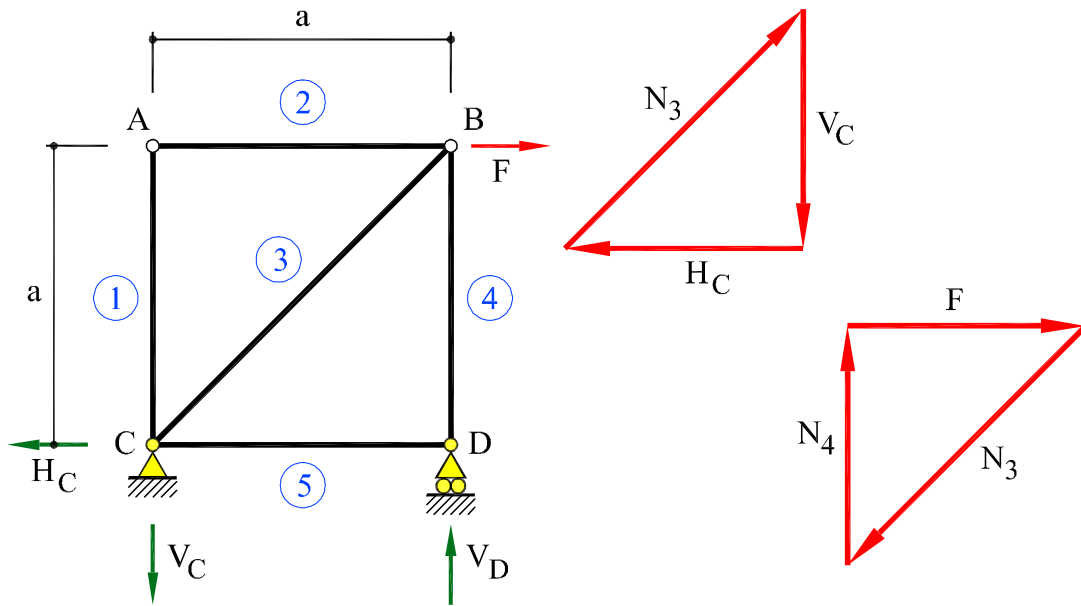


Fig. 4.4: Estructura del Ejemplo 4.3.2 y equilibrio de fuerzas en los nudos C y B

La estructura es isostática. Las reacciones en los apoyos C y D pueden determinarse por equilibrio (los sentidos se muestran en la Figura 4.4) :

$$H_C = F \quad (\leftarrow) \quad V_C = F \quad (\downarrow) \quad V_D = F \quad (\uparrow)$$

Los esfuerzos axiales pueden calcularse considerando el equilibrio de fuerzas en los nudos:

$$\text{nudo } D \Rightarrow N_4 = -F = 10 \text{ kN} \quad N_5 = 0$$

$$\text{nudo } C \Rightarrow N_1 = 0 \quad N_3 = \sqrt{2}F = 14,14 \text{ kN}$$

$$\text{nudo } A \Rightarrow N_2 = 0$$

Para la carga considerada se observa que las barras 1, 2 y 5 no trabajan, la barra 3 está traccionada y la barra 4 está comprimida.

Ejemplo 4.3.4

La estructura articulada de la Figura 4.5 está formada por cinco barras del mismo material. Para una fuerza P actuando en el nudo D , determinar los esfuerzos axiales en las barras. Datos: $a = 3 \text{ m}$, $P = 40 \text{ kN}$.

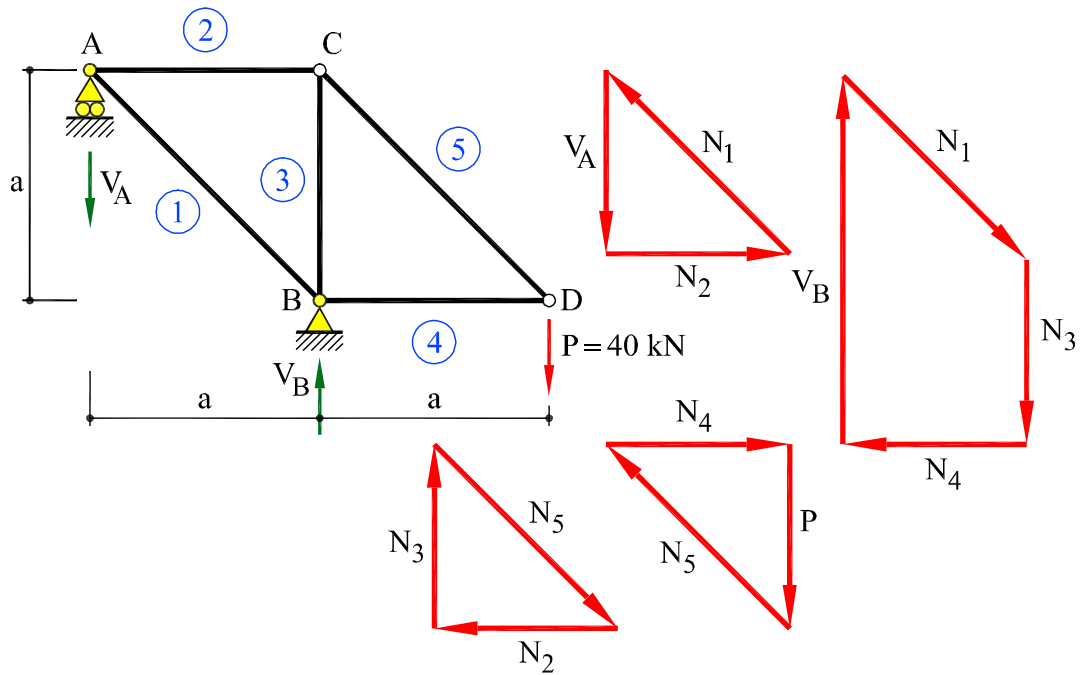


Fig. 4.5: Estructura del Ejemplo 4.3.4 y equilibrio de fuerzas en los nudos

La estructura es isostática. Las reacciones en los apoyos A y B pueden determinarse por equilibrio (los sentidos se muestran en la Figura 4.5) :

$$V_A = P = 40 \text{ kN} \quad (\downarrow) \quad V_B = 2P = 80 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

Los axiles se calculan considerando el equilibrio de fuerzas en los nudos (Figura 4.5):

$$N_1 = -\sqrt{2}P = -56,57 \text{ kN} \quad N_2 = N_4 = P = 40 \text{ kN}$$

$$N_3 = -P = -40 \text{ kN} \quad N_5 = \sqrt{2}P = 56,57 \text{ kN}$$

Como puede verse, en la estructura del ejemplo bajo la carga indicada, las barras 1 y 3 trabajan a compresión y las barras 2, 4 y 5 están traccionadas.

Ejemplo 4.3.5

La estructura articulada de la Figura 4.6 está formada por siete barras del mismo material. Determinar los esfuerzos axiles en las barras para el sistema de cargas que se indica. Datos: $a = 5 \text{ m}$, $F = 50 \text{ kN}$.

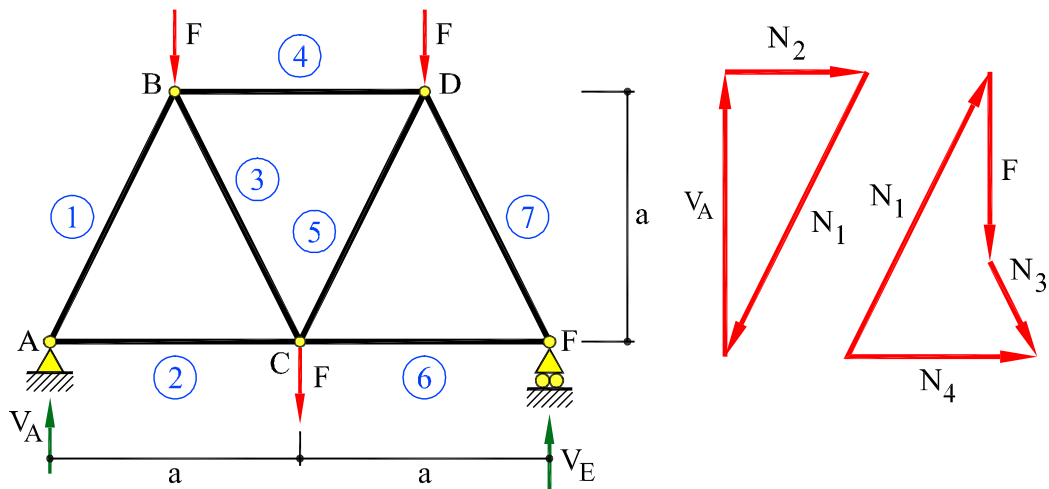


Fig. 4.6: Estructura del Ejemplo 4.3.5 y equilibrio de fuerzas en los nudos

La estructura es isostática y por tanto, las reacciones en los apoyos A y E pueden determinarse sólo por consideraciones de equilibrio (Figura 4.6) :

$$V_A = V_E = 1,5F = 75 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

Para el estado de carga que se analiza, los nudos A y E son simétricos y también los nudos B y D . Los esfuerzos axiles pueden calcularse considerando el equilibrio de fuerzas en los nudos (Figura 4.6):

$$N_1 = N_7 = -1,678F = -83,9 \text{ kN} \quad N_2 = N_6 = 0,75F = 37,5 \text{ kN}$$

$$N_3 = N_5 = 0,568F = 28,4 \text{ kN} \quad N_4 = -F = -50 \text{ kN}$$

Se observa que para la carga considerada, las barras 1, 4 y 7 están comprimidas y las barras 2, 3, 5 y 6 están traccionadas.

Ejemplo 4.3.6

La estructura articulada de la Figura 4.7 está formada por siete barras del mismo material. Determinar los esfuerzos axiles en las barras para la fuerza F que se indica. Datos: $a = 5 \text{ m}$, $F = 50 \text{ kN}$.

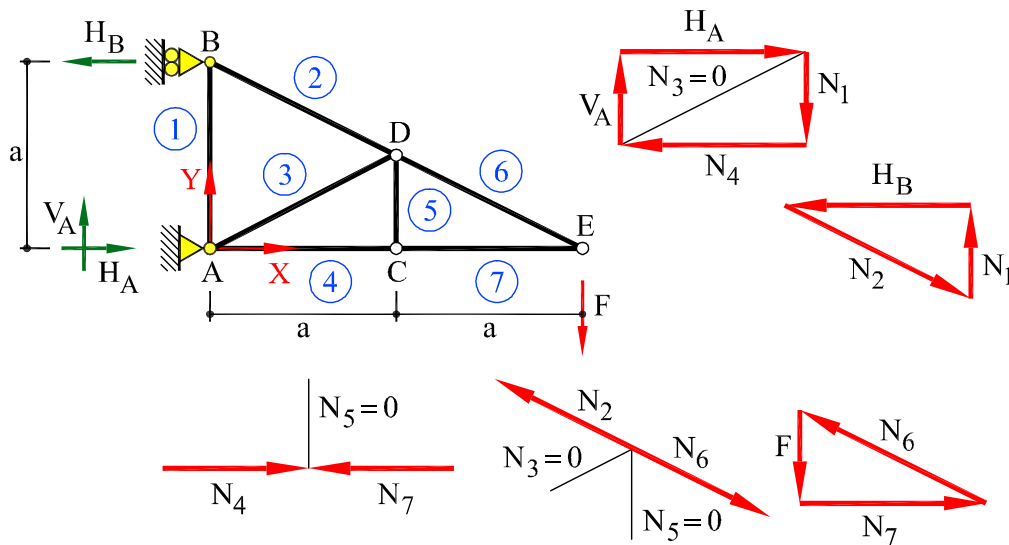


Fig. 4.7: Estructura del Ejemplo 4.3.6 y equilibrio de fuerzas en los nudos

La estructura es isostática y las reacciones en los apoyos A y B pueden determinarse sólo por equilibrio (Figura 4.7):

$$H_A = 2F = 100 \text{ kN} (\rightarrow) \quad V_A = F = 50 \text{ kN} (\uparrow) \quad H_B = 2F = 100 \text{ kN} (\leftarrow)$$

Los esfuerzos axiles pueden calcularse planteando el equilibrio de fuerzas en los nudos:

$$\text{Nudo } A \quad N_1 = -50 \text{ kN} \quad N_3 = 0 \quad N_4 = -100 \text{ kN}$$

$$\text{Nudo } B \quad N_1 = -50 \text{ kN} \quad N_2 = 112 \text{ kN}$$

$$\text{Nudo } C \quad N_4 = -100 \text{ kN} \quad N_5 = 0 \quad N_7 = -100 \text{ kN}$$

$$\text{Nudo } E \quad N_6 = 112 \text{ kN} \quad N_7 = -100 \text{ kN}$$

Para la carga analizada las barras 3 y 5 no trabajan, las barras 1, 4 y 7 están comprimidas y las barras 2 y 6 están traccionadas.

4.4 Leyes de esfuerzos en estructuras de plano medio

Las estructuras de plano medio están formadas por piezas de plano medio unidas entre sí por nudos rígidos y de tal manera que el plano medio de todas las piezas es el mismo (Sección 3.10).

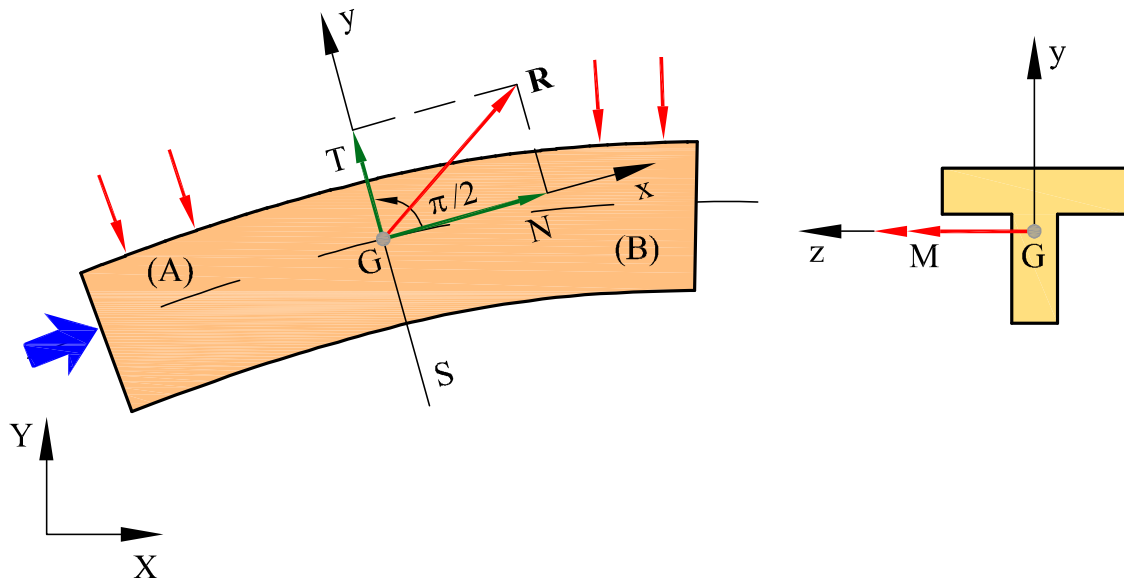


Fig. 4.8: Esfuerzos en estructuras de plano medio

En estas condiciones se pueden tomar los ejes locales de referencia (x, y, z) de tal manera que el plano medio de la pieza contenga a los ejes x e y , ya que es un plano de simetría de éstas. En estas condiciones las componentes de \mathbf{R} y \mathbf{M} se reducen al esfuerzo axial N , el esfuerzo cortante $T = T_y$ y el momento flector $M = M_z$, respectivamente (Figura 4.8).

Por tanto, la determinación de las leyes de esfuerzos sigue los pasos siguientes:

1. determinación de las reacciones exteriores,
2. determinación de la variación de los diferentes esfuerzos en cada pieza,
3. determinación de los valores máximos de los esfuerzos, a nivel de pieza y estructura.

Las relaciones diferenciales entre las leyes de cargas aplicadas y los esfuerzos obtenidos en la Sección 3.11 son de gran utilidad a la hora de definir la forma que tienen las leyes de esfuerzos en cada barra.

A continuación, se desarrollan algunos ejemplos de piezas rectas y estructuras de plano medio. Se mantendrá la convención de signos adoptada al definir el equilibrio de la rebanada de la pieza prismática recta (Sección 3.10).

Ejemplo 4.4.1

Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos de la viga ABC de la Figura 4.9 sometida a la acción de la carga p uniformemente repartida en el tramo BC .

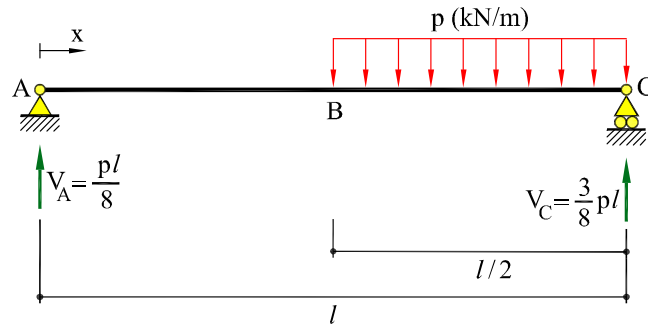


Fig. 4.9: Estructura del Ejemplo 4.4.1

Cálculo de las reacciones

Teniendo en cuenta las condiciones de equilibrio de la estática (suma de fuerzas verticales igual cero y suma de momentos respecto al apoyo A igual a cero, respectivamente), puede escribirse:

$$V_A + V_C = p \frac{l}{2} \quad ; \quad V_C l = p \frac{l}{2} \frac{3l}{4}$$

Por tanto, las reacciones en los apoyos A y C son :

$$V_A = \frac{1}{8} pl \quad (\uparrow) \quad ; \quad V_C = \frac{3}{8} pl \quad (\uparrow)$$

Ley de momentos flectores

La ley de momentos flectores se obtiene calculando, para una sección dada, el momento resultante en la sección de las fuerzas aplicadas a un lado de la misma. En el tramo AB , para una sección a una distancia x del apoyo A , y calculando dorsalmente, se tiene:

$$M(x) = V_A x = \frac{1}{8} pl x$$

o sea, una ley lineal a lo largo del tramo AB , con un máximo en la sección $x = l/2$, de valor $M_B = pl^2/16$. En el tramo BC , para una sección a una distancia x del apoyo A , y calculando dorsalmente, puede escribirse:

$$M(x) = V_A x - \frac{p}{2} \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{pl}{8} \left[-\frac{4x^2}{l} + 5x - l\right]$$

En este caso, la ley de variación del momento flector es parabólica y la distancia a la que se produce el valor máximo se obtiene derivando respecto a la variable x e igualando a cero:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{pl}{8} \left[-\frac{8x}{l} + 5\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5l}{8}$$

y se tiene:

$$M_{\max} = M\left(x = \frac{5l}{8}\right) = \frac{9}{128} pl^2$$

Obsérvese que la ley de flectores es continua en el punto B , y también lo es su derivada.

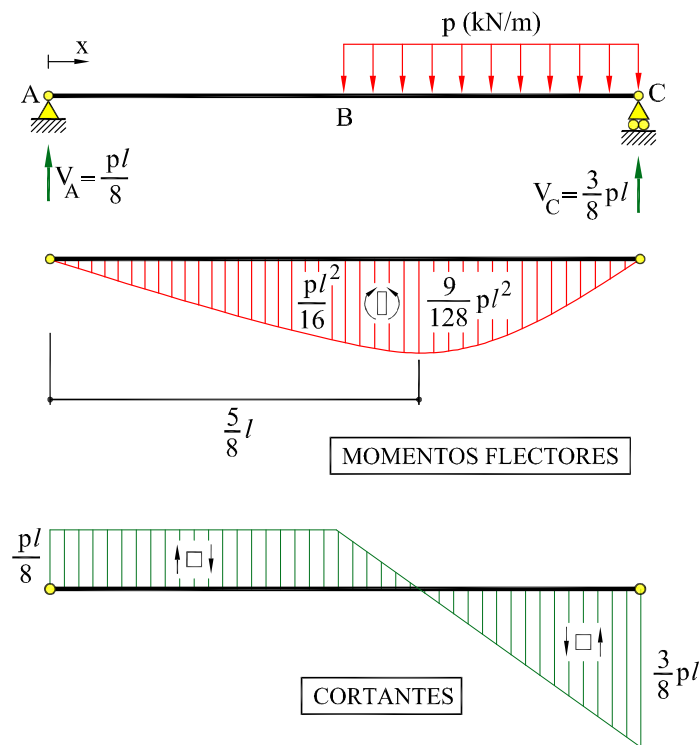


Fig. 4.10: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 4.4.1

Ley de esfuerzos cortantes

Calculemos la resultante \mathbf{R} en una sección cualquiera de la viga sumando las fuerzas aplicadas a un lado de la sección. En este caso la resultante tiene como única componente el esfuerzo cortante T_y y, por lo tanto, los axiles son nulos en toda la pieza.

En el tramo AB , calculando dorsalmente, se tiene que la ley de variación es constante de valor igual a la reacción V_A . En el tramo BC , en una sección situada a una distancia x del apoyo A , y calculando dorsalmente, la proyección de \mathbf{R} sobre la sección es igual a la suma de la reacción V_A más la resultante de la carga repartida comprendida entre la sección B y la sección considerada; por tanto, la ley de esfuerzo cortante es lineal. Se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Tramo } AB & : \quad T_y = V_A & = -\frac{1}{8}pl \\ \text{Tramo } BC & : \quad T_y = V_A + p\left(x - \frac{l}{2}\right) & = -\frac{5}{8}pl + px \end{aligned}$$

En la Figura 4.10 se representan las reacciones, diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes, respectivamente. Se observa que a una distribución constante del cortante le corresponde una variación lineal del flector, y que a una distribución lineal del cortante le corresponde una variación parabólica del flector.

Ejemplo 4.4.2

La viga $ABCDE$ de la Figura 4.11 está sometida a una carga puntual P de 200 kN en la sección B y a una carga uniformemente repartida p de 20 kN/m en el tramo CE . Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

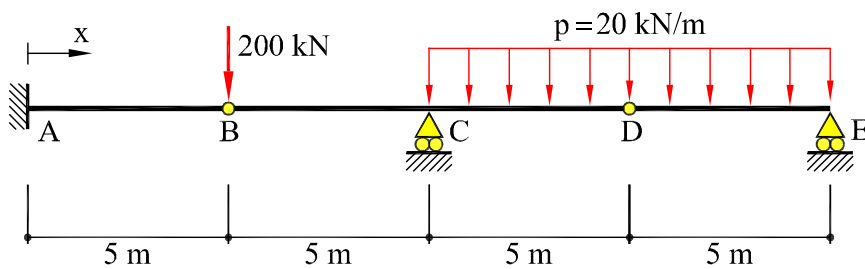


Fig. 4.11: Estructura del Ejemplo 4.4.2

Cálculo de reacciones

Aplicando las condiciones de equilibrio (suma nula de fuerzas verticales, suma nula de momentos respecto al punto A y momento flector nulo en las rótulas B y D), y trabajando en kN y m, pueden escribirse las siguientes ecuaciones (ver Figura 4.12):

$$\begin{aligned} V_A + V_C + V_E &= 400 \\ M_A + 10V_C + 20V_E &= 4.000 \\ M_A - 5V_A &= 0 \\ 5V_E - 250 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones, se obtienen los valores de las reacciones en el empotramiento A y en los apoyos C y E :

$$\begin{aligned} V_A &= 100 \text{ kN } (\uparrow) & ; & & V_C &= 250 \text{ kN } (\uparrow) \\ M_A &= 500 \text{ kN} \cdot \text{m } (\odot) & ; & & V_E &= 50 \text{ kN } (\uparrow) \end{aligned}$$

Ley de momentos flectores

En el tramo AB , cortando la estructura a una distancia x del apoyo A y calculando el momento flector dorsalmente se obtiene:

$$M(x) = -M_A + V_A x = -500 + 100x$$

que es una ley lineal. Para $x = 5$ m se tiene $M_B = 0$, como corresponde a una rótula. En el tramo BC se tiene:

$$M(x) = -M_A + V_A x - 200(x - 5) = 500 - 100x$$

que es también una ley lineal. Para $x = 10$ m se tiene el momento en el apoyo C , $M_C = -500$ kN·m. En el tramo CE , se tiene que:

$$\begin{aligned} M(x) &= -M_A + V_A x - 200(x - 5) + V_C (x - 10) - \frac{p}{2}(x - 10)^2 \\ &= -3.000 + 350x - 10x^2 \end{aligned}$$

que es una ley parabólica, con su valor máximo situado a una distancia x_{\max} del apoyo A que puede determinarse igualando a cero la derivada de la ley de momentos respecto a la variable x . En este caso, $x_{\max} = 17,5$ m y el valor del momento correspondiente es $M_{\max}(x = x_{\max}) = 62,5$ kN·m.

Ley de esfuerzos cortantes

Calculando la resultante de las fuerzas situadas a un lado de la sección y determinando la componente paralela a la misma se obtiene la variación del esfuerzo cortante en cada tramo de la estructura. En el tramo AB , calculando dorsalmente, dicha resultante es constante e igual a V_A :

$$T_y = V_A = -100 \text{ kN}$$

En el tramo BC , la resultante de las fuerzas a un lado de la sección es también un valor constante, igual a la suma de la reacción V_A más la fuerza aplicada en B :

$$T_y = V_A + 200 = 100 \text{ kN}$$

Por último, en el tramo CE y siguiendo el mismo procedimiento se obtiene:

$$T_y = 100 - 250 + 20(x - 10) = -350 + 20x$$

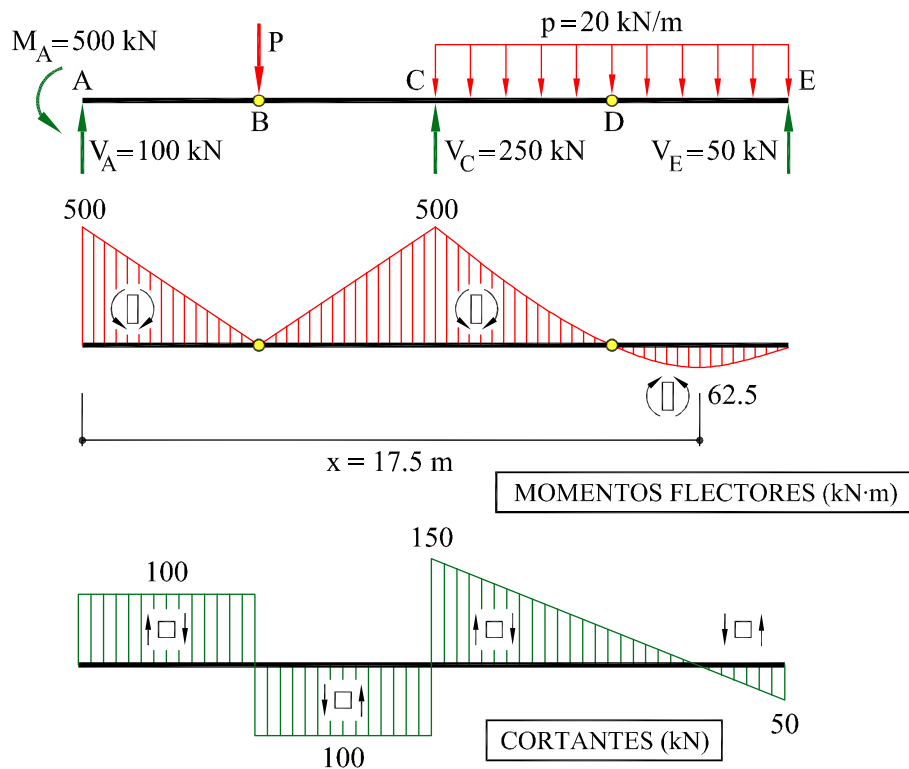


Fig. 4.12: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 4.4.2

que es una ley lineal. Nótese que en cada tramo la ley de esfuerzos cortantes coincide con la derivada de la ley de momentos flectores respecto a la variable x (cambiada de signo), tal como exige el equilibrio de la rebanada.

En la Figura 4.12 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la viga $ABCDE$.

Ejemplo 4.4.3

La estructura $ABCD$ de la Figura 4.13 está empotrada en la sección A y sometida a una carga vertical p de 30 kN/m, uniformemente repartida sobre el eje de la viga CBD , inclinada un ángulo α respecto a la horizontal. Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

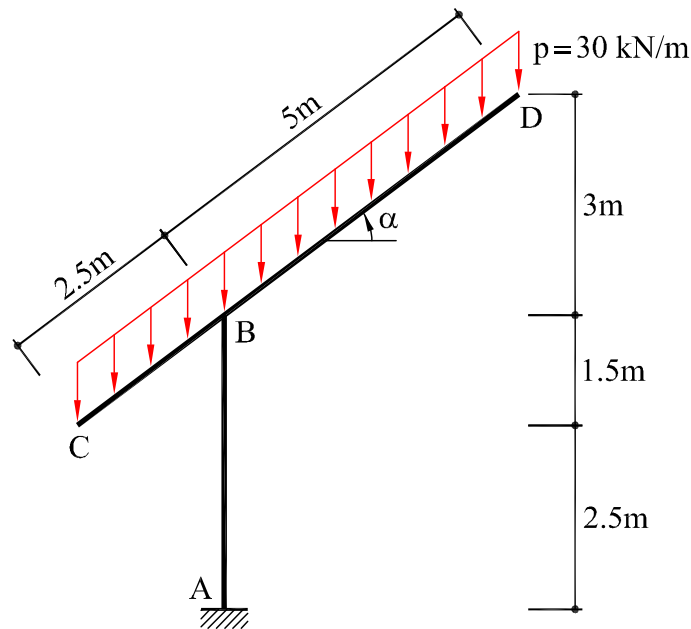


Fig. 4.13: Estructura del Ejemplo 4.4.3

Cálculo de reacciones

Partiendo de las ecuaciones de equilibrio se calculan en primer lugar las reacciones externas. Imponiendo que la suma de fuerzas verticales y la suma de momentos en el empotramiento A sean cero, se tiene (ver Figura 4.14a):

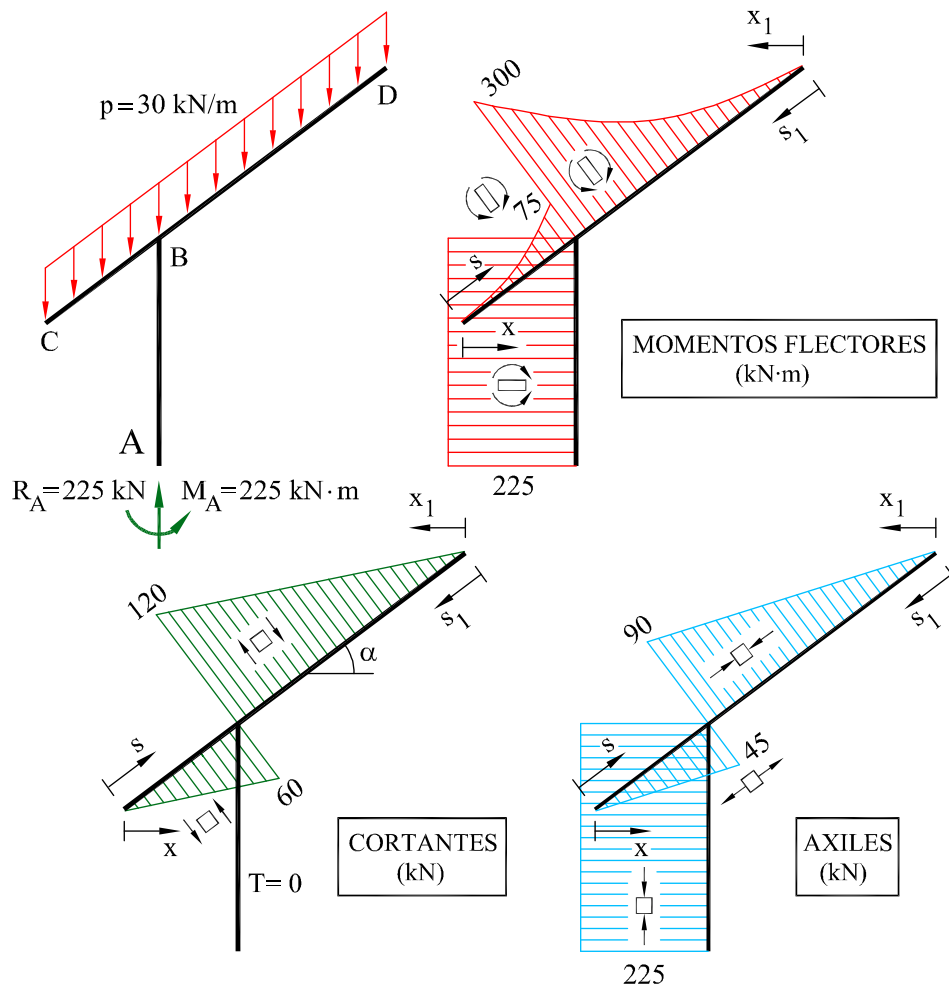


Fig. 4.14: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 4.4.3

$$R_A = 30 \cdot 7,5 = 225 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

$$M_A = 225 \cdot (5 - 3,75) \cos \alpha = 225 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\circlearrowleft)$$

donde α es el ángulo de inclinación de las barras BC y BD .

Ley de momentos flectores

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de momentos flectores en el pilar AB es constante y de valor $M_A = 225 \text{ kN} \cdot \text{m}$. En la viga CB , para una sección a una distancia s del extremo C (ver Figura 4.14b), se tiene:

$$M(x) = -30 s \frac{x}{2} = -15 s x = -15 \frac{x^2}{\cos \alpha}$$

La ley de flectores es parabólica y para $x = 2$ m se obtiene $M_B = -75$ kN·m, valor del momento flector en la sección B del tramo CB . Análogamente, en la viga BD , para una sección a una distancia s_1 del extremo D (ver Figura 4.14b) se obtiene:

$$M(x_1) = -30 s_1 \frac{x_1}{2} = -15 s_1 x_1 = -15 \frac{x_1^2}{\cos \alpha}$$

ley parabólica que para $x_1 = 4$ m toma el valor del momento flector en la sección B del tramo BD , $M_B = -300$ kN·m.

Ley de esfuerzos cortantes

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de esfuerzo cortante en el pilar AB es cero. Nótese que la ley de momentos flectores en el pilar AB es constante y, en consecuencia, su derivada primera es nula.

En los tramos CB y BD se tiene, proyectando la resultante de fuerzas sobre el plano de la sección:

$$\begin{aligned} T_{CB} &= 30 s \cos \alpha &= 30 x \\ T_{BD} &= (30 s - 225) \cos \alpha &= 30 x - 225 \cos \alpha \end{aligned}$$

Ambas leyes son lineales, como corresponde a una variación parabólica del flector.

Ley de esfuerzos axiales

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de esfuerzo axial en el pilar AB es de compresión, constante y de valor $N = 225$ kN.

En los tramos CB y BD la ley de axiles se obtiene proyectando la resultante de fuerzas sobre la normal al plano de la sección. Se tiene:

$$\begin{aligned} N_{CB} &= 30 s \sin \alpha \\ N_{BD} &= (30 s - 225) \sin \alpha \end{aligned}$$

Ambas leyes son lineales, como corresponde a una carga uniforme. Obsérvese que, sobre cada sección, la composición vectorial de los correspondientes esfuerzos cortante y axial es igual a la resultante de fuerzas \mathbf{R} sobre la sección, que es una fuerza vertical. En la Figura 4.14 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 4.4.4

El pórtico de la Figura 4.15 está sometido a una carga p de 20 kN/m, uniformemente distribuida según la proyección horizontal del dintel BC , y a dos fuerzas concentradas horizontales de 30 kN que actúan en las secciones E y F (estas fuerzas puntuales representan un cable postesado anclado en los nudos E y F). Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

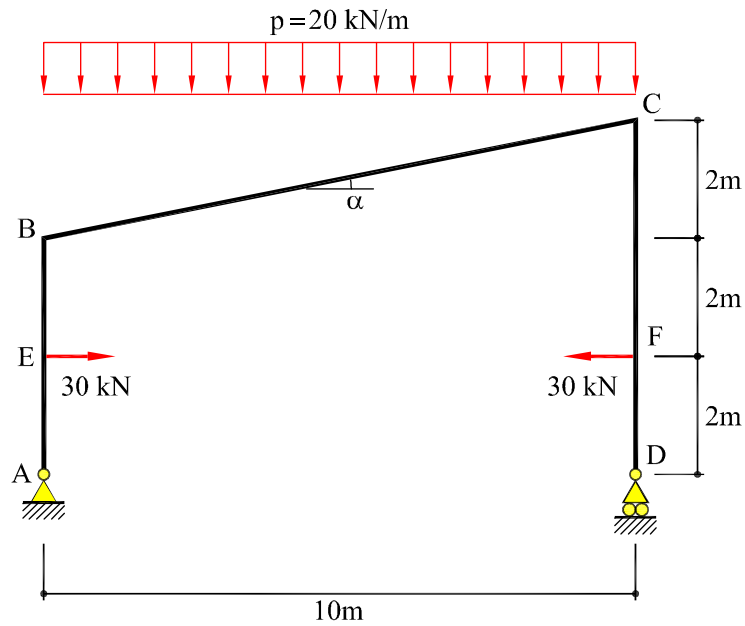


Fig. 4.15: Estructura del Ejemplo 4.4.4

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las condiciones de equilibrio. Se obtiene que la reacción horizontal H_A es nula y:

$$\begin{aligned} V_A + V_D &= 200 \\ 10V_D &= 20 \cdot 10 \cdot 5 \end{aligned}$$

y, por lo tanto:

$$V_A = 100 \text{ kN} \quad (\uparrow) \quad ; \quad V_D = 100 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

Ley de momentos flectores

En los tramos AE y DF de ambos pilares la ley de momentos flectores es nula. Continuando con el pilar AB , a partir de la sección E , y calculando dorsalmente, se obtiene:

$$M(s) = -30s$$

siendo s la distancia desde E . Es una ley de variación lineal que para $s = 2$ m proporciona el valor del momento flector en la sección B , $M_B = -60$ kN·m.

Análogamente, en el pilar DC se obtiene:

$$M(s_1) = -30s_1$$

siendo s_1 la distancia desde F . Es una ley de variación lineal que en la sección C ($s_1 = 4$ m) toma el valor $M_C = -120$ kN·m.

En el dintel BC , para una sección a una distancia x de la sección B , se tiene

$$M(x) = V_A x - 30 \left(2 + \frac{2}{10} x \right) - 20 \frac{x^2}{2} = -60 + 94x - 10x^2$$

que es una ley parabólica, con su valor máximo situado a una distancia x_{\max} de la sección B , que puede determinarse igualando a cero la derivada de la ley de momentos respecto a la variable x . En este caso, $x_{\max} = 4,7$ m y el valor del momento correspondiente es $M_{\max}(x = x_{\max}) = 160,9$ kN·m.

Ley de esfuerzos cortantes

El esfuerzo cortante en el primer tramo AE del pilar AB es nulo. A partir de la sección E el valor del esfuerzo cortante coincide con la fuerza horizontal aplicada en dicha sección. Por tanto, la ley es constante y de valor:

$$T_{EB} = 30 \text{ kN}$$

Análogamente, en el pilar DC se tiene un valor de cortante nulo hasta la sección F . En el tramo de pilar FC la ley de esfuerzo cortante es constante, de valor coincidente con el valor de la fuerza horizontal aplicada en F :

$$T_{FC} = 30 \text{ kN}$$

En el tramo BC , inclinado un ángulo α respecto a la horizontal, para una sección situada a una distancia x del extremo B la proyección de la resultante de las fuerzas sobre el plano de la sección es igual a:

$$T_{BC} = (-V_A + 20x) \cos \alpha + 30 \sin \alpha$$

que es una ley lineal, de valor $T_B = -92,17 \text{ kN}$ para la sección B ($x = 0$). Nótese que para $x = 4,7 \text{ m}$ el valor del esfuerzo cortante es cero, como corresponde a la sección de máximo momento en el tramo BC .

Ley de esfuerzos axiales

En los pilares AB y CD los axiles son de compresión, constantes y de valor igual a las reacciones verticales en los respectivos apoyos. Por tanto,

$$N_{AB} = N_{CD} = -100 \text{ kN} \quad (C)$$

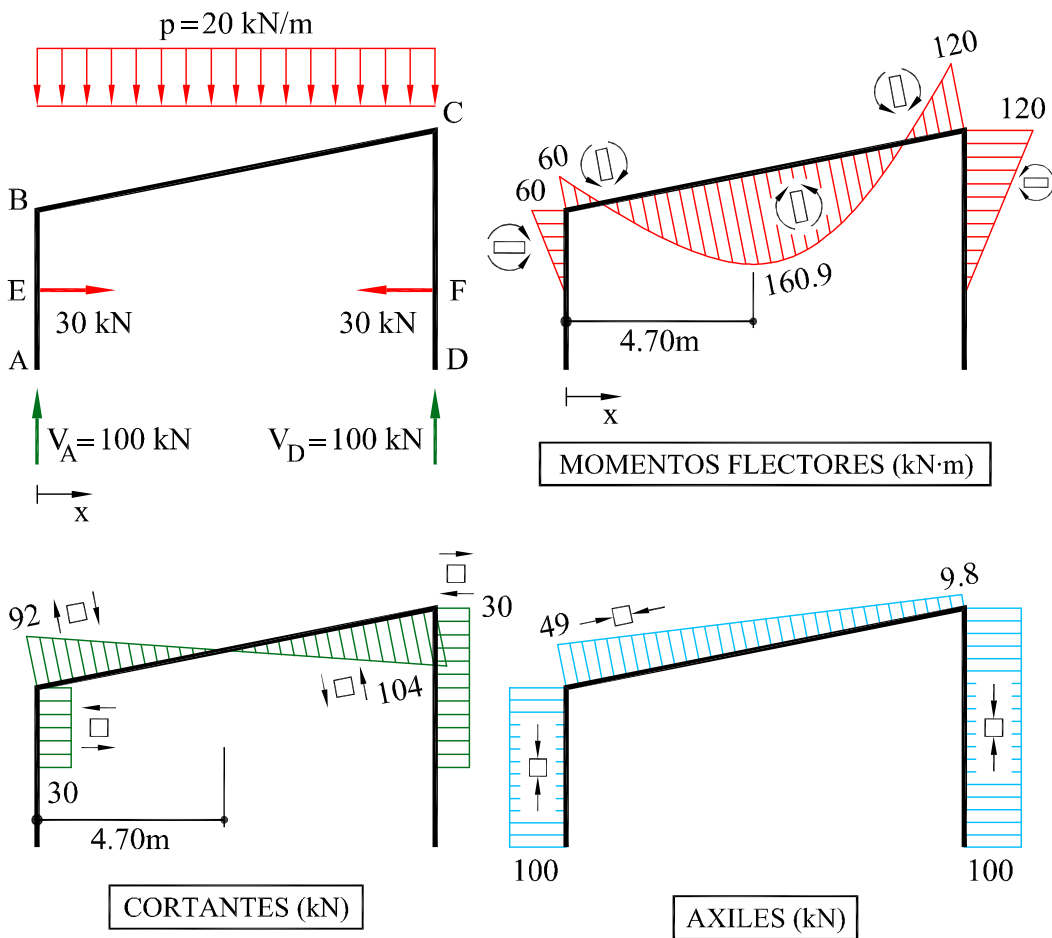


Fig. 4.16: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 4.4.4

En el tramo BC , calculando dorsalmente, se tiene

$$N_{BC} = (-100 + 20x) \sin \alpha - 30 \cos \alpha$$

que es una ley lineal, con los valores extremos $N_B = -49 \text{ kN}$ y $N_C = -9,8 \text{ kN}$ para las secciones B y C , respectivamente.

En la Figura 4.16 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 4.4.5

Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos para la estructura de la Figura 4.17, sometida a una fuerza horizontal F actuando en la sección B' .

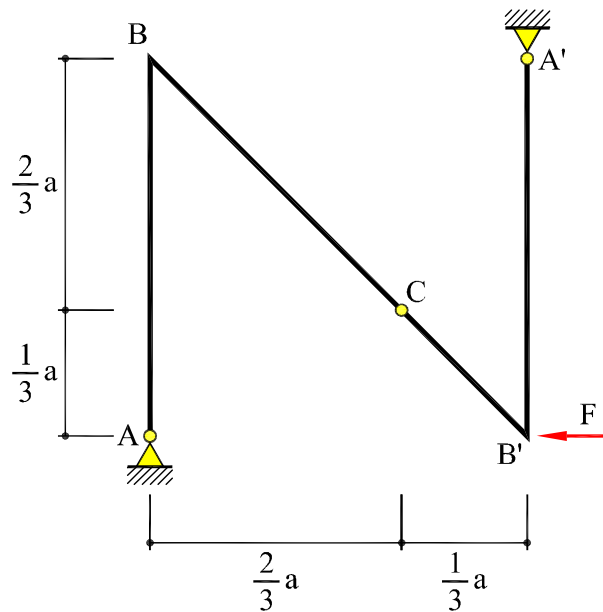


Fig. 4.17: Estructura del Ejemplo 4.4.5

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos (en A) y la condición de momento flector nulo en la rótula C (calculado dorsalmente). Se tiene (Figura 4.18a):

$$\begin{aligned}
 H_A - H_{A'} - F &= 0 \\
 V_A - V_{A'} &= 0 \\
 H_{A'} a - V_{A'} a &= 0 \\
 V_A \frac{2a}{3} - H_A \frac{a}{3} &= 0
 \end{aligned}$$

de donde:

$$V_A = F \quad (\uparrow) \quad ; \quad V_{A'} = F \quad (\downarrow) \quad ; \quad H_A = 2F \quad (\rightarrow) \quad ; \quad H_{A'} = F \quad (\leftarrow)$$

Ley de momentos flectores

En el pilar AB , para una sección situada a una distancia y del apoyo A , se tiene:

$$M_{AB} = -H_A y = -2Fy$$

ley de momento flector lineal, que para $y = a$, proporciona el valor del momento flector en la sección B , $M_B = -2Fa$. En el pilar $B'A'$, para una sección situada a una distancia $(a - y)$ de la sección A' se tiene:

$$M_{B'A'} = H_{A'} (a - y) = F(a - y)$$

ley de momentos lineal con valor máximo $M_{B'} = Fa$. En el tramo BB' , para una sección situada a una distancia x, y del apoyo A , puede escribirse:

$$M_{BB'} = -H_A y + V_A x = F(x - 2y)$$

ley de momento flector lineal, con valores extremos $M_B = -2Fa$ y $M_{B'} = Fa$.

Ley de esfuerzos cortantes

Al ser lineales las leyes de flectores en todas las barras, los cortantes son uniformes en cada una de ellas. En los pilares se tiene:

$$\begin{aligned}
 T_{AB} &= H_A = 2F \\
 T_{B'A'} &= H_{A'} = F
 \end{aligned}$$

valores coincidentes con las reacciones horizontales. En la barra BB' se tiene:

$$T_{BB'} = \frac{\sqrt{2}}{2} (V_A + H_A) = \frac{3\sqrt{2}}{2} F$$

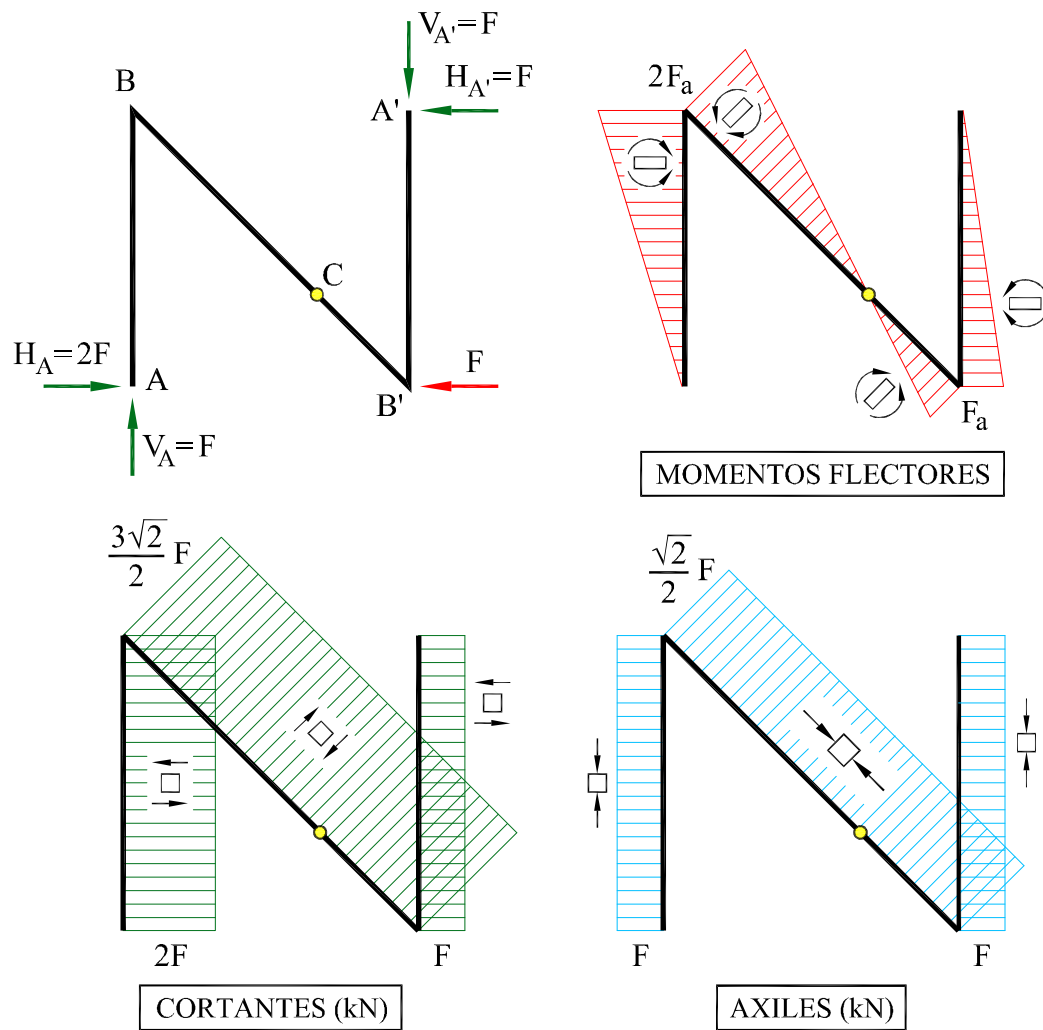


Fig. 4.18: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 4.4.5

Ley de esfuerzos axiales

Procediendo de manera similar al apartado anterior, se halla la componente de R normal a las secciones, y se obtienen los valores del esfuerzo axial, constantes en cada pieza:

$$N_{AB} = -F \quad ; \quad N_{BB'} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F \quad ; \quad N_{B'A'} = -F$$

En la Figura 4.18 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 4.4.6

El pórtico isostático de la Figura 4.19 está sometido a una carga p de 20 kN/m, uniformemente distribuida en el dintel BD . Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

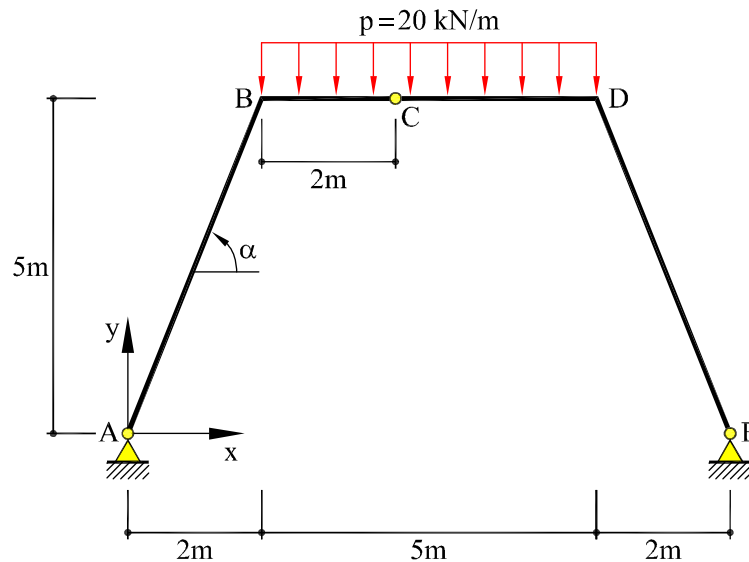


Fig. 4.19: Estructura del Ejemplo 4.4.6

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las ecuaciones de equilibrio y la condición de que el momento flector en la rótula sea nulo. Se tiene (ver Figura 4.20a):

$$\begin{aligned} H_A - H_E &= 0 \\ V_A + V_E &= 20 \cdot 5 \\ 9V_A &= 20 \cdot 5 \cdot 4,5 \\ 4V_A - 5H_A &= 20 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

y, por tanto, las reacciones son:

$$V_A = V_E = 50 \text{ kN } (\uparrow) \quad ; \quad H_A = 32 \text{ kN } (\rightarrow) \quad ; \quad H_E = 32 \text{ kN } (\leftarrow)$$

Obsérvese que las reacciones son simétricas, a pesar de la posición asimétrica de la rótula.

Ley de momentos flectores

En una sección genérica del tramo AB , utilizando los ejes de referencia (x, y) de la Figura 4.20 y calculando de forma dorsal, se tiene:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= V_A x - H_A y \\ &= 50 x - 32 y \end{aligned}$$

ley lineal con valor máximo $M_B = -60$ kN·m. En el tramo DE , procediendo ahora frontalmente, se obtiene también una ley lineal, simétrica respecto al eje vertical que pasa por el centro del dintel:

$$\begin{aligned} M_{DE} &= V_E (9 - x) - H_E y \\ &= 50 (9 - x) - 32 y \end{aligned}$$

En el dintel BD , trabajando dorsalmente, se puede escribir:

$$\begin{aligned} M_{BD} &= V_A x - H_A y - \frac{p}{2}(x - 2)^2 \\ &= 50 x - 32 \cdot 5 - \frac{20}{2}(x - 2)^2 = -10 x^2 + 90 x - 200 \end{aligned}$$

que es una ley parabólica que se anula en la rótula y tiene valores máximos en los extremos $M_B = M_D = -60$ kN·m. El valor del flector en el centro es de 2,5 kN·m.

Obsérvese que, dada la simetría de las cargas y reacciones, los flectores en la estructura son simétricos respecto al eje vertical central.

Ley de esfuerzos cortantes

En los pilares AB y DE los cortantes son constantes, ya que la ley de flectores en ellos es lineal. Su valor se obtiene proyectando sobre la sección las componentes de la reacción en A y E , respectivamente:

$$\begin{aligned} T_{AB} &= -V_A \cos \alpha + H_A \sin \alpha = 11 \text{ kN} \\ T_{DE} &= -V_E \cos \alpha + H_E \sin \alpha = 11 \text{ kN} \end{aligned}$$

donde α es el ángulo de inclinación de los soportes. En el tramo BD , calculando dorsalmente, se tiene

$$\begin{aligned} T_{BD} &= -V_A + p (x - 2) \\ &= -50 + 20 (x - 2) \end{aligned}$$

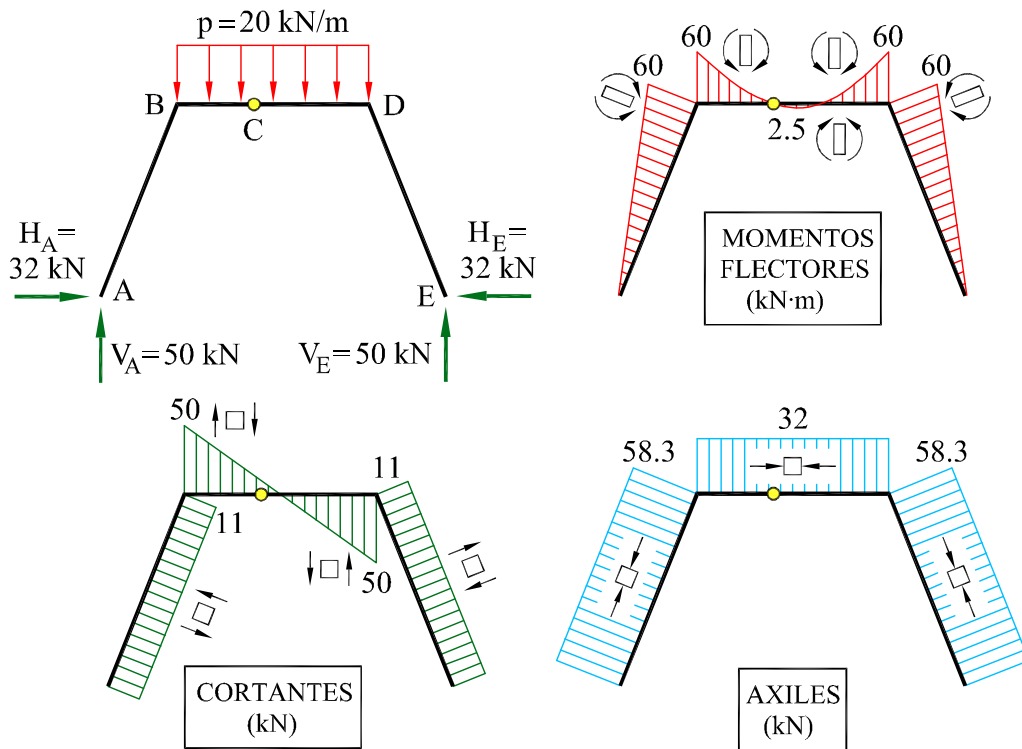


Fig. 4.20: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 4.4.6

que es una ley lineal con valores extremos $T_B = -V_A$ y $T_D = V_E$, y de valor nulo en el centro del dintel, por simetría.

Ley de esfuerzos axiales

Procediendo de manera similar, se calculan los axiles en cada barra. Sobre los soportes, basta con proyectar sobre sus direcciones respectivas las reacciones horizontales y verticales de los apoyos correspondientes. En el dintel se sigue el mismo procedimiento, ya que la proyección de la carga lateral sobre la barra es nula.

Se obtienen así las leyes de esfuerzos axiales

$$N_{AB} = N_{DE} = -(V_A \sin \alpha + H_A \cos \alpha) = -58,3 \text{ kN}$$

$$N_{BD} = -H_A = -32 \text{ kN}$$

Se observa que son leyes constantes en cada tramo y, además, son simétricas.

En la Figura 4.20 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

5 Esfuerzo Axil

5.1 Introducción

Una pieza está sometida a *tracción o compresión simple* cuando sobre sus secciones actúan únicamente esfuerzos axiales, es decir, fuerzas normales a las secciones y aplicadas en sus respectivos centros de gravedad (ver Figura 5.1). Consideramos positivos los axiales de tracción, y negativos los de compresión.

Dado que los diferentes esfuerzos que actúan sobre una sección no son sino las fuerzas y momentos resultantes de las tensiones que actúan sobre dicha sección, deben cumplirse las siguientes igualdades integrales:

$$\begin{aligned} N &= \int_S \sigma_x dS & ; & \quad T_y = \int_S \tau_{xy} dS = 0 \\ T_z &= \int_S \tau_{xz} dS = 0 & ; & \quad M_t = \int_S (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dS = 0 \\ M_y &= \int_S \sigma_x z dS = 0 & ; & \quad M_z = - \int_S \sigma_x y dS = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Obviamente, estas ecuaciones integrales no bastan para determinar de forma única la distribución de tensiones en la sección. Es necesario, por tanto, establecer hipótesis simplificativas relativas a la deformación de la pieza que permitan tal determinación.

5.2 Esfuerzo axil en una pieza recta

En el caso de una pieza recta sometida a esfuerzo axil se hace la siguiente hipótesis de deformación, que se conoce con el nombre de *hipótesis de Bernoulli*:

“durante la deformación de una pieza recta sometida a esfuerzo axil las secciones transversales permanecen planas y paralelas a sí mismas”.

La idoneidad de esta hipótesis puede comprobarse experimentalmente, siempre que la pieza sea larga y en las zonas en que pueda aplicarse el *principio de Saint-Venant*.

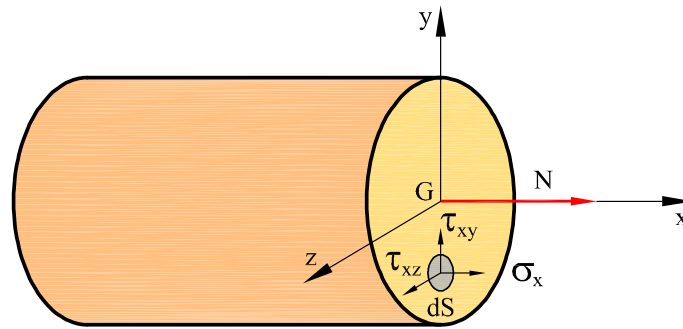


Fig. 5.1: Esfuerzo axial sobre una sección

De acuerdo con la hipótesis anterior, una rebanada diferencial limitada por las secciones S_1 y S_2 puede deformarse de acuerdo con la Figura 5.2a, y transformarse en $S'_1 S'_2$, o bien, según la Figura 5.2b, y transformarse en $S''_1 S''_2$.

En el caso (a) no hay distorsión de los elementos diferenciales de volumen, es decir, $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$ en todos los puntos de la sección y, en consecuencia, $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$. En el caso (b) se tiene $\gamma_{xy} = cte$ y $\gamma_{xz} = cte$, de acuerdo con la hipótesis de deformación y, por lo tanto, $\tau_{xy} = cte$ y $\tau_{xz} = cte$ para todos los puntos de la sección. Las ecuaciones (5.1) que relacionan tensiones tangenciales y esfuerzos cortantes son entonces:

$$T_y = \tau_{xy} \int_S dS = 0 \quad ; \quad T_z = \tau_{xz} \int_S dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \quad (5.2)$$

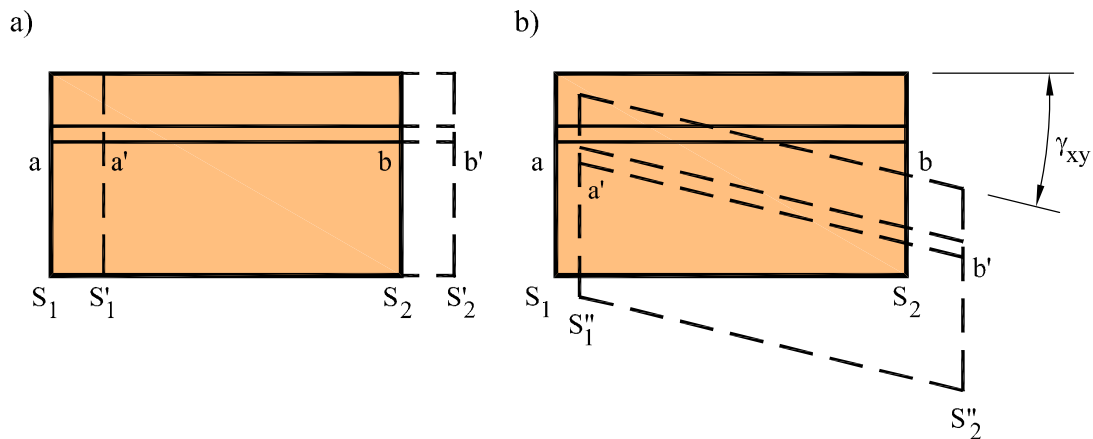


Fig. 5.2: Hipótesis de deformación de Bernoulli

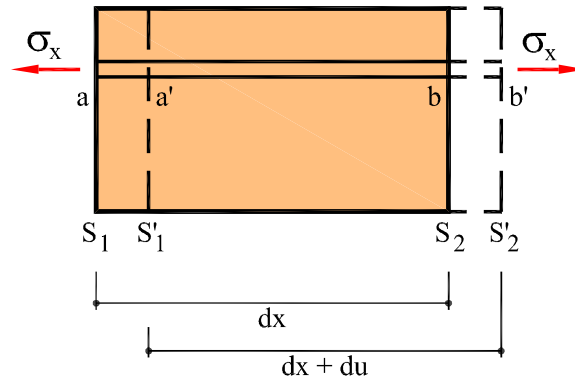


Fig. 5.3: Elongaciones y tensiones en la rebanada

Por lo tanto, las tensiones tangenciales y las distorsiones necesariamente son nulas, con lo que la rebanada se deforma necesariamente según el caso (a), y las ecuaciones integrales (5.1) segunda, tercera y cuarta se cumplen idénticamente.

Además, y según se muestra en la Figura 5.3, en la deformación de la rebanada todas las fibras se deforman paralelas al eje de la pieza y sufren una deformación longitudinal idéntica, e igual a:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (5.3)$$

donde du es la elongación (positiva si es de alargamiento y negativa en caso contrario) de la rebanada de longitud dx .

Si el material de la pieza es elástico lineal y se cumple la ley de Hooke, la deformación longitudinal ε_x es igual a:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \quad (5.4)$$

donde E es el módulo de Young del material y ν su coeficiente de Poisson. Al ser nulas o despreciables, en este caso, las tensiones normales en planos paralelos al eje de la pieza, σ_y y σ_z , se tiene simplemente:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = E \varepsilon_x \quad (5.5)$$

Dado que las deformaciones son iguales para todas las fibras, también lo son las tensiones, es decir, existe una distribución uniforme de tensiones normales σ_x en cada

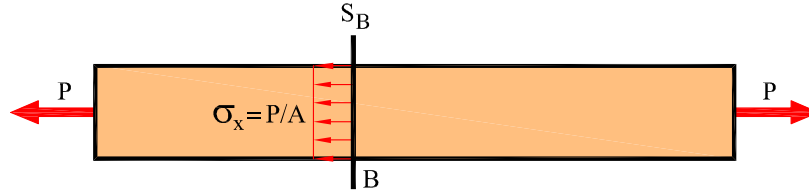


Fig. 5.4: Esfuerzo axial: distribución uniforme de tensiones

sección de la viga (Figura 5.4). Por tanto, las ecuaciones (5.1) pueden escribirse:

$$N = \sigma_x \int_S dS = \sigma_x A \quad (5.6a)$$

$$M_y = \sigma_x \int_S z dS \equiv 0 \quad (5.6b)$$

$$M_z = \sigma_x \int_S y dS \equiv 0 \quad (5.6c)$$

ya que los ejes (y, z) , al ser los ejes principales de inercia de la sección, pasan por el centro de gravedad de ésta. En lo sucesivo, denominaremos A al área de la sección. De la ecuación (5.6a) resulta:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad \text{y} \quad \varepsilon_x = \frac{N}{EA} \quad (5.7)$$

La deformación longitudinal de la rebanada viene acompañada de una deformación lateral debida al efecto de Poisson de valor:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\frac{\nu N}{EA} \quad (5.8)$$

Asimismo, debe hacerse notar que la hipótesis de alargamiento uniforme de las fibras y la correspondiente distribución uniforme de tensiones normales es exacta cuando las fuerzas exteriores aplicadas estén uniformemente repartidas sobre las secciones correspondientes. En el caso de no serlo, según el Principio de Saint-Venant, los resultados obtenidos serán válidos para secciones alejadas lo suficiente de los puntos donde se aplican las cargas. La distancia a la que esta hipótesis será cierta es aproximadamente igual a las dimensiones transversales de la pieza. Así, en la Figura 5.5 la distribución de tensiones es uniforme en una sección tal como la S_B , suficientemente alejada de los extremos de la pieza, pero no en una como la S_A , donde el efecto local de cómo están aplicadas las cargas es aún perceptible.

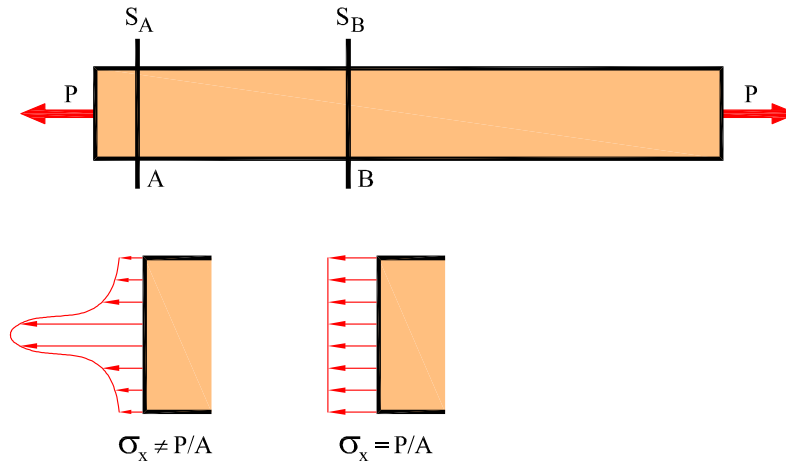


Fig. 5.5: Esfuerzo axial y Principio de Saint-Venant

La variación de longitud total de la pieza, es decir, *el alargamiento* o *el acortamiento* de ésta, se obtiene por integración de las deformaciones longitudinales sobre todas las rebanadas de la pieza, es decir:

$$\Delta l = \int_l \varepsilon_x(x) dx = \int_l \frac{N(x)}{EA(x)} dx \quad (5.9)$$

donde se admite que tanto la ley de axiles, $N(x)$, como la sección de la pieza, $A(x)$, puedan variar a lo largo de la longitud l de ésta. Si la sección de la pieza A es constante y la ley de esfuerzos axiles es uniforme (Figura 5.6), el alargamiento total de la pieza es:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (5.10)$$

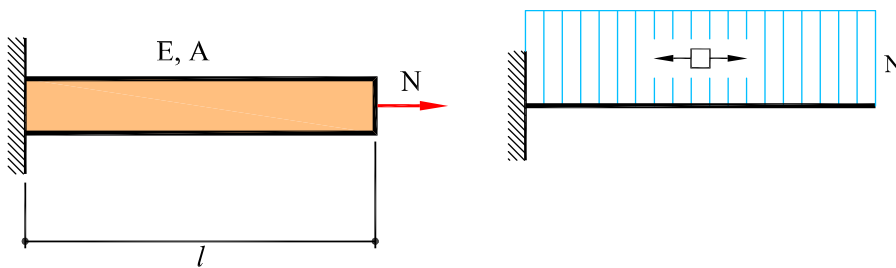


Fig. 5.6: Axil uniforme

Esta expresión puede escribirse como $\Delta l = N/k$, con $k = EA/l$, representando la rigidez de la pieza a esfuerzo axial.

Las fórmulas anteriores valen tanto para esfuerzos de compresión como para esfuerzos de tracción. En el caso de compresión, todo lo anterior es válido a condición de que la pieza no sea demasiado larga en relación a las dimensiones de la sección transversal, porque en ese caso el equilibrio de la pieza puede ser inestable, fenómeno conocido con el nombre de *pandeo*.

Ejemplo 5.2.1

Calcular el alargamiento total de una pieza de sección constante A y longitud l , sometida a la acción de su propio peso Q uniformemente repartido (Figura 5.7).

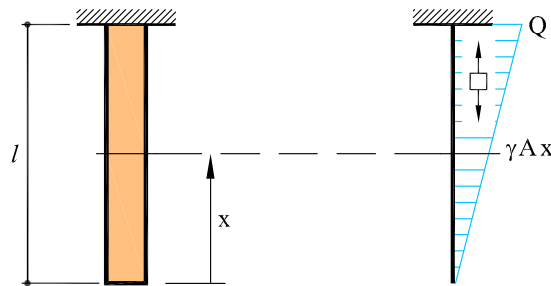


Fig. 5.7: Pieza sometida a peso propio

Sea $\gamma = Q/Al$ el peso específico del material de la pieza. Según se observa en la Figura 5.7, la ley de axiles es lineal, y viene dada por la expresión:

$$N(x) = \gamma Ax$$

La ley de tensiones sobre cada sección se obtiene simplemente como :

$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A} = \gamma x$$

y es también lineal. El alargamiento total será igual a:

$$\Delta l = \int_l \frac{N(x)}{EA} dx = \int_0^l \frac{\gamma x dx}{E} = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{Ql}{2EA}$$

Ejemplo 5.2.2

Calcular la máxima longitud que puede tener un cable suspendido verticalmente y sometido a su peso propio (Figura 5.8). Supóngase una tensión admisible de valor σ_{adm} .

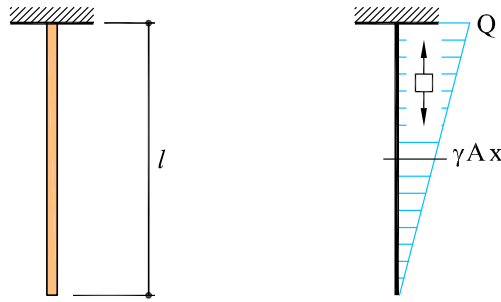


Fig. 5.8: Cable suspendido verticalmente

Según los resultados del ejercicio anterior, la tensión máxima se produce en la sección superior del cable, que soporta una tensión

$$\sigma_x(x=l) = \frac{\gamma Al}{A} = \gamma l$$

y debe ser

$$\sigma_x \leq \sigma_{\text{adm}} \quad \Rightarrow \quad l_{\text{max}} \leq \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\gamma}$$

Un acero de alta resistencia puede tener un peso específico de $\gamma = 75.000 \text{ N/m}^3$ y una tensión admisible de $\sigma_{\text{adm}} = 1.500 \text{ MPa} = 1.500 \text{ N/mm}^2$. Operando, resulta una longitud máxima de $l_{\text{max}} \leq 20 \cdot 10^3 \text{ m} = 20 \text{ km}$.

Ejemplo 5.2.3

Un pilote de madera, de longitud l , área transversal A y módulo de elasticidad E , está enterrado y soporta una carga P únicamente por fricción a lo largo de su perímetro longitudinal (Figura 5.9a). Se supone que la fuerza de fricción f por unidad de longitud del pilote está repartida uniformemente en la superficie del pilote. Calcular: (a) la

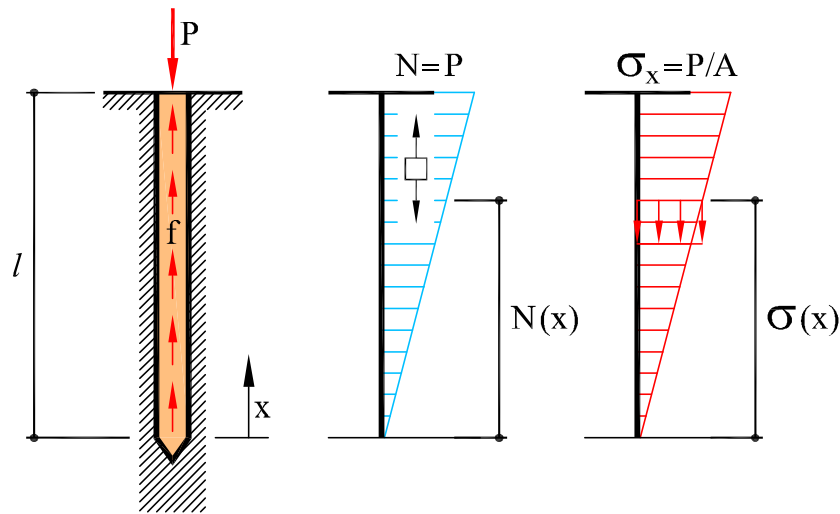


Fig. 5.9: Pilote, ley de axiles y distribución de tensiones del Ejemplo 5.2.3

distribución de tensiones a lo largo del pilote y (b) el acortamiento δ del pilote en función de P , l , E y A .

(a) *Distribución de tensiones a lo largo del pilote*

Si la carga P es soportada únicamente por la fuerza de fricción f , repartida uniformemente a lo largo del pilote, por equilibrio debe cumplirse:

$$P = f \cdot l$$

y la ley de axiles en el pilote puede expresarse por:

$$N(x) = P - f (l - x) = P - \frac{P}{l} (l - x) = P \frac{x}{l}$$

que es una ley lineal en función de la coordenada x , medida desde el extremo inferior del pilote (Figura 5.9).

Por otra parte, la tensión normal en una sección genérica situada a la distancia x es:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{P x}{A l}$$

Las tensiones normales en el pilote son de compresión y su distribución es lineal en función de x (Figura 5.9).

(b) *Acortamiento del pilote*

El pilote está sometido a un axil de compresión que varía linealmente con la coordenada x . Por tanto, su longitud inicial sufre un acortamiento δ , que en función de P , l , E y A , se expresa por:

$$\delta = \int_0^l \frac{N(x)}{EA} dx = \int_0^l \frac{P(x/l)}{EA} dx = \frac{Pl}{2EA}$$

Ejemplo 5.2.4

La estructura articulada ABC de la Figura 5.10 está formada por dos barras del mismo material y secciones transversales de áreas A_1 y A_2 . Para una carga P actuando en C determinar las tensiones y alargamientos en las barras.

Datos: $P = 40 \text{ kN}$, $L = 3 \text{ m}$ y $\alpha = 30^\circ$, $A_1 = 5 \text{ cm}^2$, $A_2 = 10 \text{ cm}^2$, $E = 200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

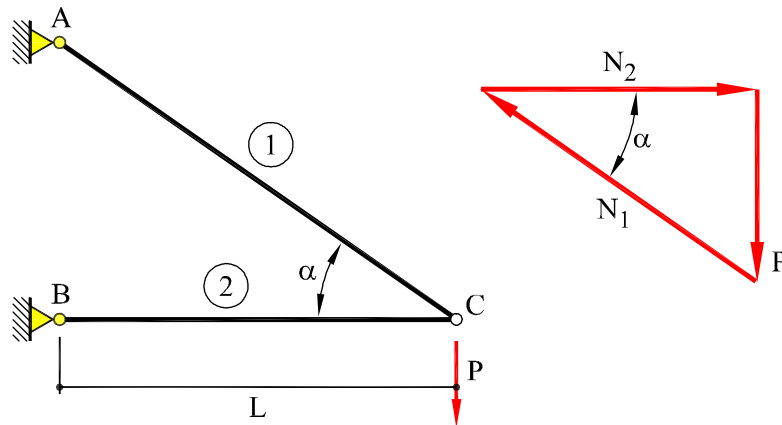


Fig. 5.10: Estructura del Ejemplo 5.2.4 y equilibrio de fuerzas en C

La estructura es isostática y los axiles en las barras 1 y 2 pueden calcularse directamente por equilibrio de fuerzas en el nudo C :

$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha} = 80 \text{ kN} \quad (\text{tracción})$$

$$N_2 = -\frac{P}{\tan \alpha} = -69,3 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

Las tensiones en las barras son:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{80}{5 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-69,3}{10 \cdot 10^{-4}} = -69,3 \text{ MPa}$$

y los alargamientos correspondientes son:

$$\delta_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{80 \cdot 3 / \cos \alpha}{200 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,277 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{-69,3 \cdot 3}{200 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -0,104 \text{ cm}$$

Obsérvese que la barra 1 está traccionada y sufre un alargamiento, mientras que la barra 2 está comprimida y sufre un acortamiento, tal como indican los signos positivo y negativo, respectivamente.

Ejemplo 5.2.5

La estructura articulada de la Figura 5.11 está formada por cinco barras del mismo material y secciones transversales iguales, de área A . Para una fuerza horizontal F actuando en el nudo B , determinar: (a) los axiles en las barras y (b) los alargamientos correspondientes.

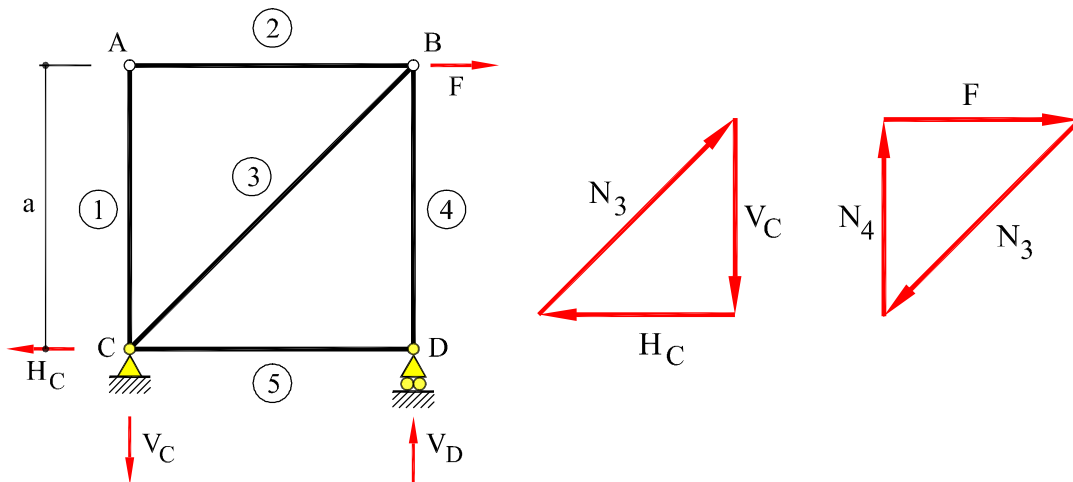


Fig. 5.11: Estructura del Ejemplo 5.2.5 y equilibrio de fuerzas en los nudos C y B

Datos: $F = 10 \text{ kN}$, $a = 4 \text{ m}$, $A = 5 \text{ cm}^2$, $E = 200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

(a) La estructura es isostática y las reacciones en los apoyos C y D pueden determinarse por equilibrio de fuerzas y momentos. Así:

$$H_C = F \quad (\leftarrow) \quad ; \quad V_C = F \quad (\downarrow) \quad ; \quad V_D = F \quad (\uparrow)$$

Análogamente, los axiles en las barras pueden calcularse considerando el equilibrio de fuerzas los nudos (Figuras 5.11b y (c)):

$$\begin{aligned} \text{nudo } D &\Rightarrow N_4 = -F \quad ; \quad N_5 = 0 \\ \text{nudo } C &\Rightarrow N_1 = 0 \quad ; \quad N_3 = \sqrt{2}F \\ \text{nudo } A &\Rightarrow N_2 = 0 \end{aligned}$$

La barra 3 trabaja a tracción y la barra 4 a compresión. Las barras 1, 2 y 5 no trabajan para la carga aplicada en este caso.

(b) El alargamiento de la barra 3 es:

$$\delta_3 = \frac{N_3 L_3}{EA} = \frac{\sqrt{2}F \sqrt{2}a}{EA} = 2 \frac{Fa}{EA} = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

y el acortamiento de la barra 4 es:

$$\delta_4 = \frac{N_4 L_4}{EA} = \frac{-Fa}{EA} = -0,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Ejemplo 5.2.6

Para la estructura articulada de acero de la Figura 5.12 se pide: (a) resolver la estructura hallando los axiles en todas las barras, (b) dimensionar la estructura con un único perfil IPN y (c) calcular los alargamientos producidos para la sección escogida.

Datos: $L = 3 \text{ m}$, $P = 150 \text{ kN}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_{adm} = 75 \text{ MPa}$.

(a) La estructura es isostática y las reacciones se obtienen planteando el equilibrio de fuerzas y momentos:

$$\begin{aligned} \sum F_H &= H_1 + 150 &= 0 \\ \sum F_V &= V_1 + V_3 &= 0 \\ \sum M_1 &= V_3 L - 150L &= 0 \end{aligned}$$

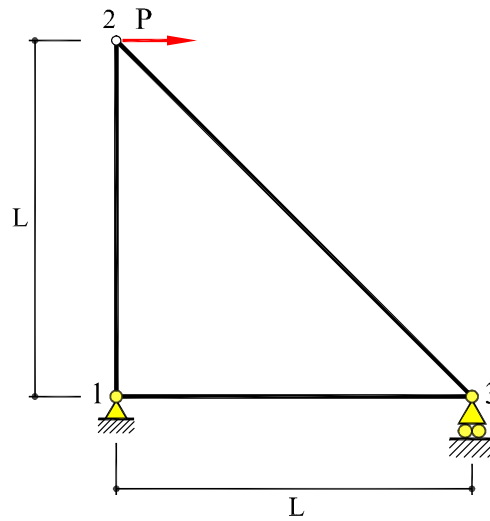


Fig. 5.12: Estructura del Ejemplo 5.2.6

De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$H_1 = 150 \text{ kN} (\leftarrow) \quad V_1 = 150 \text{ kN} (\downarrow) \quad V_3 = 150 \text{ kN} (\uparrow)$$

De igual manera, los axiles en las barras se obtienen planteando el equilibrio en los nudos:

$$\begin{aligned} \text{nudo 1} &\Rightarrow N_{12} = 150 \text{ kN} \quad ; \quad N_{13} = 150 \text{ kN} \\ \text{nudo 2} &\Rightarrow N_{23} = -150\sqrt{2} = -212,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Las barras 12 y 13 están traccionadas mientras que la barra 23 está comprimida, según indican los signos de los axiles respectivos.

(b) La estructura se dimensiona para que en ningún punto de la misma se supere la tensión admisible σ_{adm} . Al ser el axil constante en cada barra, la tensión será constante en cada una de las barras y además constante en toda la sección. Por tanto, la tensión máxima se dará en la barra cuyo axil sea mayor, es decir, en la barra 23.

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} < \sigma_{adm} \quad \Rightarrow \quad A > \frac{N_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{150\sqrt{2} \text{ kN}}{75 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2} = 28,3 \text{ cm}^2$$

El perfil que cumple la condición de tensión máxima es el IPN200, cuya sección tiene un área de $33,5 \text{ cm}^2$, por lo que toda la estructura se dimensiona con este perfil.

(c) Las deformaciones que se producen en todas las barras construidas con un perfil IPN200 son los siguientes:

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \frac{150 \cdot 3}{2 \cdot 10^8 \cdot 33,5 \cdot 10^{-4}} = 0,67 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{23} = \frac{-150\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2 \cdot 10^8 \cdot 33,5 \cdot 10^{-4}} = -1,34 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Las barras 12 y 13 sufren un alargamiento mientras que en la barra 23 se produce un acortamiento.

Ejemplo 5.2.7

Para la cercha de la Figura 5.13 (estructura articulada) sometida a una carga vertical de 600 kN, se pide: (a) calcular los axiles en las barras. (b) Dimensionar la estructura con un perfil IPN, siendo la tensión admisible del material σ_{adm} . (c) Calcular el alargamiento de cada barra suponiendo toda la estructura construida con el perfil escogido en (b).

Datos: $P = 600 \text{ kN}$, $a = 4.5 \text{ m}$, $h = 6 \text{ m}$, $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$, $E = 200 \text{ GPa}$.

(a) La estructura es isostática y las reacciones pueden obtenerse directamente por equilibrio de fuerzas y momentos.

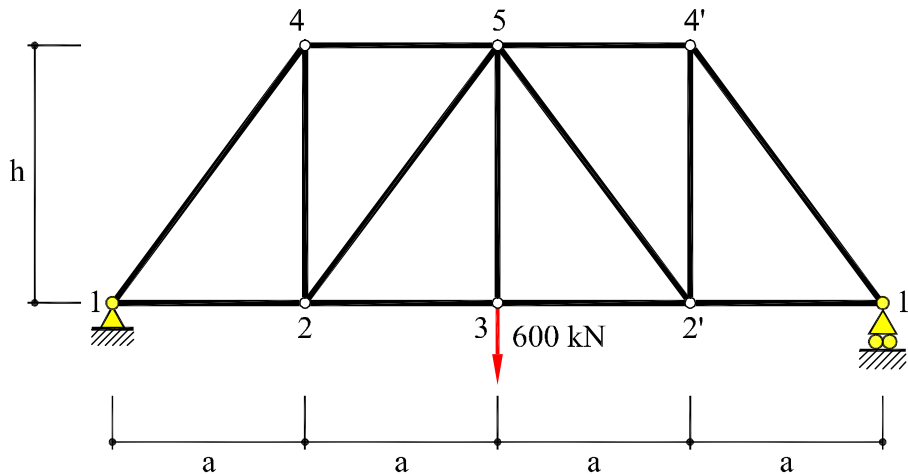


Fig. 5.13: Cercha del Ejemplo 5.2.7

$$\begin{aligned}\sum F_H &= H_1 = 0 \\ \sum F_V &= V_1 + V_{1'} - 600 = 0 \\ \sum M_1 &= 18V_{1'} - 600 \cdot 9 = 0\end{aligned}$$

De donde:

$$H_1 = 0 \quad V_1 = 300 \text{ kN } (\uparrow) \quad V_{1'} = 300 \text{ kN } (\uparrow)$$

Los axiles en las barras se determinan por equilibrio de fuerzas en los nudos. Obsérvese que la estructura es simétrica y está cargada simétricamente, esto significa que los esfuerzos también serán simétricos:

$$\begin{aligned}\text{nudo 1} &\Rightarrow N_{12} = 225 \text{ kN (T)} ; N_{14} = -375 \text{ kN (C)} \\ \text{nudo 4} &\Rightarrow N_{42} = 300 \text{ kN (T)} ; N_{45} = -225 \text{ kN (C)} \\ \text{nudo 2} &\Rightarrow N_{23} = 450 \text{ kN (T)} ; N_{25} = -375 \text{ kN (C)} \\ \text{nudo 3} &\Rightarrow N_{35} = 600 \text{ kN (T)} ;\end{aligned}$$

(b) La cercha se dimensiona para que en ningún punto se supere la tensión admisible σ_{adm} . El dimensionamiento se hace para la barra más cargada; la barra que soporta un axil mayor es la barra 35 con un axil $N = 600 \text{ kN}$ de compresión.

La tensión en una sección de dicha barra debe cumplir:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{\text{adm}} \quad \Rightarrow \quad A \geq \frac{N}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{600}{140 \cdot 10^3} = 42,9 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área mínima que debe tener la sección de la barra es $42,9 \text{ cm}^2$. El perfil más pequeño que supera ese área es el IPN240 con un área de $46,1 \text{ cm}^2$.

(c) Al ser constantes el axil y la sección en cada barra, el alargamiento de cada rebanada es constante en toda la barra, con lo que el alargamiento total de la barra se calcula mediante:

$$\delta = \frac{Nl}{EA}$$

Suponiendo que la estructura se construye con el perfil IPN240 el área es $46,1 \text{ cm}^2$. La longitud de las barras horizontales es $4,5 \text{ m}$, la de los montantes verticales es $6,0 \text{ m}$, mientras que las barras inclinadas miden $7,5 \text{ m}$. Con estos datos, los alargamientos de las barras de la estructura resultan:

$$\begin{aligned}\delta_{12} &= \frac{225 \cdot 4,5}{2 \cdot 10^8 \cdot 46,1 \cdot 10^{-4}} = +1,10 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \delta_{14} &= \frac{-375 \cdot 7,5}{2 \cdot 10^8 \cdot 46,1 \cdot 10^{-4}} = -3,05 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \delta_{24} &= \frac{300 \cdot 6,0}{2 \cdot 10^8 \cdot 46,1 \cdot 10^{-4}} = +1,95 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \delta_{23} &= \frac{450 \cdot 4,5}{2 \cdot 10^8 \cdot 46,1 \cdot 10^{-4}} = +2,20 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \delta_{25} &= \frac{-375 \cdot 7,5}{2 \cdot 10^8 \cdot 46,1 \cdot 10^{-4}} = -3,05 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \delta_{45} &= \frac{-225 \cdot 4,5}{2 \cdot 10^8 \cdot 46,1 \cdot 10^{-4}} = -1,10 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \delta_{35} &= \frac{600 \cdot 6,0}{2 \cdot 10^8 \cdot 46,1 \cdot 10^{-4}} = +3,90 \cdot 10^{-3} \text{ m}\end{aligned}$$

Las barras 12, 24, 23, y 35 se alargan, mientras que las barras 14, 25 y 45 se acortan, tal como indican los signos de los alargamientos respectivos.

5.3 Cables

Los cables son tirantes flexibles que trabajan a tracción. Los cables están limitados sólo por su peso y su forma de anclaje. A continuación, se desarrollan algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 5.3.1

Una grúa de carga, compuesta por un larguero de acero AC sostenido por un cable BD , soporta una carga P como indica la Figura 5.14a. El cable tiene un área transversal $A_c = 481 \text{ mm}^2$ y un módulo de elasticidad E_c . Calcular: (a) la tensión en el cable cuando actúa la carga P y (b) la variación de longitud del cable correspondiente.

Datos: $h = 1,5 \text{ m}$, $l_1 = 3,2 \text{ m}$, $l_2 = 1,6 \text{ m}$, $P = 30 \text{ kN}$, $E_c = 140 \text{ GPa}$.

El cable y el eje del larguero forman un ángulo α igual a:

$$\tan \alpha = \frac{h}{l_1} = \frac{1,5}{3,2} = 0,4687 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 25,11^\circ$$

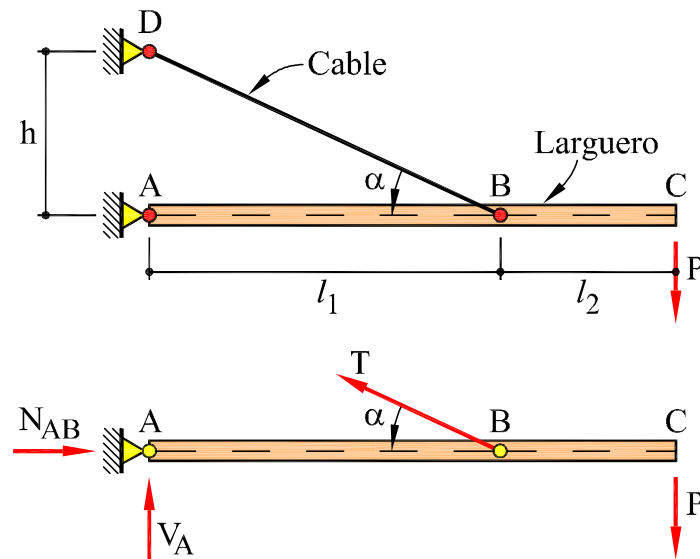


Fig. 5.14: Grúa de carga y equilibrio de fuerzas del Ejemplo 5.3.1

Por equilibrio de momentos en A (Figura 5.14):

$$T \sin \alpha = P \left(\frac{l_1 + l_2}{l_1} \right)$$

Por tanto, la fuerza de tracción en el cable T y el axil N_{AB} en el larguero son iguales a:

$$\begin{aligned} T &= \frac{P}{\sin \alpha} \frac{l_1 + l_2}{l_1} = \frac{30}{0,42436} \cdot 1,5 = +106 \text{ kN} \\ N_{AB} &= -T \cos \alpha = -\frac{30}{0,4687} \cdot 1,5 = -96 \text{ kN} \end{aligned}$$

Nótese que el cable está traccionado (axil positivo) y el larguero entre A y B está comprimido (axil negativo).

(a) *Tensión en el cable*

La tensión en el cable es uniforme, de valor:

$$\sigma = \frac{T}{A_c} = \frac{106 \cdot 10^3}{481 \cdot 10^{-6}} = 220 \text{ MPa}$$

La tensión en el cable es positiva, es decir, de tracción.

(b) *Alargamiento del cable*

Dado que la deformación es uniforme, y teniendo en cuenta que $l_{BD} = l_1 / \cos \alpha = 3,53$ m, el alargamiento del cable es:

$$\Delta l_{BD} = \frac{N_{BD} \cdot l_{BD}}{E_c \cdot A_c} = \frac{106 \cdot 10^3 \cdot 3,53}{140 \cdot 10^9 \cdot 481 \cdot 10^{-6}} = 5,55 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Ejemplo 5.3.2

Un cable de acero de diámetro d , área A_c y longitud l se usa para levantar una viga metálica que pesa P kN (Figura 5.15). El cable tiene un módulo de elasticidad E_c y su carga máxima es P_{\max} . Calcular: (a) la tensión en el cable a levantar la carga, (b) su alargamiento y (c) cuál es el coeficiente de seguridad del cable respecto a su carga máxima.

Datos: $d = 12$ mm, $A_c = 76,7$ mm², $l = 10$ m, $E_c = 140$ GPa, $P = 20$ kN, $P_{\max} = 80$ kN.

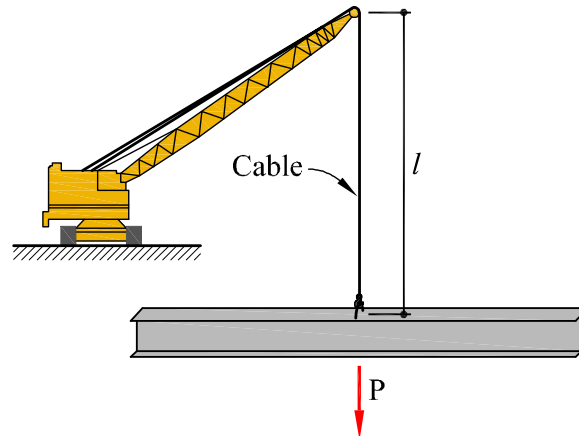


Fig. 5.15: Ejemplo 5.3.2

(a) *Tensión en el cable*

Al levantar la viga metálica, el cable está traccionado. Si no se tiene en cuenta el peso propio del cable, el axil es uniforme y su valor es $N = P$. La tensión en el cable es:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{20 \cdot 10^3}{76,6 \cdot 10^{-6}} = 261 \text{ MPa}$$

(b) *Alargamiento del cable*

Dado que el esfuerzo axial en el cable es uniforme, el alargamiento que sufre el cable al levantar la viga es:

$$\delta = \frac{Pl}{E_c A_c} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 10}{140 \cdot 10^9 \cdot 76,6 \cdot 10^{-6}} = 1,86 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

(c) *Coficiente de seguridad respecto a la carga P_{\max}*

Si la carga máxima que soporta la viga es P_{\max} , el coeficiente de seguridad n es:

$$n = \frac{P_{\max}}{P} = \frac{80}{20} = 4$$

Ejemplo 5.3.3

Una placa cuadrada de hormigón armado, de lado a y espesor b , se levanta por medio de cuatro cables unidos a la placa y a un gancho superior según muestra la Figura 5.16. El área de cada cable es $A_c = 173 \text{ mm}^2$. Calcular la tensión de tracción en los cables debida al peso de la losa y su alargamiento, teniendo en cuenta que el peso específico del hormigón es γ .

Datos: $h = 1,8 \text{ m}$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 0,20 \text{ m}$, $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$, $E_c = 140 \text{ GPa}$.

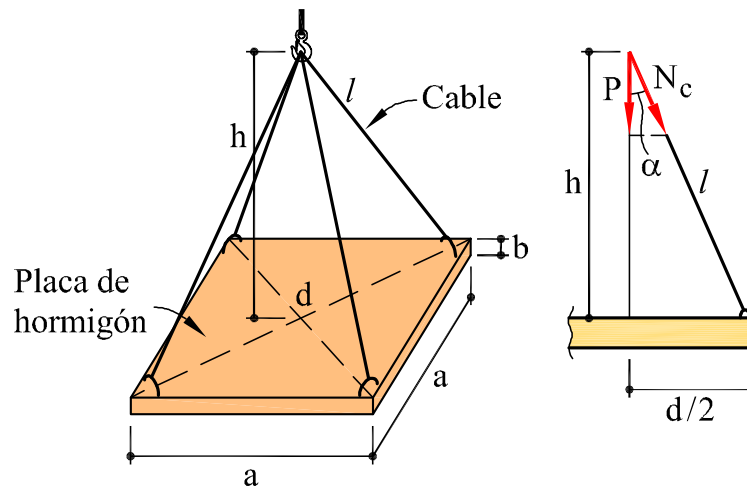


Fig. 5.16: Placa del Ejemplo 5.3.3

Si γ es el peso específico del hormigón armado, el peso de la placa es:

$$P = a^2 b \gamma = 3 \cdot 3 \cdot 0,20 \cdot 24 = 43,2 \text{ kN}$$

De acuerdo a la geometría del problema (Figura 5.16), la longitud de la diagonal es $d = a\sqrt{2} = 2,21 \text{ m}$ y la longitud del cable es $l = \sqrt{h^2 + (d/2)^2} = 2,85 \text{ m}$. Por otra parte, el $\cos \alpha = h/(d/2) = 0,6315$.

Teniendo en cuenta lo anterior, el esfuerzo axial de tracción en cada cable es:

$$N = \frac{1}{4} \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{43,2}{4 \cdot 0,6315} = 17,10 \text{ kN}$$

El axil en los cables es uniforme. Por tanto, la tensión también es uniforme y de valor:

$$\sigma = \frac{N}{A_c} = \frac{17,10 \cdot 10^3}{173 \cdot 10^{-6}} = 98,8 \text{ MPa}$$

y el alargamiento correspondiente resulta:

$$\Delta l = \frac{Nl}{E_c A_c} = \frac{17,10 \cdot 10^3 \cdot 2,85}{140 \cdot 10^9 \cdot 173 \cdot 10^{-6}} = 2,12 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Ejemplo 5.3.4

Un poste vertical de aluminio AB , de altura h y sección transversal A , se atiranta mediante cuatro cables de acero simétricos de longitud l . Los puntos de anclaje de los cables en la sustentación forman un cuadrado cuyo centro es la base del poste (Figura 5.17). Calcular el acortamiento del poste para una fuerza de tracción F en cada cable si el módulo de elasticidad del aluminio es E_{al} .

Datos: $h = 6 \text{ m}$, $A = 110 \text{ cm}^2$, $l = 7,5 \text{ m}$, $F = 15 \text{ kN}$, $E_{al} = 70 \text{ GPa}$.

Cada cable forma con el eje vertical del poste un ángulo α , tal que $\cos \alpha = h/l = 0,8$. Por tanto, la compresión que los cables transmiten al poste es:

$$N = -15 \cdot 0,8 \cdot 4 = -48 \text{ kN}$$

y el acortamiento que este axil de compresión produce es:

$$\delta = \frac{N h}{E_{al} A} = \frac{48 \cdot 10^3 \cdot 6}{70 \cdot 10^9 \cdot 110 \cdot 10^{-4}} = 0,374 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

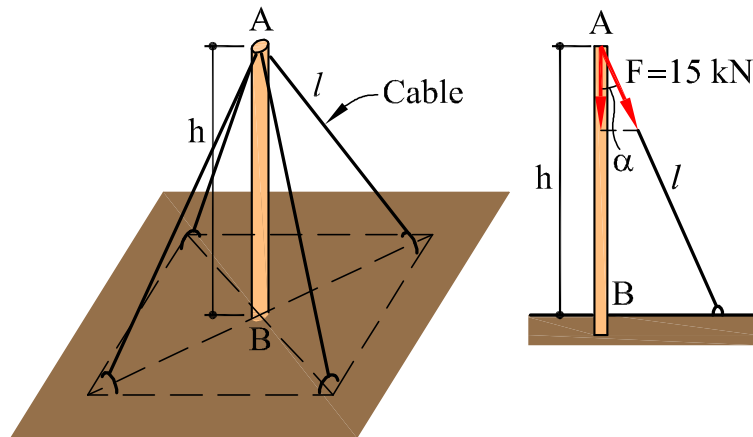


Fig. 5.17: Poste del Ejemplo 5.3.4

5.4 Axil y temperatura

Es frecuente que las piezas estén sometidas a la acción del esfuerzo axil y a variaciones de temperatura de forma concurrente. Recordando la Sección 2.4, la deformación térmica es:

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T \quad (5.11)$$

Y la ley de Hooke incluyendo el efecto térmico es:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon_T \quad (5.12)$$

donde se han considerado despreciables las tensiones σ_y y σ_z . Entonces:

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x - \varepsilon_T) \quad (5.13)$$

Si σ_x es uniforme en la sección, el axil es:

$$N = \int_S \sigma_x dS = \sigma_x A = EA(\varepsilon_x - \varepsilon_T) \quad (5.14)$$

de donde:

$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA} + \varepsilon_T \quad (5.15)$$

Ejemplo 5.4.1

Una viga en ménsula de longitud l está formada por un perfil de acero laminado de tipo IPE240. Dicha viga se somete a una variación uniforme de temperatura $\Delta T > 0$ (Figura 5.18). Se pide: (a) Dibujar las leyes de esfuerzos de la ménsula. (b) Calcular el alargamiento que sufre la ménsula. (c) ¿Qué fuerza habría que aplicar en el extremo libre para que la viga recuperase la longitud inicial? Calcular las nuevas leyes de esfuerzos y las tensiones en toda la viga.

Datos: $l = 2$ m, $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $A = 46,1 \text{ cm}^2$, $E = 200 \text{ GPa}$.

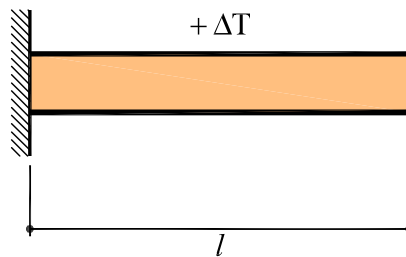


Fig. 5.18: Ménsula del Ejemplo 5.4.1

(a) La estructura es isostática por lo que un incremento de temperatura no supone un aumento de tensión. Por tanto, no se generan reacciones ni esfuerzos.

(b) Debido al incremento de temperatura ΔT la ménsula sufre una dilatación constante en toda la viga que vale:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_T = \alpha \Delta T$$

En cada rebanada de longitud dx el incremento de longitud es:

$$du = \varepsilon_x dx = \alpha \Delta T dx$$

Por tanto, el desplazamiento en el extremo libre es:

$$\Delta l = \int_l \varepsilon_x dx = \alpha \Delta T \int_l dx = \alpha \Delta T \cdot l = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

(c) La ménsula sometida al incremento de temperatura sufre un alargamiento $\Delta l = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, por lo que para recuperar su estado inicial es necesario aplicar un axil N uniforme de compresión que provoque un acortamiento del mismo valor Δl .

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \implies N = \frac{EA}{l} \Delta l = -92,2 \text{ kN}$$

Una fuerza $F = N$ aplicada en el extremo de la ménsula provoca una ley de axiles uniforme e igual a N en toda la ménsula. Las correspondientes tensiones son:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{-92,2 \cdot 10^3}{46,1 \cdot 10^{-4}} = -20 \text{ MPa} \quad (\text{C})$$

La deformación final es:

$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta T = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T = 0$$

lo que corresponde con un alargamiento final nulo.

6 Flexión Recta

6.1 Introducción

Una pieza está sometida a *flexión pura* cuando sus secciones están solicitadas únicamente por un momento flector M (Figura 6.1a). Los esfuerzos axil N , cortante T y momento torsor M_t son nulos en todas las secciones de la pieza. Por su parte, una pieza está sometida a *flexión simple* cuando sus secciones están sometidas a momento flector variable y, en consecuencia, viene acompañado de esfuerzo cortante (Figura 6.1b). Por el contrario, se dice que una sección está sometida a *flexión compuesta* cuando sobre ella actúa un momento flector y un esfuerzo axil (Figura 6.2). Por último, si actúan a la vez momentos flectores y momento torsor, se dice que la sección está sometida a *flexo-torsión*.

6.2 Flexión pura recta

La flexión pura es, por tanto, el caso más sencillo de flexión que se puede plantear. Los resultados que se deducen de su estudio pueden aplicarse a los casos más corrientes de flexión simple o flexión compuesta, siempre que se tengan en cuenta, de forma adecuada, las diferencias entre unos casos y otros. Abordaremos primero el estudio de la flexión

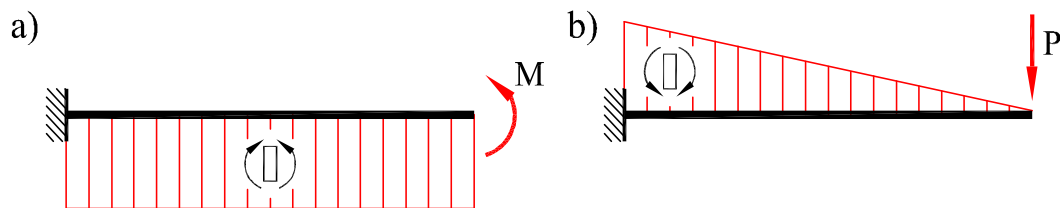


Fig. 6.1: Voladizo sometido (a) flexión pura y (b) flexión simple

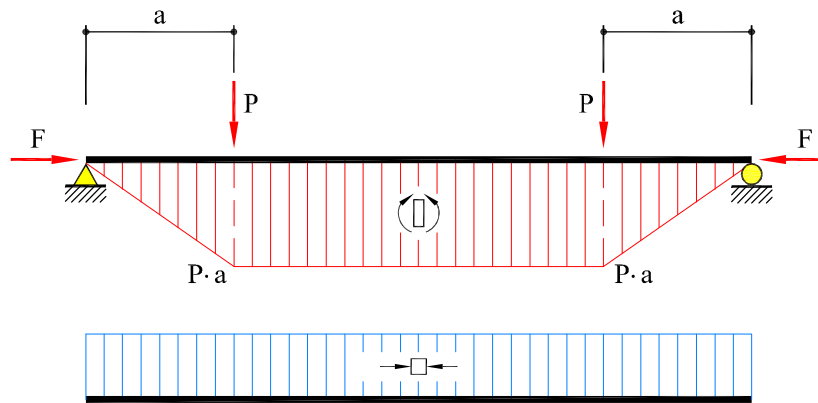


Fig. 6.2: Viga biapoyada sometida a flexión compuesta

pura, para generalizar luego los resultados obtenidos al caso de flexión simple y de la flexión compuesta.

Dado que los diferentes esfuerzos que actúan sobre una sección no son sino las fuerzas y momentos resultantes de las tensiones que actúan sobre dicha sección, en el caso de *flexión pura* con momento flector M_z constante, deben cumplirse las igualdades:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_S \sigma_x dS = 0 & ; & \quad T_y = \int_S \tau_{xy} dS = 0 \\
 T_z &= \int_S \tau_{xz} dS = 0 & ; & \quad M_t = \int_S (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dS = 0 \\
 M_y &= \int_S \sigma_x z dS = 0 & ; & \quad M_z = - \int_S \sigma_x y dS
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

tal y como se vio en el Capítulo 3. Estas ecuaciones integrales no bastan para determinar la distribución de tensiones en la sección. Es necesario, por tanto, establecer hipótesis simplificativas relativas a la deformación de la sección, de forma análoga a como se hizo en el caso del esfuerzo axial.

6.2.1 Flexión pura en piezas de plano medio

Consideremos una viga recta, de sección constante y con un plano de simetría longitudinal, sometida a flexión pura según dicho plano. Llamaremos xy al plano de sollicitación, que, en este caso, coincide con el plano medio (de simetría); por tanto, el momento flector actuante sólo tiene componente M_z (Figura 6.3a).

Al estar en flexión pura, el momento flector será constante a lo largo de la pieza y, por tanto, la deformación producida por éste será la misma en todas las rebanadas de

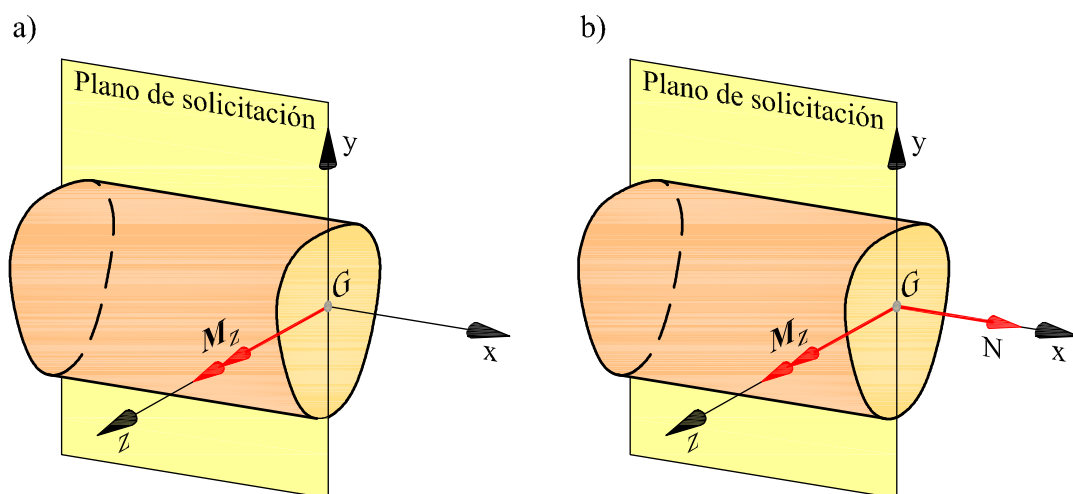


Fig. 6.3: Flexión en piezas de plano medio: a) pura recta y b) compuesta recta

la viga. En consecuencia, la directriz de la viga se deformará en una curva de curvatura constante, es decir, en un arco de circunferencia de centro O , contenido en el plano de simetría de la pieza, tal como se muestra en la Figura 6.4. En estas condiciones, dada la simetría del problema respecto al punto O se puede asegurar que

“en la deformación de una pieza recta sometida a flexión pura, las secciones rectas permanecen planas y normales a la deformada de la directriz”.

Ésta es la hipótesis de deformación de Bernoulli-Navier; su validez puede ser comprobada experimentalmente en situaciones más generales que las consideradas en este apartado.

Según la hipótesis de deformación, las fibras longitudinales que forman la rebanada se curvan transformándose en arcos de circunferencia concéntricos con la deformada de la directriz de la pieza, tal como se muestra en la Figura 6.5b. En este proceso de deformación, las fibras pueden aumentar o disminuir su longitud. En el primer caso, estarán sometidas a deformación y tensión longitudinal de tracción, y de compresión en el segundo. Al ser el esfuerzo axial sobre la sección nulo, debe cumplirse que:

$$N = \int_S \sigma_x dS = 0 \quad (6.2)$$

Por tanto, una parte de las fibras estarán sometidas a tracción, con tensiones longitudinales positivas ($\sigma_x > 0$) y otra a compresión, con tensiones longitudinales negativas ($\sigma_x < 0$). Por continuidad de la deformación, existirá una línea que dividirá la sección en una parte traccionada y otra comprimida, y en la que la tensión longitudinal será

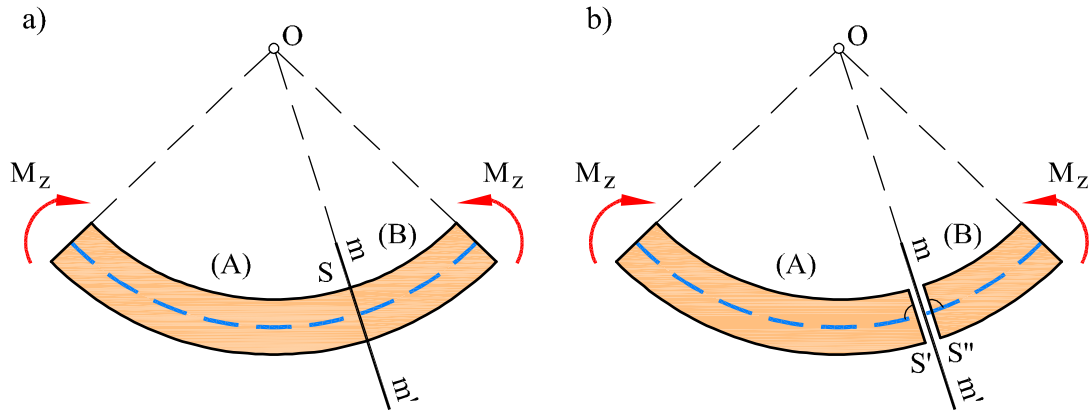


Fig. 6.4: Deformada de la directriz y de las secciones rectas en flexión pura recta

nula ($\sigma_x = 0$). Al ser la deformación plana esta “línea neutra” será una recta, y por simetría del problema respecto del plano medio, será una recta perpendicular a dicho plano de simetría. A esta recta, contenida en el plano de la sección y perpendicular al plano de simetría, se le llama *eje neutro*.

En consecuencia, para casos de flexión pura en piezas rectas de plano medio, la hipótesis de Bernoulli-Navier implica que cada sección gira con relación a una sección próxima alrededor de un eje llamado *eje neutro*, manteniéndose plana en la deformación, y de manera que el plano de la sección pasa por el centro de curvatura de la deformada de la directriz.

Dado que está implícito en todo este desarrollo que se cumple la hipótesis de pequeños movimientos, el giro de flexión que se produce en cada rebanada, $d\phi_z$, es pequeño y, por tanto, se pueden identificar los arcos comprendidos por éste con sus respectivas tangentes. Por consiguiente, puede identificarse la deformación de la rebanada diferencial representada en la Figura 6.5b con la correspondiente linearización, tal como se indica en la Figura 6.5c.

Analicemos ahora, en detalle, la deformación de una rebanada de longitud diferencial dx , que se produce tal como se muestra en la Figura 6.6. En la sección se toma el eje y según el plano de simetría (eje principal de inercia Figura 6.6b), y el eje z , perpendicular al anterior, coincidente con el eje neutro nn' (Figura 6.6a), de posición por ahora desconocida. De la semejanza de los triángulos OAB y BED se deduce:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BE}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\rho_z} = \frac{\varepsilon_x dx}{-y} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = -\frac{y}{\rho_z} \quad (6.3)$$

donde ρ_z denota el radio de curvatura de las fibras situadas sobre el eje neutro, como por

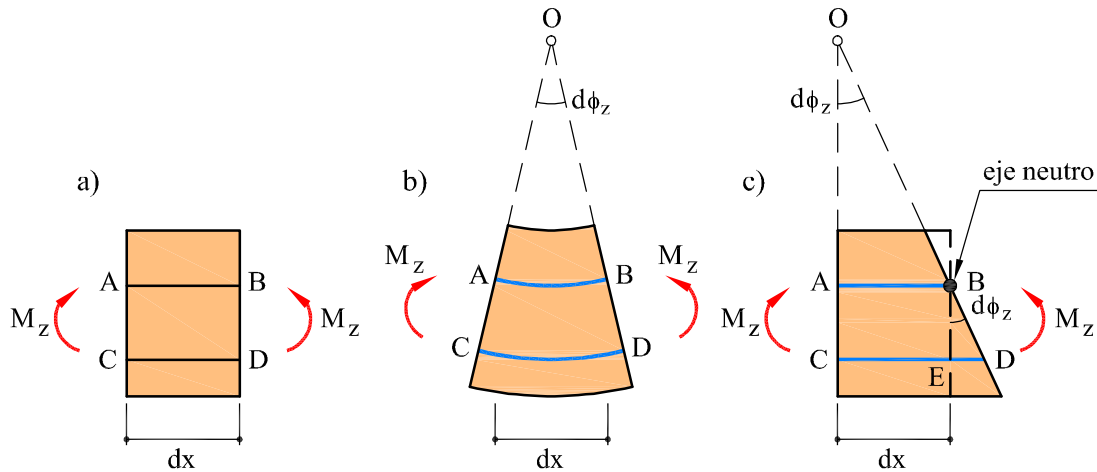


Fig. 6.5: Deformación de la rebanada en flexión recta

ejemplo la fibra AB , la coordenada y mide la distancia de una fibra genérica, como por ejemplo la fibra CD , al eje neutro y ε_x representa la deformación longitudinal de una de estas fibras. Se observa que los alargamientos ε_x de las fibras son proporcionales a la distancia de éstas al eje neutro, y ; lo mismo puede decirse de las tensiones, ya que según la ley de Hooke (y considerando que las tensiones normales a planos perpendiculares al de la sección son despreciables frente a las tensiones normales, esto es, $\sigma_y, \sigma_z \ll \sigma_x$):

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -\frac{E y}{\rho_z} \quad (6.4)$$

Por tanto, la distribución de tensiones es lineal, estando sometidos a la misma tensión todos los puntos situados sobre rectas paralelas al eje neutro nn' , y será nula para los puntos situados sobre dicho eje neutro, tal como se muestra en la Figuras 6.6 y 6.7.

Integrando esta distribución de tensiones y considerando que el esfuerzo axial sobre la sección es nulo se tiene:

$$N = \int_S \sigma_x dS = -\frac{E}{\rho_z} \int_S y dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_S y dS = 0 \quad (6.5)$$

La integral que debe anularse es el momento estático de la sección respecto al eje neutro. Por tanto, el eje neutro debe pasar por el centro de gravedad de la sección G y coincide *necesariamente* con el segundo eje principal de inercia de la sección (eje z). Por este motivo y por simetría respecto al plano medio, se cumple idénticamente que:

$$M_y = \int_S \sigma_x z dS = -\frac{E}{\rho_z} \int_S y z dS \equiv 0 \quad (6.6)$$

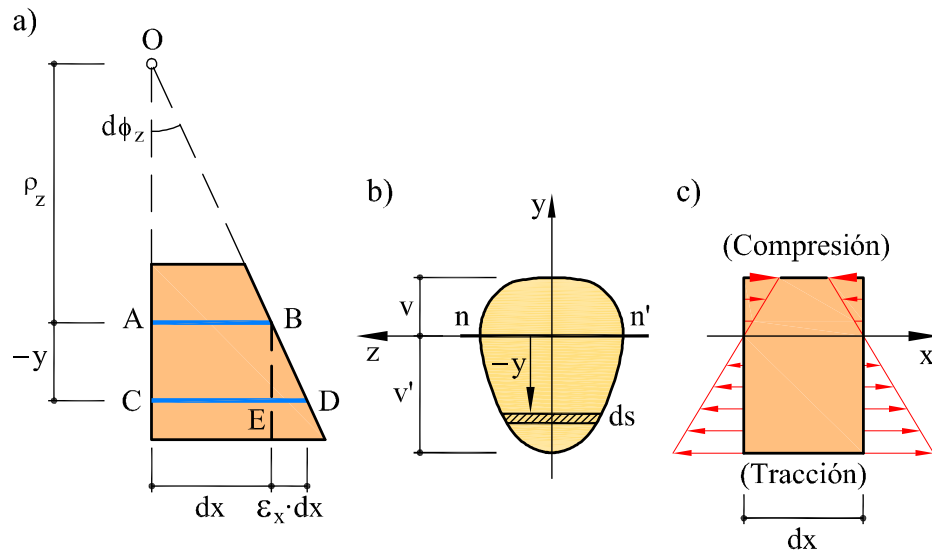


Fig. 6.6: Elongaciones de las fibras y distribución de las tensiones

Por otro lado, el momento resultante de las tensiones respecto al eje neutro debe ser igual al momento flector actuante:

$$M_z = - \int_S \sigma_x y dS = \frac{E}{\rho_z} \int_S y^2 dS = \frac{E I_z}{\rho_z} \quad (6.7)$$

siendo $I_z = \int_S y^2 dS$ el momento de inercia de la sección respecto al eje z . Por tanto:

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (6.8)$$

La expresión obtenida indica que la curvatura, $\chi_z = 1/\rho_z$, varía proporcionalmente al momento flector actuante M_z , y de forma inversamente proporcional al producto EI_z , llamado *rigidez a flexión* de la sección. Se observa también en la expresión anterior que, por definición de curvatura $\chi_z = 1/\rho_z = d\phi_z/dx$ (Figura 6.6), se tiene:

$$d\phi_z = \frac{dx}{\rho_z} = \frac{M_z}{EI_z} dx \quad (6.9)$$

donde $d\phi_z$ es el ángulo relativo girado por dos secciones que delimitan una rebanada diferencial. El giro relativo total entre las dos secciones extremas de la pieza se obtiene integrando el giro relativo a lo largo de toda la pieza, es decir:

$$\Delta\phi_z = \int_l d\phi_z = \int_l \chi_z dx = \int_0^l \frac{M_z}{EI_z(x)} dx \quad (6.10)$$

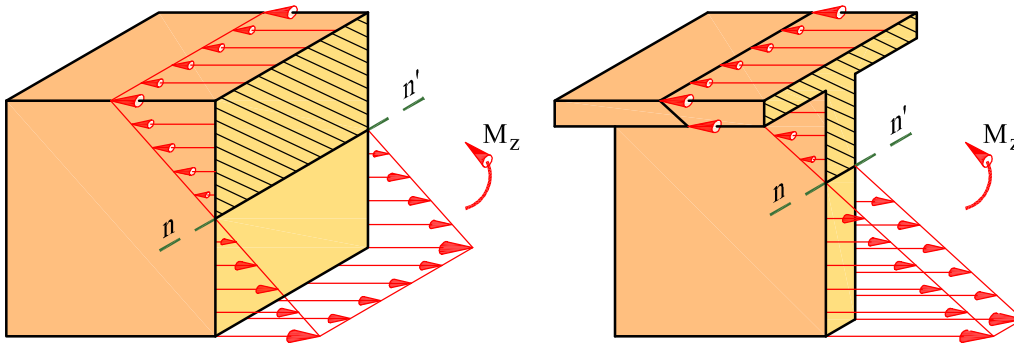


Fig. 6.7: Distribución de tensiones en flexión pura recta

donde l es la longitud total de la pieza. Si la viga es de sección constante, la rotación total $\Delta\phi_z$ de una de las secciones extremas respecto a la otra será igual a:

$$\Delta\phi_z = \frac{M_z l}{E I_z} \quad (6.11)$$

Finalmente, eliminando el radio de curvatura ρ_z de las ecuaciones (6.4) y (6.7) se obtiene:

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \quad (6.12)$$

expresión conocida como *ley de Navier*, que permite calcular la tensión normal en un punto de la sección, conocida su distancia al eje neutro, y que pone nuevamente de manifiesto la distribución lineal de las tensiones normales de flexión. Es obvio que las tensiones máximas se darán en los puntos de la sección más alejados del eje neutro y que la tensión máxima de compresión no es igual a la tensión máxima de tracción, salvo que las distancias de las respectivas fibras extremas al centro de gravedad sean iguales (ver, por ejemplo, los casos mostrados en la Figura 6.7).

Asimismo, debe hacerse notar que la hipótesis de distribución lineal de las deformaciones de las fibras, y la correspondiente de distribución lineal de las tensiones normales, son exactas cuando los momentos exteriores están aplicados precisamente en esa forma sobre las secciones correspondientes. En el caso de no serlo, según el Principio de Saint-Venant, los resultados obtenidos son válidos para secciones suficientemente alejadas de las secciones donde se aplican los momentos. La distancia a la que se verifica esta hipótesis es aproximadamente igual a las dimensiones transversales de la pieza.

Al mantenerse las secciones rectas normales a las fibras longitudinales, los elementos diferenciales no sufren distorsión angular, es decir, los ángulos rectos permanecen rectos. Por tanto, las distorsiones γ_{xz} y γ_{yz} son nulas en todo punto (Figura 6.8) y, en virtud

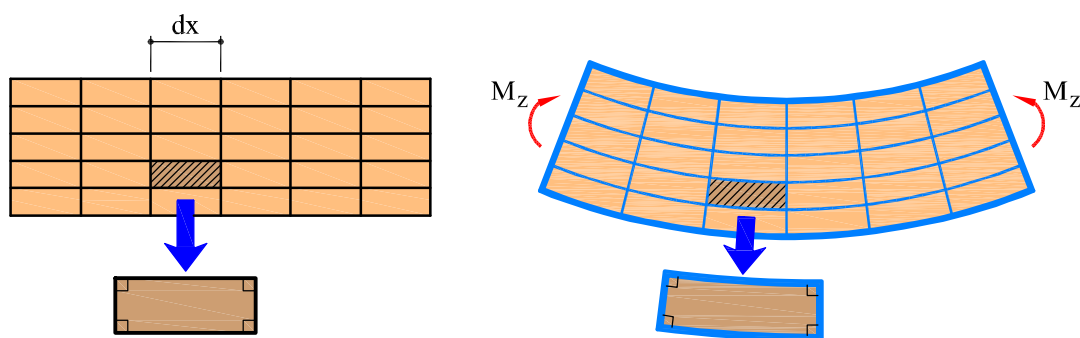


Fig. 6.8: Ausencia de distorsiones angulares en la deformación por flexión pura

de la ley de Hooke, las tensiones tangenciales correspondientes también son nulas, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Por tanto, las ecuaciones:

$$T_y = \int_S \tau_{xy} dS \equiv 0 \quad ; \quad T_z = \int_S \tau_{xz} dS \equiv 0 \quad ; \quad M_t = \int_S (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dS \equiv 0 \quad (6.13)$$

se cumplen idénticamente.

6.2.2 Flexión pura según un plano principal de inercia

Supongamos ahora que la pieza está solicitada a flexión pura por un par de momentos M_z contenidos en el *plano principal de inercia* formado por los ejes x e y , pero que éste *no es un plano de simetría longitudinal* de la pieza. Suponiendo que también para este caso sea válida la hipótesis de Bernoulli-Navier y que se cumpla la ley de Hooke, las tensiones estarán dadas por la ecuación (6.4). Entonces, la relación entre esfuerzos y tensiones sobre la sección exige que sea

$$M_y = \int_S \sigma_x z dS = -\frac{E}{\rho_z} \int_S y z dS = -\frac{E}{\rho_z} I_{yz} = 0 \quad (6.14)$$

condición que se cumple ya que los ejes (y, z) son los *ejes principales de inercia de la sección* ($I_{yz} = 0$). Por tanto, la teoría de flexión desarrollada en la sección anterior para secciones de plano medio será también válida en secciones sin plano de simetría, siempre que el momento flector actúe en un plano que contenga a uno de los ejes principales de inercia, es decir, siempre que el plano de sollicitación coincida con uno de los llamados *planos principales de flexión*. Este resultado fue obtenido por primera vez por Persy y citado por Saint-Venant en 1864.

La teoría de flexión pura estudiada hasta aquí se caracteriza por el hecho de que el *plano en el que se produce la deformación por flexión coincide con el plano de actuación*

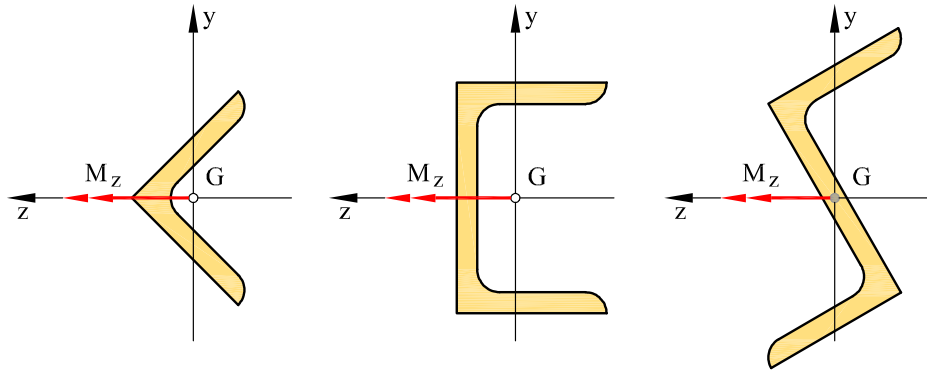


Fig. 6.9: Flexión recta alrededor de un plano principal de inercia

del momento, y el eje neutro es normal a este plano. Por este motivo recibe el nombre de flexión pura recta o flexión de Navier, en homenaje al ingeniero Louis Navier (1785-1836) que la estableció. Dado que toda sección tiene al menos dos planos principales de inercia, es siempre posible solicitar una pieza a flexión recta. En la Figura 6.9 se muestran casos de flexión recta sobre secciones de varias geometrías.

Debe señalarse, finalmente, que la hipótesis de que las secciones rectas permanecen planas después de la deformación y normales a la deformada de la directriz es puramente geométrica, es decir, que no establece ninguna condición con respecto al comportamiento del material. Por tanto, la hipótesis de Bernoulli-Navier puede extenderse a los casos en que el material no sea homogéneo, ni isótropo, ni elástico. Sin embargo, para obtener la ley de tensiones se ha supuesto que la pieza es homogénea y que el material es isótropo y elástico lineal. En caso contrario, la ley de tensiones no vendrá dada por la ley de Navier.

6.2.3 Momentos máximos admisibles

Como en una sección sometida a flexión pura la ley de tensiones es lineal, los valores máximos de tensión se dan necesariamente en las fibras más alejadas del eje neutro. Llamaremos v y v' a las distancias de las fibras superior e inferior de la sección al eje z , y w y w' a las distancias de las fibras extremas a izquierda y derecha del eje y , respectivamente (Figura 6.10a y b). Sea, además, σ_{adm} el valor absoluto de la tensión admisible del material. Supondremos primero que esta tensión es igual a tracción que a compresión.

El máximo momento M_z^{max} que puede soportar la sección solicitada a flexión pura, según el eje principal de inercia z , es aquel que produce, según la ley de Navier, una

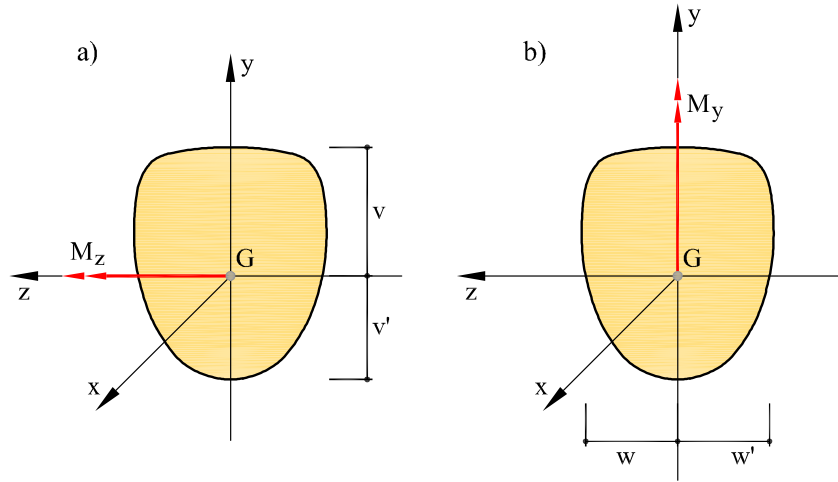


Fig. 6.10: Localización de las fibras extremas en flexión recta

tensión igual a σ_{adm} en la fibra superior o en la fibra inferior. Es, por tanto:

$$M_z^{\max} = \frac{\sigma_{adm} I_z}{\max(v, v')} = \min\left(\frac{\sigma_{adm} I_z}{v}, \frac{\sigma_{adm} I_z}{v'}\right) \quad (6.15)$$

Análogamente, se puede definir el máximo momento M_y^{\max} que puede resistir la sección solicitada a flexión pura según el eje principal de inercia y , como

$$M_y^{\max} = \frac{\sigma_{adm} I_y}{\max(w, w')} = \min\left(\frac{\sigma_{adm} I_y}{w}, \frac{\sigma_{adm} I_y}{w'}\right) \quad (6.16)$$

Estas definiciones pueden generalizarse al caso en que el material tenga diferente tensión máxima admisible a tracción σ_{adm}^t que a compresión σ_{adm}^c . En este caso, cabe distinguir entre los momentos máximos positivos (tracción en fibras v' y w , compresión en fibras v y w' , respectivamente), que serán:

$$(M_z^{\max})^+ = \min\left(\frac{\sigma_{adm}^c I_z}{v}, \frac{\sigma_{adm}^t I_z}{v'}\right) \quad ; \quad (M_y^{\max})^+ = \min\left(\frac{\sigma_{adm}^c I_y}{w'}, \frac{\sigma_{adm}^t I_y}{w}\right) \quad (6.17)$$

y los momentos máximos negativos (tracción en fibras v y w' , compresión en fibras v' y w , respectivamente), que serán (en valor absoluto):

$$(M_z^{\max})^- = \min\left(\frac{\sigma_{adm}^c I_z}{v'}, \frac{\sigma_{adm}^t I_z}{v}\right) \quad ; \quad (M_y^{\max})^- = \min\left(\frac{\sigma_{adm}^c I_y}{w}, \frac{\sigma_{adm}^t I_y}{w'}\right) \quad (6.18)$$

6.2.4 Módulos resistentes

Supongamos que la sección está solicitada a flexión recta por un momento M_z contenido en el plano xy , y sea σ_{adm} la tensión admisible del material, igual a tracción que a compresión. Debe cumplirse que:

$$\sigma_{\text{adm}} \geq \frac{M_z |y|_{\text{max}}}{I_z} = \frac{M_z}{W_z} \quad \text{con} \quad W_z = \frac{I_z}{|y|_{\text{max}}} = \frac{I_z}{\max(v, v')} \quad (6.19)$$

A la relación W_z se le denomina *módulo resistente de la sección respecto al eje z* y sus dimensiones son $[L^3]$.

Al dimensionar una viga solicitada por un momento M_z , elegiremos una sección de módulo resistente tal que cumpla:

$$W_z \geq \frac{M_z}{\sigma_{\text{adm}}} \quad (6.20)$$

Obviamente, se puede definir el módulo resistente para cada eje principal de flexión, como características geométricas de la sección.

6.2.5 Rendimiento geométrico

Puesto que, según la ley de Navier, las tensiones máximas se producen en los puntos más alejados del eje neutro y éstas no deben sobrepasar el valor de la tensión admisible σ_{adm} , resulta que en los otros puntos de la sección se tienen tensiones de valor inferior a la admisible, es decir, que el material no está totalmente aprovechado.

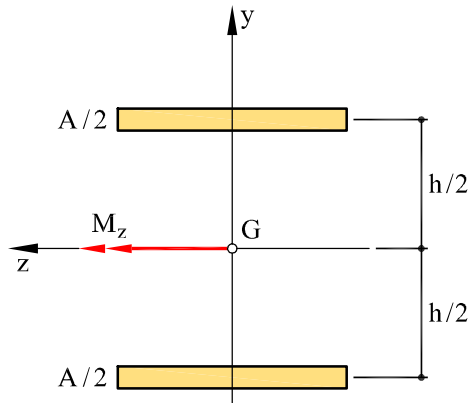


Fig. 6.11: Localización de las fibras extremas en flexión recta

La forma ideal de una sección que trabaje a flexión pura será, por tanto, aquella que tenga el material dispuesto a la mayor distancia posible del eje neutro (Figura 6.11). La sección óptima, para un área A y un canto h dados, será aquella que presente un mayor módulo de resistencia respecto al eje de flexión. El valor máximo del módulo resistente corresponde a una sección ideal simétrica con todo el material concentrado en las fibras extremas, a distancia $h/2$ del centro de gravedad. En este caso, el valor del módulo resistente será (suponiendo, por ejemplo, flexión alrededor del eje z):

$$\begin{aligned} W_z^{\text{opt}} &= \frac{I_z}{|y|_{\text{max}}} \\ &= \frac{2 \frac{A}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2}{\frac{h}{2}} = \frac{Ah}{2} \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde h es el canto de la pieza, o sea la distancia entre las fibras extremas. Para una sección *real* de forma arbitraria, de área A y canto h , se podrá escribir:

$$W_z = \eta_z W_z^{\text{opt}} = \eta_z \frac{Ah}{2} \quad \text{con} \quad 0 \leq \eta_z \leq 1 \quad (6.22)$$

donde η_z es un coeficiente adimensional que se llama *rendimiento geométrico de la sección respecto al eje z* .

Obviamente, se pueden definir los rendimientos geométricos para cada eje principal de flexión, como características geométricas de la sección.

El rendimiento geométrico es siempre menor que la unidad, y el material de la pieza está mejor aprovechado cuanto mayor sea el valor de η para el eje de flexión.

El valor del rendimiento geométrico de algunas de las secciones más usuales (Figura 6.12) es el siguiente:

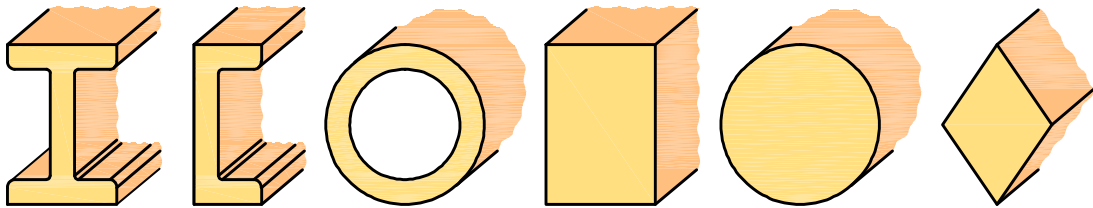


Fig. 6.12: Secciones más usuales en Resistencia de Materiales

$$\eta \simeq \frac{2}{3} \text{ para perfiles estándar de acero laminado en doble T,}$$

$$\eta \simeq \frac{3}{5} \text{ para perfiles estándar de acero laminado en U y carriles de ferrocarril,}$$

$$\eta \simeq \frac{1}{2} \text{ para anillos circulares delgados,}$$

$$\eta = \frac{1}{3} \text{ para secciones rectangulares macizas,}$$

$$\eta = \frac{1}{4} \text{ para secciones circulares,}$$

$$\eta = \frac{1}{6} \text{ para secciones romboidales.}$$

Ejemplo 6.2.1

Una viga recta, de sección normal en T, trabaja a flexión pura de tal forma que en la fibra superior se produce una tensión de compresión $\sigma_{\max}^c = 100 \text{ MPa}$, y en la fibra inferior una tensión de tracción de $\sigma_{\max}^t = 50 \text{ MPa}$ (Figura 6.13). Determinar: (a) la situación del eje neutro, (b) la anchura b de la viga, (c) el momento flector que solicita a la viga y (d) el máximo momento admisible si la tensión admisible del material es $\sigma_{\text{adm}} = 250 \text{ MPa}$.

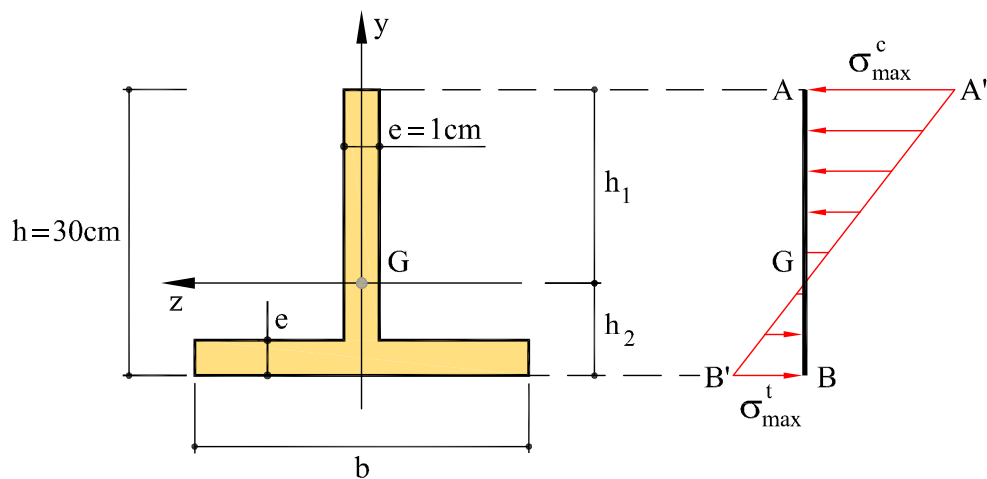


Fig. 6.13: Sección del Ejemplo 6.2.1

(a) Como la variación de tensiones a lo largo de la altura de la viga es lineal, la posición del eje neutro se obtiene directamente a partir de las tensiones extremas. De la semejanza de triángulos GAA' y GBB' , puede escribirse:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sigma_{\max}^c}{\sigma_{\max}^t} = \frac{100}{50} = 2$$

luego, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 &= 30 \\ \frac{h_1}{h_2} &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 20 \text{ cm} \\ h_2 = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

(b) El eje neutro debe pasar por el centro de gravedad de la sección, por tanto, el momento estático de ésta respecto al eje z debe ser nulo. Calculemos primero los momentos estáticos del alma y del ala por separado:

$$\begin{aligned} \text{alma : } m_{\text{alma}}^e &= e [h_1 + (h_2 - e)] \left[\frac{1}{2} (h_1 + (h_2 - e)) - (h_2 - e) \right] \\ &= \frac{e}{2} [h_1^2 - (h_2 - e)^2] \\ \text{ala : } m_{\text{ala}}^e &= -e b (h_2 - \frac{e}{2}) \end{aligned}$$

y, sumando ambos momentos estáticos:

$$m_{\text{alma}}^e + m_{\text{ala}}^e = 0 \Rightarrow \frac{e}{2} [h_1^2 - (h_2 - e)^2] - eb (h_2 - \frac{e}{2}) = 0$$

de donde:

$$b = \frac{h_1^2 - (h_2 - e)^2}{2(h_2 - \frac{e}{2})} = 16,79 \text{ cm}$$

(c) El momento flector exterior es igual al momento resultante de las tensiones normales respecto al eje neutro. Llamaremos M_{alma} y M_{ala} a los momentos de las tensiones que actúan sobre el alma y el ala, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{alma : } M_{\text{alma}} &= \left[\frac{1}{2} \sigma_{\max}^c (h_1 e) \right] \frac{2}{3} h_1 + \left[\frac{1}{2} \left(\sigma_{\max}^t \frac{h_2 - e}{h_2} \right) (h_2 - e) e \right] \frac{2}{3} (h_2 - e) \\ \text{ala : } M_{\text{ala}} &= \left[\frac{1}{2} \sigma_{\max}^t (h_2 b) \right] \frac{2}{3} h_2 - \left[\frac{1}{2} \left(\sigma_{\max}^t \frac{h_2 - e}{h_2} \right) (h_2 - e) b \right] \frac{2}{3} (h_2 - e) \end{aligned}$$

Sustituyendo valores, se obtiene $M_{\text{alma}} = 14,548 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y $M_{\text{ala}} = 7,584 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Sumando ambos valores, se obtiene el momento flector que actúa sobre la sección:

$$M_z = M_{\text{alma}} + M_{\text{ala}} = 22,132 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Alternativamente, se puede obtener M_z de aplicar la ley de Navier a cualquiera de los puntos de la sección en los que se conoce la tensión. Para ello, es preciso calcular primero el momento de inercia de la sección respecto del eje z

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{1}{12} [h_1 + (h_2 - e)]^3 e + \\ &\quad + [h_1 + (h_2 - e)] e \left[\frac{1}{2} (h_1 + (h_2 - e)) - (h_2 - e) \right]^2 + \\ &\quad + \frac{1}{12} b e^3 + b e \left(h_2 - \frac{e}{2} \right)^2 \\ &= 4426,37 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Aplicando ahora la ley de Navier, por ejemplo, a las fibras superiores, donde se da la máxima compresión:

$$\sigma_{\max}^c = -\frac{M_z h_1}{I_z} \implies M_z = 22,132 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(d) El máximo momento admisible será el que hace se alcance σ_{adm} en la fibra superior, ya que $h_1 = \max(v, v')$

$$M_z^{\max} = \min \left(\frac{\sigma_{\text{adm}} I_z}{h_1}, \frac{\sigma_{\text{adm}} I_z}{h_2} \right) = \frac{\sigma_{\text{adm}} I_z}{h_1} = 55,329 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ejemplo 6.2.2

Calcular el máximo momento flector que puede soportar una viga de sección rectangular de ancho b y altura h según sus dos ejes principales de inercia (Figura 6.14), si la tensión admisible del material es σ_{adm} .

(a) El momento máximo admisible M_z^{\max} actuando en el plano xy es el que produce una tensión igual a σ_{adm} en las fibras extremas ($y = \pm h/2$). O sea:

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{M_z^{\max} \frac{h}{2}}{I_z} = \frac{M_z^{\max} \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} b h^3}$$

Por tanto:

$$M_z^{\max} = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{\frac{h}{2}} \sigma_{\text{adm}} = \left(\frac{1}{6} b h^2 \right) \sigma_{\text{adm}} = W_z \sigma_{\text{adm}}$$

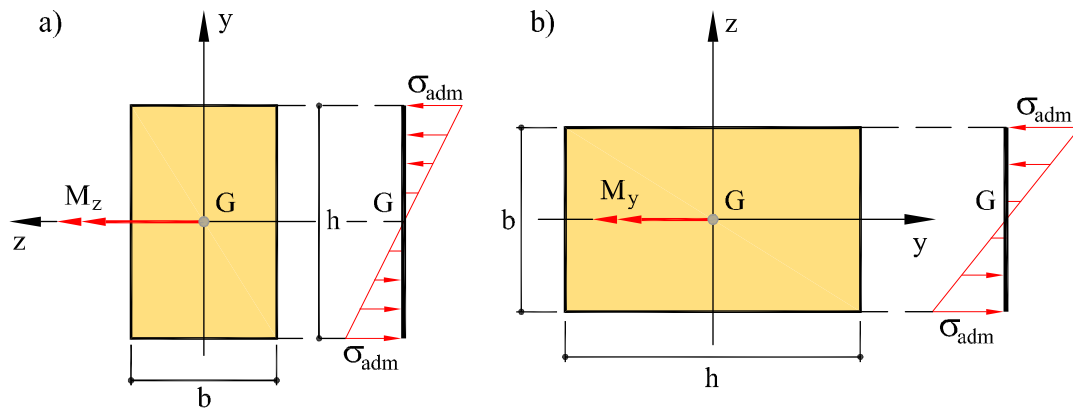


Fig. 6.14: Ejemplo 6.2.2: sección rectangular trabajando a flexión recta según los dos planos principales de inercia

Obsérvese que $W_z = (1/6)bh^2 = (1/3)(Ah/2)$ y, por tanto, $\eta_z = 1/3$.

(b) El máximo momento admisible M_y^{\max} actuando en el plano xz se obtiene análogamente sólo con intercambiar adecuadamente las dimensiones b y h . Así:

$$M_y^{\max} = \frac{1}{12} \frac{hb^3}{b} \sigma_{\text{adm}} = \left(\frac{1}{6} hb^2 \right) \sigma_{\text{adm}} = W_y \sigma_{\text{adm}}$$

Obsérvese que $W_y = (1/6)hb^2 = (1/3)(Ab/2)$ y que $\eta_y = 1/3$. Por tanto, la relación entre los dos momentos máximos es:

$$\frac{M_z^{\max}}{M_y^{\max}} = \frac{\left(\frac{1}{6} bh^2 \right) \sigma_{\text{adm}}}{\left(\frac{1}{6} hb^2 \right) \sigma_{\text{adm}}} = \frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}$$

Ejemplo 6.2.3

Hallar los módulos resistentes W_y, W_z y los rendimientos geométricos η_y, η_z del perfil de la Figura 6.15, con cotas en cm.

El área del perfil es igual a:

$$A = 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 12 \cdot 2 = 41 \text{ cm}^2$$

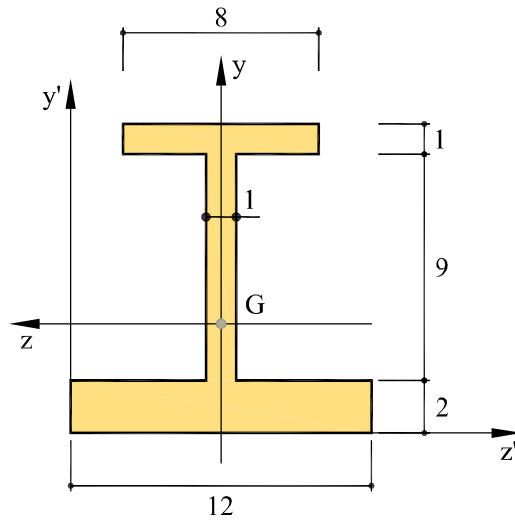


Fig. 6.15: Sección del Ejemplo 6.2.3

La posición del centro de gravedad queda determinada por:

$$y'_G = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{1}{41} (8 \cdot 11,5 + 9 \cdot 6,5 + 24 \cdot 1) = 4,25 \text{ cm}$$

$$z'_G = 6,0 \text{ cm} \quad (\text{en el eje de simetría})$$

Los momentos de inercia de la sección con respecto a los ejes (y, z) son:

$$I_y = \frac{1}{12} 1 \cdot 8^3 + \frac{1}{12} 9 \cdot 1^3 + \frac{1}{12} 2 \cdot 12^3$$

$$= 331,42 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} 8 \cdot 1^3 + \frac{1}{12} 1 \cdot 9^3 + \frac{1}{12} 12 \cdot 2^3$$

$$+ 1 \cdot 8 \cdot (7,25)^2 + 1 \cdot 9 \cdot (2,25)^2 + 2 \cdot 12 \cdot (3,25)^2$$

$$= 788,98 \text{ cm}^4$$

Luego, los módulos resistentes y los rendimientos geométricos respecto a los ejes (y, z) son iguales a:

$$W_y = \frac{I_y}{|z|_{\max}} = \frac{331,42}{6} = 55,24 \text{ cm}^3 \quad ; \quad \eta_y = \frac{W_y}{\frac{b}{A \frac{h}{2}}} = \frac{55,24}{41 \cdot 6} = 0,225$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}} = \frac{788,98}{7,75} = 101,80 \text{ cm}^3 \quad ; \quad \eta_z = \frac{W_z}{\frac{h}{A \frac{b}{2}}} = \frac{101,80}{41 \cdot 6} = 0,414$$

Ejemplo 6.2.4

Determinar los módulos resistentes de dos piezas rectangulares de sección $b \times h$ colocadas de forma superpuesta (canto total de $2h$), según trabajen de forma (a) solidaria o (b) independiente.

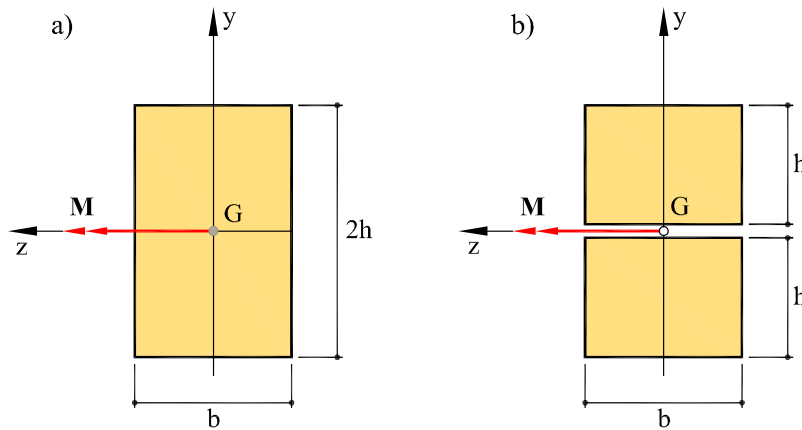


Fig. 6.16: Secciones del Ejemplo 6.2.4

(a) Para las dos vigas trabajando de forma solidaria el momento máximo es aquel que produce tensiones iguales a la tensión admisible σ_{adm} en las fibras extremas de la viga compuesta (Figura 6.17a), es decir:

$$M_a^{\max} = 2 \cdot \frac{1}{2} \sigma_{adm} h b \cdot \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} b h^2 \sigma_{adm}$$

o sea, que el módulo resistente es:

$$W_a = \frac{M_a^{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{2}{3} b h^2$$

(b) Para las dos vigas superpuestas trabajando de forma independiente el momento máximo es el doble de aquel que produce tensiones iguales a σ_{adm} en las fibras extremas de cada una de las vigas (Figura 6.17b), es decir:

$$M_b^{\max} = 2 \left[2 \cdot \frac{1}{2} \sigma_{adm} \frac{h}{2} b \cdot \frac{2}{3} \frac{h}{2} \right] = \frac{1}{3} b h^2 \sigma_{adm}$$

o sea, que el módulo resistente es:

$$W_b = \frac{M_b^{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{1}{3} b h^2$$

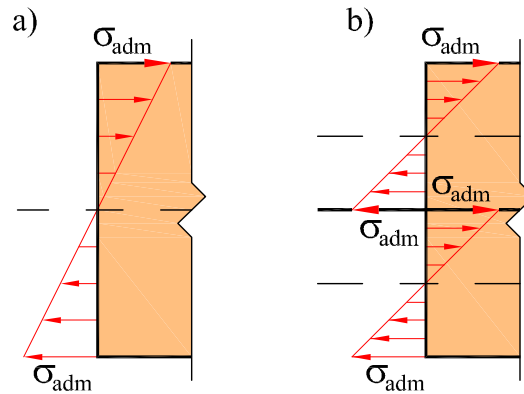


Fig. 6.17: Distribución de tensiones en Ejemplo 6.2.4

que es el doble del módulo resistente de las vigas individuales, pero la mitad del módulo resistente de la viga compuesta.

La forma distinta de deformarse a flexión pura de las dos vigas según trabajan de forma solidaria o superpuesta puede observarse en la Figura 6.18.

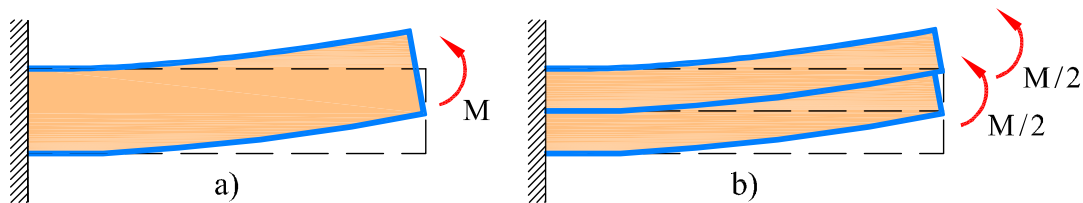


Fig. 6.18: Deformadas en Ejemplo 6.2.4

6.3 Flexión simple recta

El tipo de flexión más frecuente en vigas rectas con fuerzas normales a su eje es el de *flexión recta simple*, en la que la ley de momentos flectores es variable. Tal como puede observarse en la Figura 6.19, la variación del momento flector exige, por equilibrio de la rebanada diferencial, que sobre las secciones de la pieza actúe un esfuerzo cortante:

$$T_y = - \frac{dM_z}{dx} \quad (6.23)$$

Por tanto, las igualdades de equilibrio interno que deben cumplirse son análogas a las Ecs. (6.1) de flexión pura, salvo que en flexión simple el cortante T_y no es nulo.

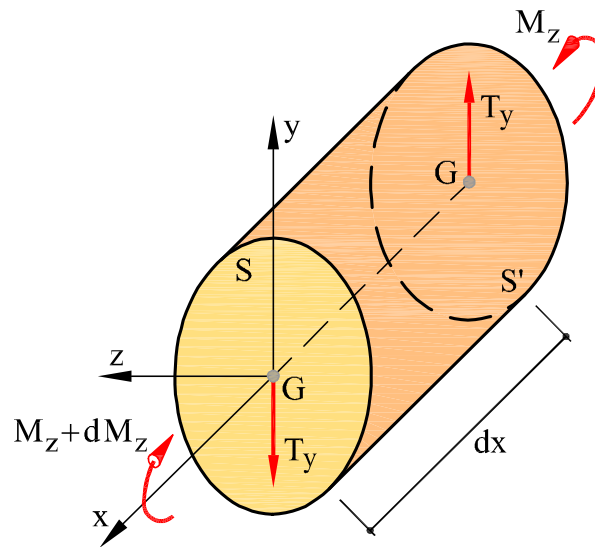


Fig. 6.19: Equilibrio de momentos y cortantes en flexión recta simple

El esfuerzo cortante da lugar a la aparición de distorsiones angulares y tensiones tangenciales en la sección, como se verá en el Capítulo correspondiente. Como consecuencia de la existencia de estas distorsiones angulares, además de producirse las elongaciones de las fibras longitudinales propias de la flexión, se produce cierta deformación de las secciones planas. Este fenómeno, que puede observarse en la Figura 6.20, se conoce con el nombre de *alabeo* de las secciones rectas. Dado que los resultados obtenidos para la flexión pura se basan en la hipótesis de que las secciones permanecen planas, es decir, sin alabeo, cabe hacerse la pregunta de si estos resultados pueden aplicarse en el caso de que éste se produzca.

En el caso de la flexión simple, se admite la *hipótesis generalizada de Bernoulli-Navier*, que expresa que

“dos secciones rectas infinitamente próximas experimentan alabeo en la deformación, pero cualquiera de ellas puede superponerse a la otra mediante una traslación y un giro.”

Esta hipótesis generalizada admite el alabeo de las secciones rectas, pero desprecia el *alabeo relativo* entre dos secciones próximas. Esto es sólo una *aproximación*, admisible porque, en general, las deformaciones longitudinales producidas por el esfuerzo cortante son mucho menores que las producidas por el momento flector. La aproximación es tanto mejor cuanto menor sea la relación canto/luz de la pieza, es decir, cuanto más esbelta sea ésta.

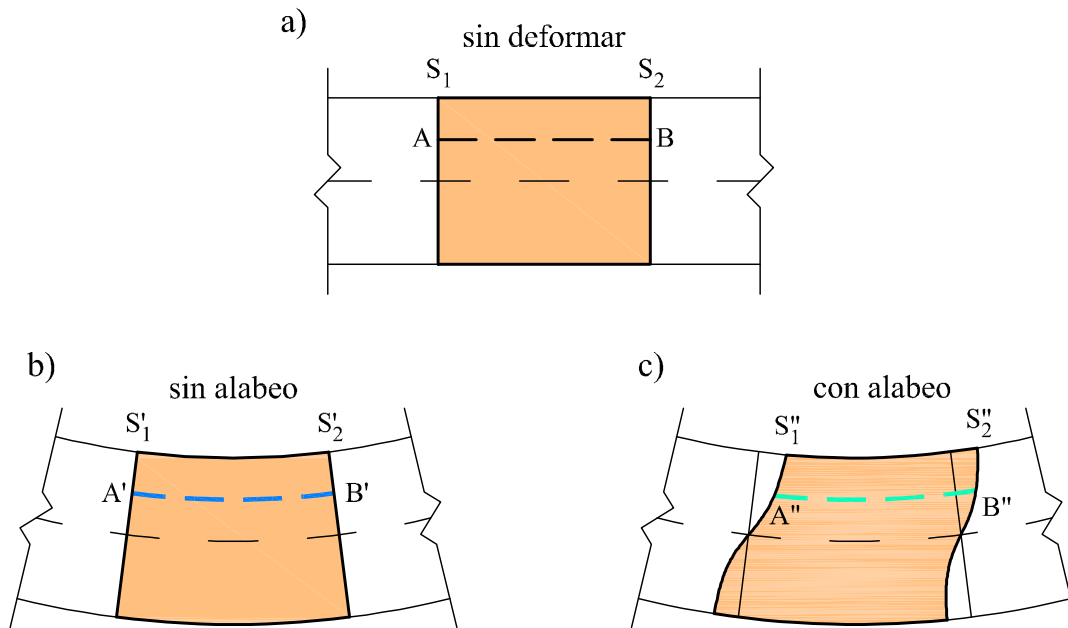


Fig. 6.20: Elongación de las fibras en flexión simple: (a) sin deformar, (b) sin alabeo y (c) con alabeo

Para piezas esbeltas el efecto del alabeo es despreciable, mientras que para vigas de espesor moderado o grande éste puede tener cierta importancia.

Si se admite la hipótesis generalizada, entonces, según se muestra en la Figura 6.20, puede considerarse que la elongación de una fibra tal como la AB , que se deforma realmente en $A''B''$ (con alabeo), es idéntica a la elongación que se produciría si la deformación fuese como $A'B'$ (sin alabeo). Dado que todas las expresiones obtenidas para la flexión pura se basan en la magnitud de las elongaciones longitudinales de las fibras, es obvio que si se admite la hipótesis generalizada de deformación de Bernoulli-Navier, la totalidad de las expresiones halladas para el caso de la flexión pura recta pueden extenderse al caso más general de la flexión simple. Así por ejemplo, es válida la expresión obtenida para la ley de tensiones (distribución lineal):

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z}y \quad (6.24)$$

Cabe señalar, sin embargo, que en flexión simple la deformada de la directriz no es un arco de circunferencia, ya que la curvatura variará de sección a sección, al variar el

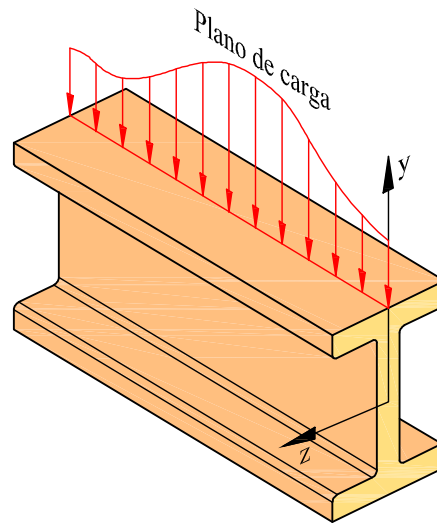


Fig. 6.21: Flexión simple con plano de carga constante

momento flector actuante (Figura 6.21). En flexión simple recta, la deformada de la línea media es necesariamente una curva plana, pero no de curvatura constante.

Ejemplo 6.3.1

Para la viga recta en voladizo de la Figura 6.22 sometida a las cargas que se indican, se pide: (a) determinar el valor y la localización de los momentos flectores máximos; (b) calcular y dibujar la distribución de tensiones normales y (c) calcular el valor máximo que puede alcanzar la carga P , suponiendo que el valor de la tensión admisible es σ_{adm} , tanto para tracción como para compresión.

Datos: $l = 6$ m, $P = 100$ kN, $a = 40$ cm, $b = 30$ cm, $h = 50$ cm, $e = 1,5$ cm, $\sigma_{adm} = 260$ MPa.

El área de la sección transversal es igual a:

$$A = (40 + 50 + 30)1,5 = 180 \text{ cm}^2$$

La sección es simétrica respecto al eje y . Por tanto, el centro de gravedad está situado sobre él y a una distancia del borde inferior igual a (Figura 6.22):

$$y'_G = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{40 \cdot 1,5 \cdot 50 + 50 \cdot 1,5 \cdot 25}{180} = 27 \text{ cm}$$

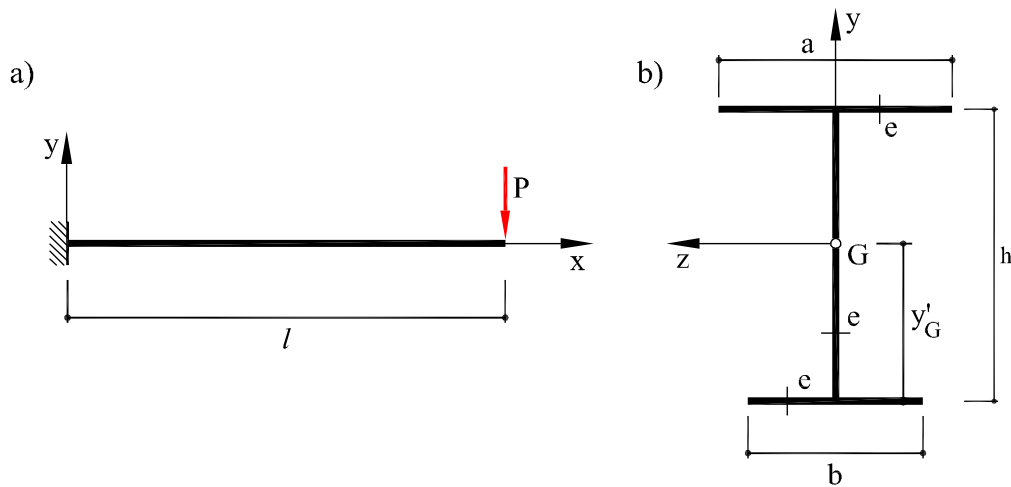


Fig. 6.22: Viga y sección normal del Ejemplo 6.3.1

El momento principal de inercia I_z es:

$$\begin{aligned} I_z &= 40 \cdot 1,5 \cdot 23^2 + 30 \cdot 1,5 \cdot 27^2 + \frac{1}{12} 1,5 \cdot 50^3 + 50 \cdot 1,5 \cdot 2^2 \\ &= 80\,200 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

(a) *Leyes de esfuerzos*

Las leyes de esfuerzos debidas a la carga P se muestran en la Figura 6.23. Puede verse que la viga está sometida a un estado de flexión simple (momento flector más cortante). El máximo momento se produce en la sección del empotramiento y su valor es:

$$M_z^{\max} = M_z(x = 0) = -P \cdot l = -100 \cdot 6 = -600 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

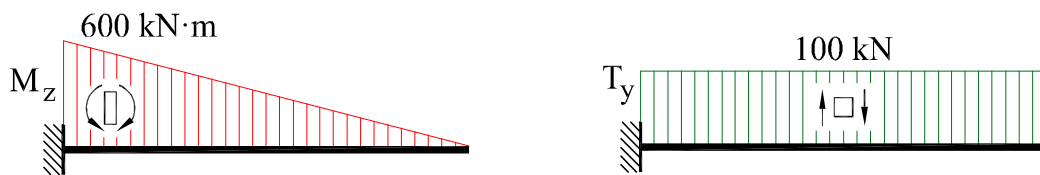


Fig. 6.23: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 6.3.1

(b) *Distribución de tensiones y tensiones máximas*

Al tratarse de flexión simple recta, el eje neutro coincide con el eje principal z y la tensión máxima se produce en los puntos más alejados del mismo, es decir, en los puntos correspondientes a la intersección de las fibras superiores e inferiores con la sección (Figura 6.24):

$$\begin{aligned}\sigma_T &= -\frac{M_z}{I_z} y_T = \\ &= -\frac{(-600 \cdot 10^3)}{8,02 \cdot 10^{-4}} (0,23) = +172 \text{ MPa (T)} \\ \sigma_C &= -\frac{M_z}{I_z} y_C = \\ &= -\frac{(-600 \cdot 10^3)}{8,02 \cdot 10^{-4}} (-0,27) = -202 \text{ MPa (C)}\end{aligned}$$

En el borde inferior de la sección se produce la máxima tensión en valor absoluto y es de compresión. Se comprueba que ambas tensiones son menores que la tensión admisible del material, $\sigma_{adm} = 260 \text{ MPa}$.

(c) *Máximo valor de la carga P*

En los puntos inferiores de la sección se produce la máxima tensión en valor absoluto. El valor máximo que puede alcanzar la carga P se determina a partir de la expresión:

$$\sigma_{inf} = -\frac{M_z}{I_z} y_{inf} \leq \sigma_{adm} = 260 \text{ MPa}$$

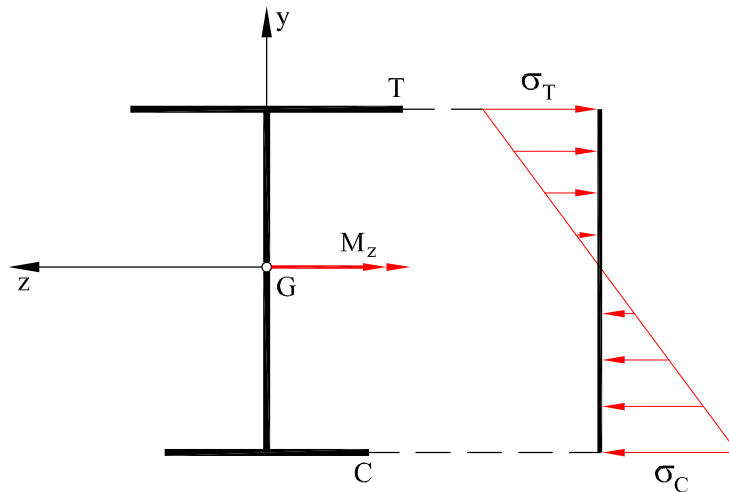


Fig. 6.24: *Distribución de tensiones normales en la sección*

teniendo en cuenta que $M_z = -P \cdot 6$ se obtiene:

$$-\frac{(-P \cdot 6 \cdot 10^3)}{8,02 \cdot 10^{-4}} (-0,27) = 260 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad P_{\max} = 129 \text{ kN}$$

Ejemplo 6.3.2

La viga metálica de la Figura 6.25, de sección rectangular hueca, se suspende de dos puntos para su transporte a obra. Si el peso específico del material es $\gamma = 78 \text{ kN/m}^3$, la separación entre los puntos de suspensión es l y la distancia de dichos puntos a los extremos de la viga es s , determinar la tensión máxima de flexión debida al peso propio. Datos: $l = 6 \text{ m}$, $s = 4 \text{ m}$, $a = 20 \text{ cm}$, $b = 40 \text{ cm}$, $e = 1,5 \text{ cm}$.

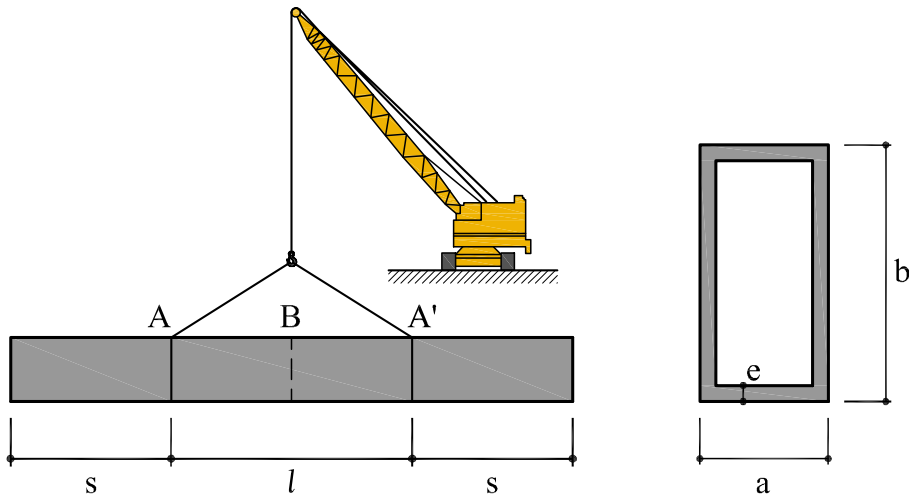


Fig. 6.25: Viga y sección transversal del Ejemplo 6.3.2

(a) Características geométricas de la sección

El área de la sección es: $A = (20 \cdot 40) - (17 \cdot 37) = 171 \text{ cm}^2$

La sección es doblemente simétrica. Por tanto, los ejes y, z son los ejes principales de la sección. El momento principal de inercia I_z es:

$$I_z = \frac{20 \cdot 40^3}{12} - \frac{17 \cdot 37^3}{12} = 34908 \text{ cm}^4$$

(b) *Leyes de esfuerzos*

El peso propio de la viga por unidad de longitud es:

$$p = \gamma \cdot A = 78 \cdot 171 \cdot 10^{-4} = 1,33 \text{ kN/m}$$

La carga de peso propio uniformemente repartida da lugar a la ley de momentos flectores que se muestra en la Figura 6.26. En las secciones correspondientes a los puntos de sujeción A y A' , el momento flector es:

$$M_{A,A'} = -\frac{1,33 \cdot 4^2}{2} = -10,64 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y en la sección central de la viga (B) el momento flector es:

$$M_B = -10,64 + \frac{1,33 \cdot 6^2}{8} = -4,66 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

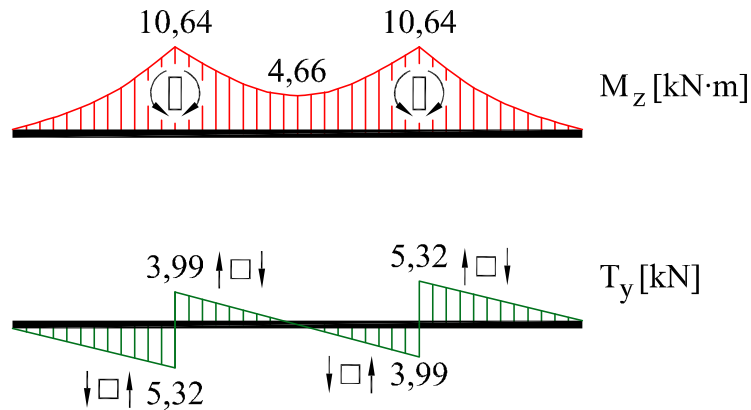


Fig. 6.26: *Leyes de esfuerzos del Ejemplo 6.3.2*

(c) *Distribución de tensiones normales y tensiones máximas*

El máximo momento se da en las secciones A , y la distribución de tensiones en dichas secciones puede verse en la Figura 6.27. El valor máximo de la tensión se da en los puntos superiores e inferiores de la sección y su valor es:

$$\sigma_T = -\frac{M_z}{I_z} y_T = -\frac{(-10,64 \cdot 10^3)}{3,4908 \cdot 10^{-4}} (+20 \cdot 10^{-2}) = +6,1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -\frac{M_z}{I_z} y_C = -\frac{(-10,64 \cdot 10^3)}{3,4908 \cdot 10^{-4}} (-20 \cdot 10^{-2}) = -6,1 \text{ MPa}$$

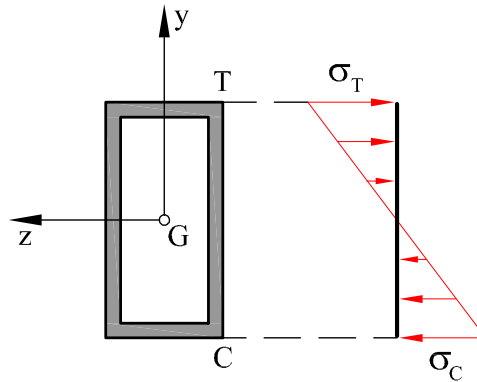


Fig. 6.27: Distribución de tensiones normales debidas al transporte de la viga

6.4 Flexión compuesta recta

Una sección está sometida a *flexión compuesta recta* cuando el sistema de esfuerzos que la solicita se reduce a un esfuerzo axial N y un momento flector M contenido en un plano principal de inercia de la sección (Figura 6.3b).

Consideraremos en lo que sigue el caso de una viga de directriz rectilínea sometida a flexión compuesta recta. Sobre una de sus secciones actúa un esfuerzo axial de valor N y un momento flector que, a efectos de desarrollo, supondremos contenido en el plano principal de inercia que contiene a los ejes x e y ; el vector momento tiene, por tanto, únicamente componente M_z . El cortante T_y puede ser o no nulo, según el flector M_z sea constante o variable a lo largo de la pieza.

Tanto el esfuerzo axial como el momento flector producen tensiones normales sobre las secciones de la pieza, y el estudio de su distribución se sigue directamente de aplicar el principio de superposición a los resultados obtenidos en los apartados correspondientes al estudio del esfuerzo axial y del momento flector, respectivamente.

Abordamos el estudio utilizando el principio de superposición. Tal como se muestra en la Figura 6.28, la deformación debida al axial se produce según la hipótesis de Bernoulli (las secciones rectas se trasladan manteniéndose planas y paralelas a sí mismas), mientras que la deformación por flexión se produce según la hipótesis de Bernoulli-Navier (las secciones rectas giran alrededor del eje neutro manteniéndose planas y perpendiculares a la deformada de la directriz).

Por superposición, una sección de la rebanada experimenta una traslación du , paralela al eje x (debida al axial), y un giro $d\phi_z$, alrededor del eje z (debido al flector), relativos a otra sección recta infinitamente próxima.

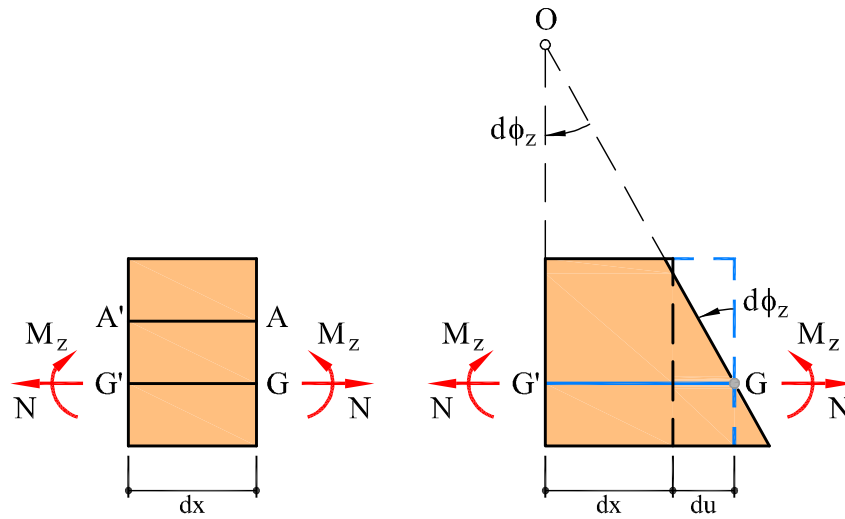


Fig. 6.28: Deformación de una rebanada sometida a flexión compuesta recta

Como puede observarse en la Figura 6.28, la composición de ambos movimientos, traslación más giro, equivale a un único giro alrededor de un eje paralelo al z cuya posición (punto O) se determinará más adelante.

La tensión normal que actúa sobre un punto genérico de la sección será también la suma de la tensión debida al axil y la debida al flector. Según la hipótesis de deformación supuesta y admitiendo, además, que se cumple la ley de Hooke, se tiene que la tensión para un punto Q situado a una distancia y del eje z es:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z} \quad (6.25)$$

Por tanto, tal como se muestra en la Figura 6.29, la distribución de tensiones es lineal en la coordenada y , y las tensiones máximas se dan en las fibras de la sección más alejadas del eje z , y valen:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \frac{N}{A} - \frac{M_z v}{I_z} \\ \sigma_{v'} &= \frac{N}{A} + \frac{M_z v'}{I_z} \end{aligned} \quad (6.26)$$

donde v y v' son las distancias (en valor absoluto) del eje z a las dos fibras extremas, respectivamente. Obsérvese que según la magnitud relativa de los términos de la tensión correspondientes al axil y a la flexión, las tensiones en las fibras extremas pueden tener,

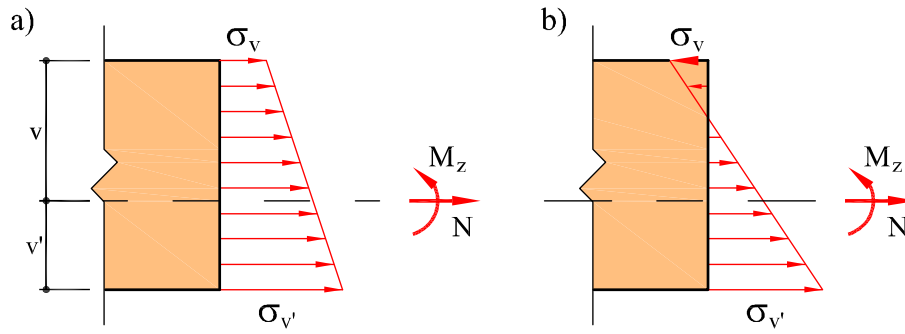


Fig. 6.29: Distribución de tensiones normales en flexión compuesta recta

o no, el mismo sentido que el axil. Así, en la Figura 6.29a todas las tensiones tienen el mismo signo que el esfuerzo axil, mientras que en la Figura 6.29b el flector tiene la magnitud suficiente como para hacer aparecer tensiones de signo contrario al del esfuerzo axil.

El axil N , aplicado en el baricentro de la sección G , más el momento M_z son un sistema de esfuerzos estáticamente equivalente a una fuerza excéntrica única de valor N aplicada en el punto P situado a una distancia e_y del baricentro, medida sobre el eje y , de tal manera que $M_z = -N e_y$ (una fuerza normal positiva con una excentricidad positiva equivale a un momento M_z negativo). Tal situación se muestra en la Figura 6.30.

Al punto P se le llama *centro de presiones*. La distancia e_y entre el centro de presiones y el centro de gravedad es la *excentricidad*.

Por tanto, la tensión en un punto genérico Q de la sección situado a una distancia y del eje principal z se puede expresar en la forma:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z} \quad (6.27a)$$

$$= \frac{N}{A} + \frac{N e_y y}{I_z} \quad (6.27b)$$

$$= \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_y y}{r_z^2} \right) \quad (6.27c)$$

donde $r_z = \sqrt{I_z/A}$ es el radio de giro de la sección respecto del eje z .

Por definición, el eje neutro es el lugar geométrico de los puntos sometidos a tensión normal nula, luego su expresión es igual a:

$$1 + \frac{e_y y}{r_z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{r_z^2}{e_y} \quad (6.28)$$

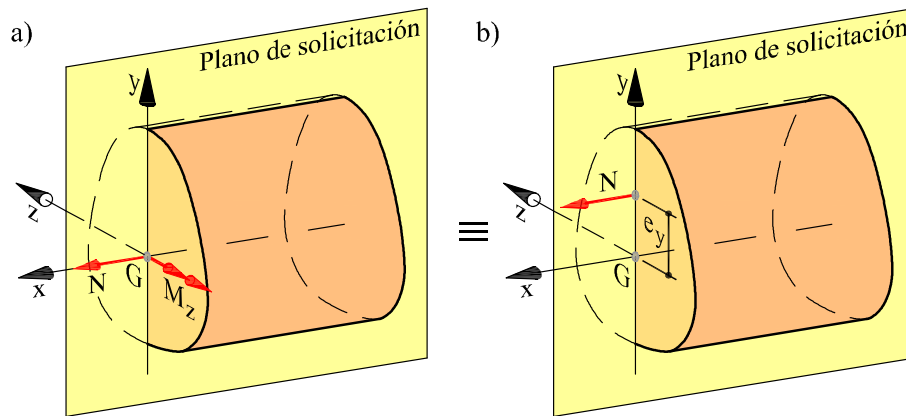


Fig. 6.30: Flexión compuesta recta como fuerza normal excéntrica

Se observa que el eje neutro nn' es una recta paralela al eje z (perpendicular a la traza del plano de sollicitación), y su posición no depende del valor de la fuerza N , sino de la excentricidad e_y . Nótese que el punto de aplicación de la fuerza normal y el eje neutro están necesariamente en lados opuestos respecto al eje z . Nótese, asimismo, que cuanto menor es la excentricidad, mayor es la ordenada del eje neutro, esto es, cuanto mayor es, en términos relativos, el efecto del axil, más lejos está el eje neutro del eje z (es, por ejemplo, el caso de la Figura 6.29a); por el contrario, cuanto mayor es la excentricidad, menor es la ordenada del eje neutro, esto es, cuanto mayor es, en términos relativos, el efecto del flector, más cerca está el eje neutro del eje z (es, por ejemplo, el caso de la Figura 6.29b).

Definiendo ξ como la distancia de un punto genérico Q al eje neutro (Figura 6.31), de forma que sea positiva si el punto Q y el baricentro G están del mismo lado del eje neutro, y negativa en caso contrario, la ecuación (6.27c) puede escribirse simplemente como:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \frac{\xi}{d} \quad (6.29)$$

Así, observando la Figura 6.31, y llamando $\bar{\sigma}_x = N/A$ a la tensión en el baricentro, se tiene, por semejanza de triángulos, que:

$$\frac{\sigma_x}{\bar{\sigma}_x} = \frac{\xi}{d} \Rightarrow \sigma_x = \bar{\sigma}_x \frac{\xi}{d} = \frac{N}{A} \frac{\xi}{d} \quad (6.30)$$

La ecuación (6.29) es una expresión alternativa a las obtenidas anteriormente (Ecs. (6.27a) y (6.27c)) y permite el cálculo directo de las tensiones en flexión compuesta conocida la posición del eje neutro.

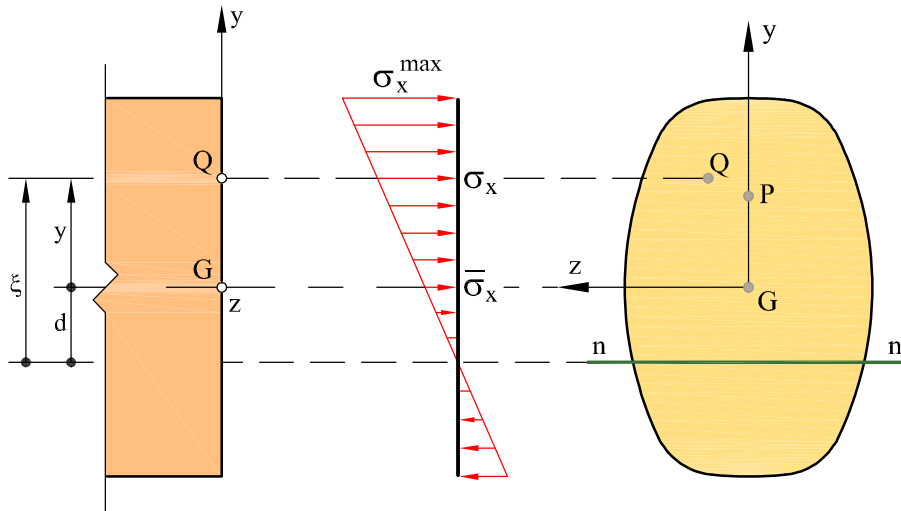


Fig. 6.31: Distribución de tensiones en flexión compuesta recta

La tensión máxima se da en las fibras más alejadas del eje neutro y su valor es:

$$\sigma_x^{\max} = \frac{N}{A} \frac{\xi_{\max}}{d} \quad (6.31)$$

Ejemplo 6.4.1

La viga biapoyada de la Figura 6.32 es de sección rectangular $b \times h$ ($A = bh$, $I_z = (1/12) bh^3$) y está sometida a un par de fuerzas F , de compresión, contenidas en el plano xy , vertical y de simetría de la pieza, y aplicadas en las secciones de apoyo, por encima de la directriz de la viga con una excentricidad $e_y = e$. Obtener la distribución de tensiones en las secciones de la viga, sus valores máximos y mínimos y el valor máximo de la excentricidad para que la viga esté totalmente sometida a compresión.

Dada la sollicitación de la viga, las leyes de esfuerzos son uniformes y, tal como se muestra en la Figura 6.33, se tiene:

$$N = -F \quad ; \quad M_z = F e$$

Por tanto, la viga está sometida a flexión compuesta recta. La distribución de tensiones es lineal y sólo depende de la altura de las fibras respecto del eje z . Así, los

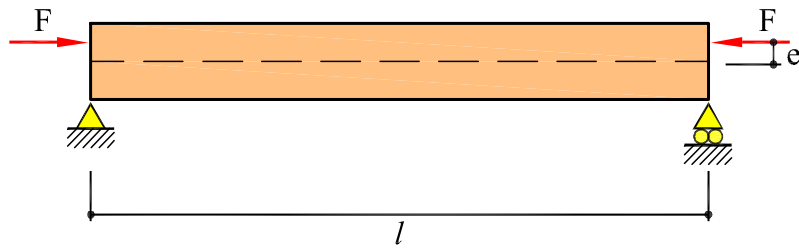


Fig. 6.32: Viga del Ejemplo 6.4.1

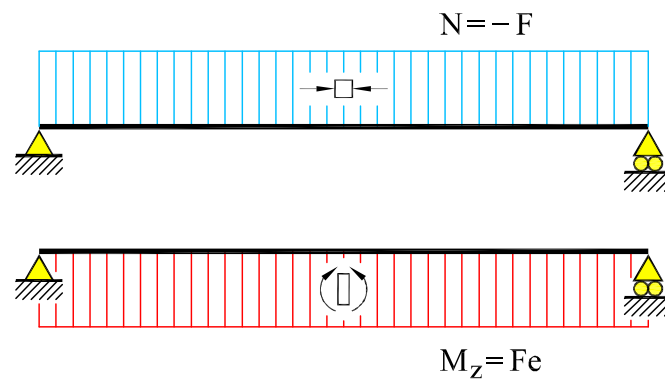


Fig. 6.33: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 6.4.1

valores máximo y mínimo de las tensiones se dan en las fibras extremas ($y = \pm h/2$) y valen:

$$\sigma_v = -\frac{F}{bh} - \frac{Fe\frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = -\frac{F}{bh} \left(1 + \frac{6e}{h}\right)$$

$$\sigma_{v'} = -\frac{F}{bh} + \frac{Fe\frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = -\frac{F}{bh} \left(1 - \frac{6e}{h}\right)$$

Nótese que, para F de compresión y excentricidad positiva, la tensión en la fibra superior, σ_v , es necesariamente de compresión. Por otro lado, la tensión en la fibra inferior, $\sigma_{v'}$, será también de compresión si $e < h/6$, y de tracción en caso contrario. Las respectivas distribuciones de tensiones se muestran en las Figuras 6.34a y b.

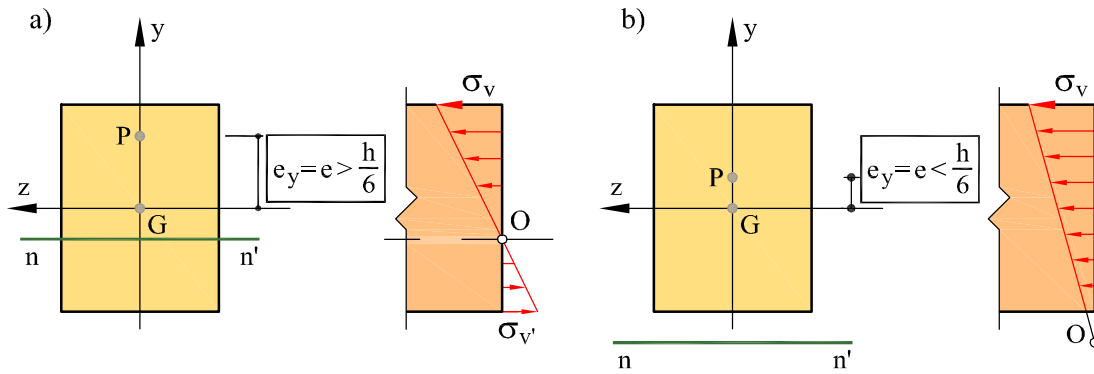


Fig. 6.34: Distribución de tensiones según el valor de e_y

El eje neutro es una recta paralela al eje z , de ecuación:

$$y = -\frac{r_z^2}{e_y} = -\frac{I_z}{Ae_y} = -\frac{\frac{1}{12}bh^3}{bhe} = -\frac{1}{12} \frac{h^2}{e}$$

Para $e < h/6$ se tiene que $-y > h/2$, esto es, el eje neutro no corta a la sección. Para $e > h/6$ se tiene que $-y < h/2$, y el eje neutro corta a la sección.

Ejemplo 6.4.2

La viga biapoyada de la Figura 6.35 es de sección rectangular $b \times h$ ($A = bh$, $I_z = (1/12) bh^3$) y está sometida a una carga vertical descendente, uniformemente distribuida de valor p , y a un par de fuerzas F , de compresión, aplicadas en los centros de gravedad de las secciones de apoyo. Obtener: (a) la curva de presiones de la pieza, (b) el valor mínimo de las fuerzas F para que no haya tracciones en la pieza y (c) la distribución de tensiones en las secciones $x = 0, l/4$ y $l/2$, para este valor de F .

(a) *Curva de presiones de la pieza*

Dada la sollicitación de la viga, las leyes de esfuerzos, tal como se muestra en la Figura 6.35, son:

$$N(x) = -F \quad ; \quad M_z(x) = \frac{p}{2} x (l - x)$$

Por tanto, la viga está sometida a flexión compuesta recta. La curva de presiones es una curva en el plano xy , cuya expresión viene determinada por la posición de los

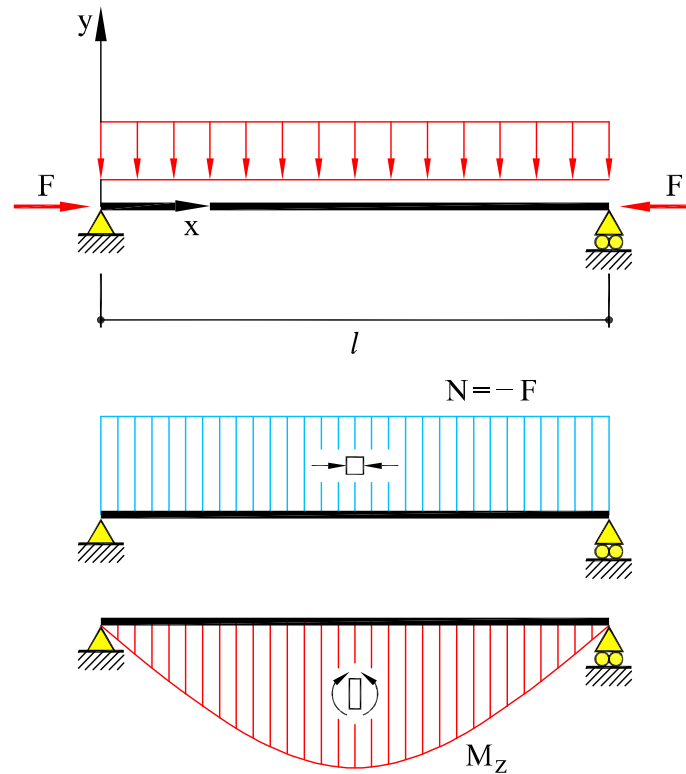


Fig. 6.35: Viga y leyes de esfuerzos del Ejemplo 6.4.2

centros de presiones de cada sección. Así,

$$e_y(x) = - \frac{M_z(x)}{N(x)} = \frac{p}{2F} x (l - x)$$

que es una parábola con valor máximo $e_y(x = l/2) = pl^2/8F$.

(b) Valor mínimo de las fuerzas F

La sección más crítica, a efectos de que aparezcan tracciones, es la sección central, que soporta el momento flector máximo, o sea, a la que corresponde una mayor excentricidad. Según el ejercicio anterior, no aparecerán tracciones en la fibra inferior de la sección central si la excentricidad en esta sección es menor que $h/6$, o sea:

$$e_y(x = l/2) = pl^2/8F < \frac{h}{6} \quad \Rightarrow \quad F > \frac{3pl^2}{4h}$$

(c) *Distribución de tensiones*

La distribución de tensiones en las secciones $x = 0$, $l/4$ y $l/2$, para el valor $F = 3pl^2/4h$ se muestra en la Figura 6.36. En la sección $x = 0$ el momento flector es nulo, $e_y = 0$ y, por tanto, la distribución de tensiones es uniforme y de valor

$$\sigma_v(x = 0) = \sigma_{v'}(x = 0) = -\frac{F}{bh} = -\frac{3 pl^2}{4 bh^2}$$

En la sección $x = l/4$ se tiene $M_z = (3/32)pl^2$ y $e_y = (3/32)(pl^2/F) = h/8$. Las tensiones extremas valdrán

$$\begin{aligned}\sigma_v(x = l/4) &= -\frac{F}{bh} \left(1 + \frac{6e}{h}\right) = -\frac{7 F}{4 bh} = -\frac{21 pl^2}{16 bh^2} \\ \sigma_{v'}(x = l/4) &= -\frac{F}{bh} \left(1 - \frac{6e}{h}\right) = -\frac{1 F}{4 bh} = -\frac{3 pl^2}{16 bh^2}\end{aligned}$$

Al ser $e < h/6$, las tensiones son todas de compresión. En la sección $x = l/2$ se tiene $M_z = pl^2/8$ y $e_y = pl^2/8F = h/6$. Las tensiones extremas valdrán

$$\begin{aligned}\sigma_v(x = l/2) &= -\frac{F}{bh} \left(1 + \frac{6e}{h}\right) = -2\frac{F}{bh} = -\frac{3 pl^2}{2 bh^2} \\ \sigma_{v'}(x = l/2) &= -\frac{F}{bh} \left(1 - \frac{6e}{h}\right) = 0\end{aligned}$$

y se comprueba que no hay tracciones en punto alguno de la pieza.

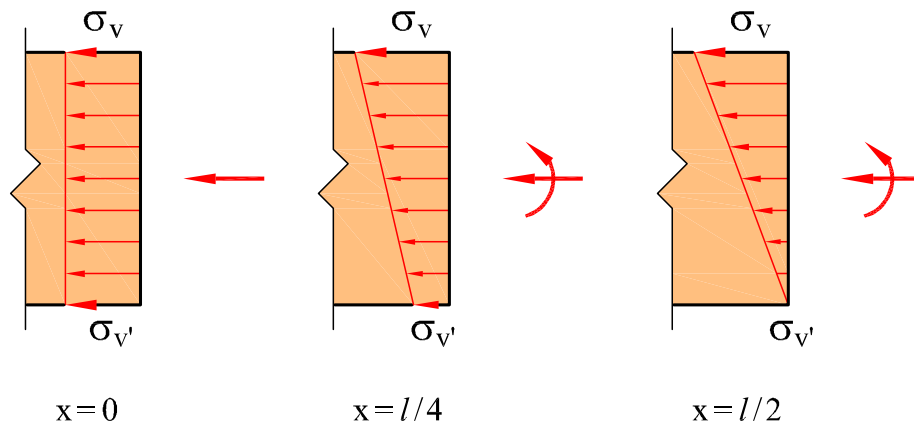


Fig. 6.36: *Distribución de tensiones en las secciones $x = 0$, $l/4$ y $l/2$*

Ejemplo 6.4.3

Un pilar de sección rectangular $b \times h$ ($30 \times 40 \text{ cm}^2$) y longitud $l = 3 \text{ m}$ soporta una fuerza de compresión $F = 100 \text{ kN}$ ligeramente inclinada, según muestra la Figura 6.37. Calcular: (a) las leyes de esfuerzos en la pieza; (b) posición del eje neutro en cada sección; (c) tensiones normales máximas en cada sección.

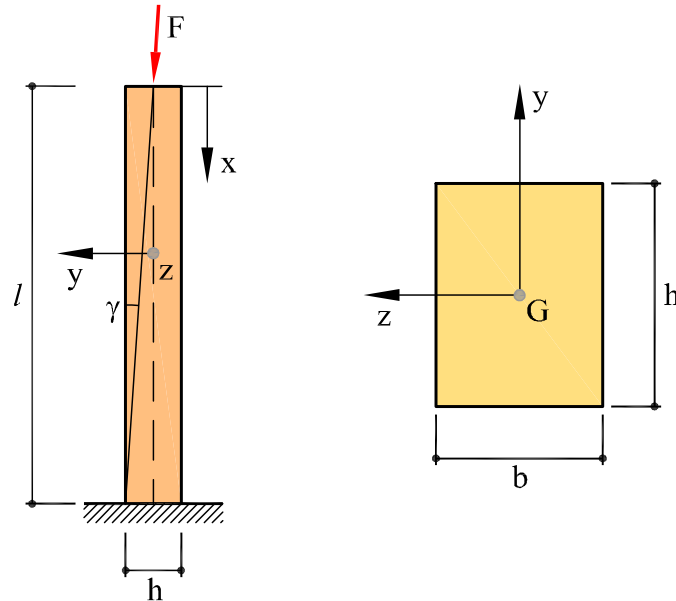


Fig. 6.37: Pilar del Ejemplo 6.4.3 y sección transversal

Las características geométricas de la sección son:

$$A = 30 \cdot 40 = 1.200 \text{ cm}^2 \quad ; \quad I_z = \frac{1}{12} 30 \cdot 40^3 = 160.000 \text{ cm}^4$$

y, por tanto, $r_z^2 = I_z/A = 133,33 \text{ cm}^2$. Además, se conoce el ángulo de inclinación de la fuerza, $\gamma = \arctan(h/2l) = \arctan 1/15 \simeq 1/15$, que puede considerarse pequeño.

(a) *Leyes de esfuerzos en la pieza*

Las secciones están sometidas a flexión compuesta recta, con el centro de presiones situado sobre el eje y de cada sección. La excentricidad de la fuerza en función de la

distancia x de la sección considerada al extremo superior del pilar es:

$$e_y(x) = x \tan \gamma = \frac{h x}{2 l}$$

Por tanto, las leyes de esfuerzos son:

$$\begin{aligned} N(x) &= -F \cos \gamma && \simeq -F \\ T_y(x) &= +F \sin \gamma && \simeq +F \frac{h}{2l} \\ M_z(x) &= +F \cos \gamma e_y(x) && \simeq +F \frac{h x}{2 l} \end{aligned}$$

Los esfuerzos axil y cortante son constantes a lo largo de la pieza, mientras que el flector crece linealmente con x .

(b) *Posición del eje neutro en cada sección*

El eje neutro de cada sección es paralelo al eje z de cada sección, y corta al eje y en la ordenada:

$$a(x) = -\frac{r_z^2}{e_y(x)} = -6,66 \frac{l}{x} \text{ cm}$$

Por tanto, el eje neutro se acerca al centro de gravedad a medida que crece la relación x/l , tal como se muestra en la Figura 6.38.

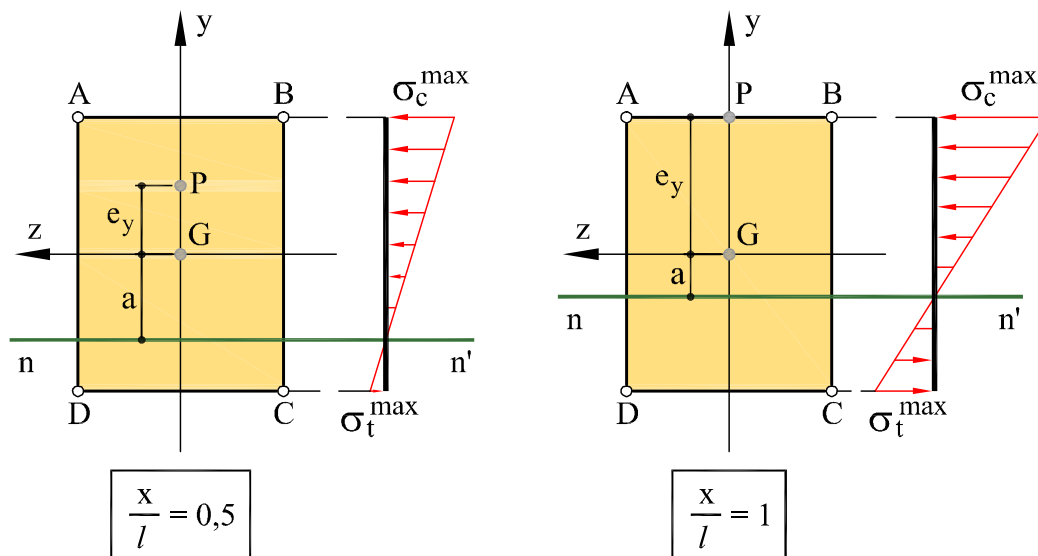


Fig. 6.38: Resultados del Ejemplo 6.4.3

(c) *Tensiones máximas en cada sección*

Las tensiones en un punto cualquiera de la pieza son:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_y y}{r_z^2} \right) = \frac{N}{A} \left(1 - \frac{y}{a(x)} \right)$$

Conocida la posición del eje neutro es fácil ver que las distribuciones de tensiones serán como las dibujadas en la Figura 6.38 para las secciones $x/l = 0,5$ y $x/l = 1$. Las máximas compresiones se producen en las fibras superiores (como la A o la B), y valen:

$$\sigma_c^{\max}(x) = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{20}{6,666} \frac{x}{l} \right) = \frac{N}{A} \left(1 + 3 \frac{x}{l} \right)$$

y, entonces, $\sigma_c^{\max}(x/l = 0,5) = -2,083$ MPa y $\sigma_c^{\max}(x/l = 1) = -3,333$ MPa. Las máximas tracciones se producen en las fibras inferiores (como la C o la D), y valen:

$$\sigma_t^{\max}(x) = \frac{N}{A} \left(1 - \frac{20}{6,666} \frac{x}{l} \right) = \frac{N}{A} \left(1 - 3 \frac{x}{l} \right)$$

y, entonces, $\sigma_t^{\max}(x/l = 0,5) = 0,4167$ MPa y $\sigma_t^{\max}(x/l = 1) = 1,667$ MPa.

7 Flexión Esviada

7.1 Introducción

Una pieza está sometida a *flexión recta* cuando sus secciones están solicitadas por un momento flector M contenido en un plano principal de flexión. Éste es el caso de las vigas rectas de plano medio, que son vigas de sección con un plano de simetría longitudinal flectando en dicho plano. En el caso más general de sección arbitraria solicitada por un momento flector actuando en un plano cualquiera, se tiene *flexión esviada*. Si el momento actuante es constante en todas las secciones de la pieza se tiene *flexión pura esviada* y en el caso de que el momento sea variable se tiene *flexión simple esviada*, y está acompañado de esfuerzo cortante.

Cuando la actuación del momento flector viene acompañada de un esfuerzo axil, de tracción o compresión, se tiene flexión compuesta esviada. En este Capítulo abordaremos el estudio de la flexión pura esviada, para generalizar luego los resultados obtenidos al caso de flexión simple esviada y al de flexión compuesta esviada.

7.2 Flexión pura esviada

Se dice que una pieza está solicitada a *flexión pura esviada* cuando sobre sus secciones actúa un momento flector uniforme a lo largo de la misma, contenido en un plano distinto de los planos principales de flexión de la pieza, es decir, tal que el vector momento no coincide con ninguno de los ejes principales de inercia de las secciones, como se muestra en la Figura 7.1.

Dado que los diferentes esfuerzos que actúan sobre una sección no son sino las fuerzas y momentos resultantes de las tensiones que actúan sobre dicha sección, en el caso de *flexión pura esviada* con momento flector M constante de componentes M_y y

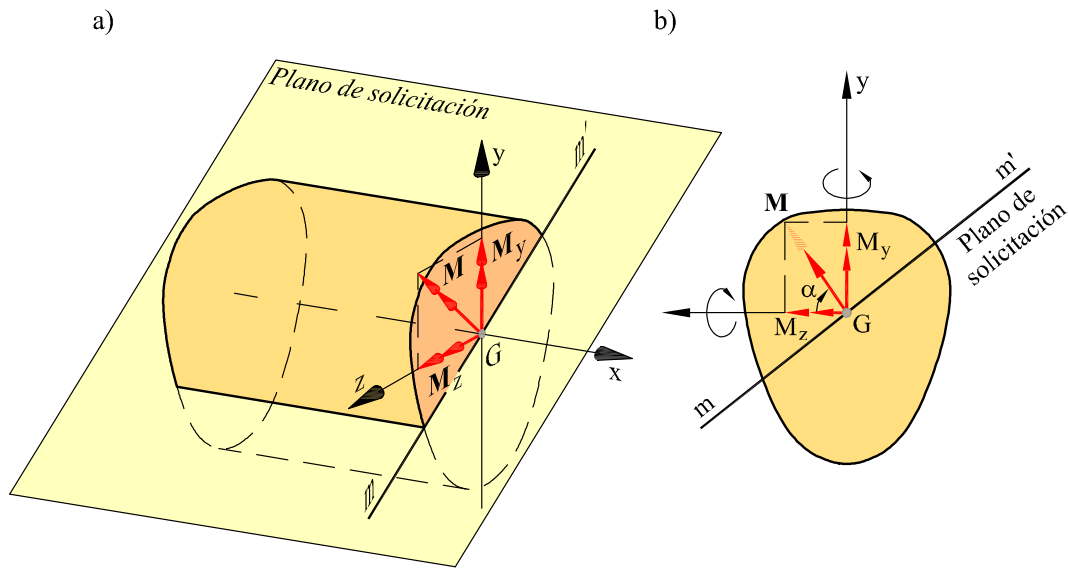


Fig. 7.1: Flexión esviada referida a ejes principales de la sección

M_z , deben cumplirse las igualdades:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_S \sigma_x dS = 0 & ; & & T_y &= \int_S \tau_{xy} dS = 0 \\
 T_z &= \int_S \tau_{xz} dS = 0 & ; & & M_t &= \int_S (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dS = 0 \\
 M_y &= \int_S \sigma_x z dS & ; & & M_z &= - \int_S \sigma_x y dS
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

7.2.1 Tensiones en flexión pura esviada

Supongamos una pieza recta sometida a flexión pura esviada por la acción de un par de momentos de módulo M aplicados en sus extremos y contenidos en un plano llamado *plano de carga* o *plano de solicitación*, de traza mm' sobre el plano de la sección (ver Figura 7.1a). Descomponiendo el vector momento flector \mathbf{M} (perpendicular al plano de carga) en sus dos componentes según los ejes principales de inercia de la sección, se tienen las componentes del vector momento según dichos ejes: $M_z = M \cos \alpha$ y $M_y = M \sin \alpha$, donde M es el módulo del momento y α es el ángulo formado por el vector momento con el eje z (ver Figura 7.1b).

Se estudian, a continuación, los efectos que las componentes M_z y M_y producen por separado, para aplicar luego el principio de superposición.

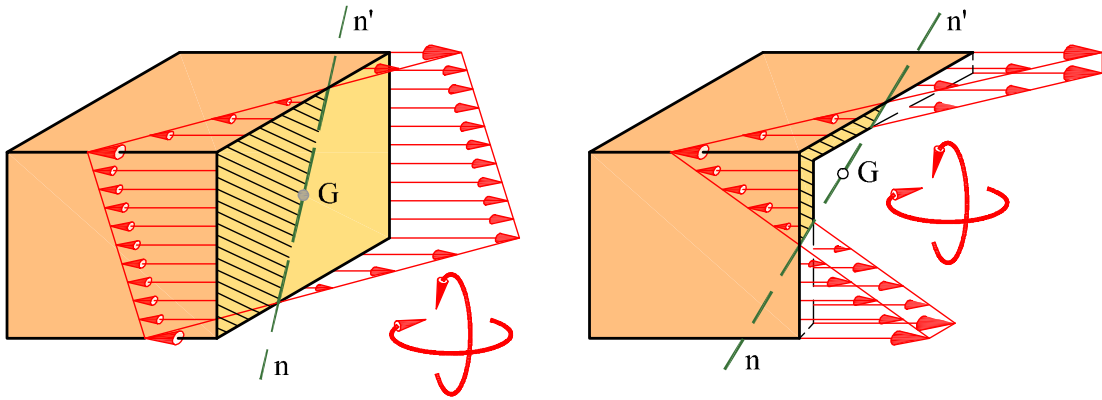


Fig. 7.2: Distribución de tensiones en flexión esviada

La componente M_z actúa en el plano xy y produce sobre un punto de la sección de coordenadas (y, z) una tensión normal igual a (ver Ec. (6.12)):

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z}y \quad (7.2)$$

según los convenios de signos establecidos anteriormente para momentos y tensiones (es decir, momentos M_z positivos comprimen las fibras con coordenada $y > 0$).

Análogamente, la componente M_y actúa en el plano xz y produce sobre un punto de la sección de coordenadas (y, z) , una tensión normal de valor:

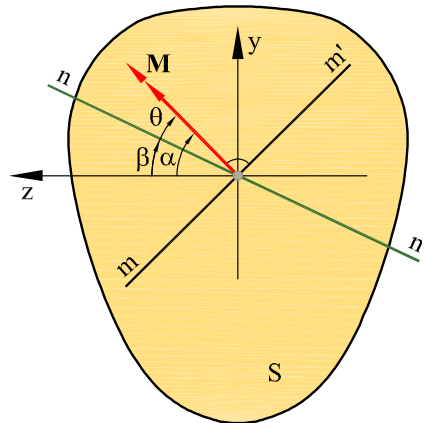


Fig. 7.3: Definición de ángulos en flexión esviada

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z \quad (7.3)$$

(es decir, momentos M_y positivos traccionan las fibras con coordenada $z > 0$).

Sumando los efectos de las dos componentes del momento flector \mathbf{M} se obtiene:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (7.4a)$$

$$= M \left(-\frac{\cos \alpha}{I_z} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} z \right) \quad (7.4b)$$

Obsérvese que la distribución de tensiones obtenida es lineal en y , z . La distribución de tensiones será lineal y puede representarse como se muestra en la Figura 7.2.

La ecuación del eje neutro se obtiene como lugar geométrico de los puntos en los que la tensión normal es nula, es decir:

$$-\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0 \quad \text{o bien} \quad -\frac{\cos \alpha}{I_z} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} z = 0 \quad (7.5)$$

Esta es la ecuación de una recta que pasa por el centro de gravedad de la sección y tiene una pendiente:

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{I_z}{I_y} = \tan \alpha \frac{I_z}{I_y} \quad (7.6)$$

donde α y β son los ángulos formados por el vector \mathbf{M} y el eje neutro con el eje z , respectivamente (ver Figura 7.3). Obsérvese que el eje neutro *no es normal*, en general, a la traza del plano de sollicitación o plano de carga mm' , ya que la recta normal al plano mm' tiene una pendiente, respecto al eje z , $\tan \alpha = y/z = M_y/M_z$, mientras que el eje neutro tiene una pendiente $\tan \beta = y/z = (M_y/M_z) (I_z/I_y)$. Se llama ángulo de esviaje θ al ángulo que forma el vector momento respecto al eje neutro.

Los ángulos α y β sólo coinciden ($\theta = 0$) si:

1. Una de las componentes, M_y o M_z , es nula; es decir, si el momento actúa según un plano principal de inercia, o bien si
2. $I_z/I_y = 1$; es decir, cuando todas las direcciones son principales de inercia, y por lo tanto, también lo es la dirección mm' .

7.2.2 Deformación en flexión pura esviada

Análogamente al estudio tensional, se puede estudiar la deformación de una viga recta sometida a flexión pura esviada descomponiendo el momento flector actuante en sus

componentes según los ejes principales de inercia y aplicando el principio de superposición. Los diferenciales de los ángulos de flexión que sufre una rebanada diferencial de anchura dx , debidos a los momentos M_z y M_y , son, respectivamente:

$$d\phi_y = \frac{M_y}{EI_y} dx \quad ; \quad d\phi_z = \frac{M_z}{EI_z} dx \quad (7.7)$$

donde $d\phi_y$ es un giro diferencial contenido en el plano xz , y $d\phi_z$ es un giro diferencial contenido en el plano xy , tal como se muestra en la Figura 7.4.

La composición vectorial de estas dos rotaciones diferenciales equivale a una rotación diferencial $d\phi$ de componentes $(d\phi_y, d\phi_z)$ según los ejes principales. Esta rotación tiene por módulo:

$$d\phi = \sqrt{d\phi_y^2 + d\phi_z^2} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{M_y^2}{I_y^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2}} dx = \frac{M}{E} \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{I_y^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{I_z^2}} dx \quad (7.8)$$

y, por tanto, la curvatura de la deformada de la directriz de la pieza puede calcularse mediante la expresión:

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{M_y^2}{I_y^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2}} = \frac{M}{E} \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{I_y^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{I_z^2}}$$

Por otro lado, el ángulo que forma el vector giro diferencial $\vec{d\phi}$ con el eje z es:

$$\frac{d\phi_y}{d\phi_z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \tan \beta \quad (7.9)$$

que coincide con la dirección del eje neutro. Por tanto, la deformación por flexión se produce en el plano normal al eje neutro, o lo que es lo mismo, la sección gira un ángulo de valor $d\phi$ alrededor del eje neutro.

Obsérvese que las deformaciones producidas por las componentes M_z y M_y , actuando por separado, son planas, y la deformación resultante de ambas también corresponde a una curva plana, al ser la flexión uniforme a lo largo de la pieza. La curvatura de la deformada en cada sección es proporcional al momento actuante; al ser éste constante en flexión pura esviada, y estar considerando el caso de una viga de sección uniforme, la curvatura es idéntica para todas las secciones y la deformada del eje de la viga es un arco de circunferencia.

En resumen, en flexión pura esviada, y de acuerdo con la hipótesis de Bernoulli-Navier, las secciones rectas se mantienen planas en la deformación, girando alrededor del eje neutro y manteniéndose perpendiculares a la deformada de la directriz.

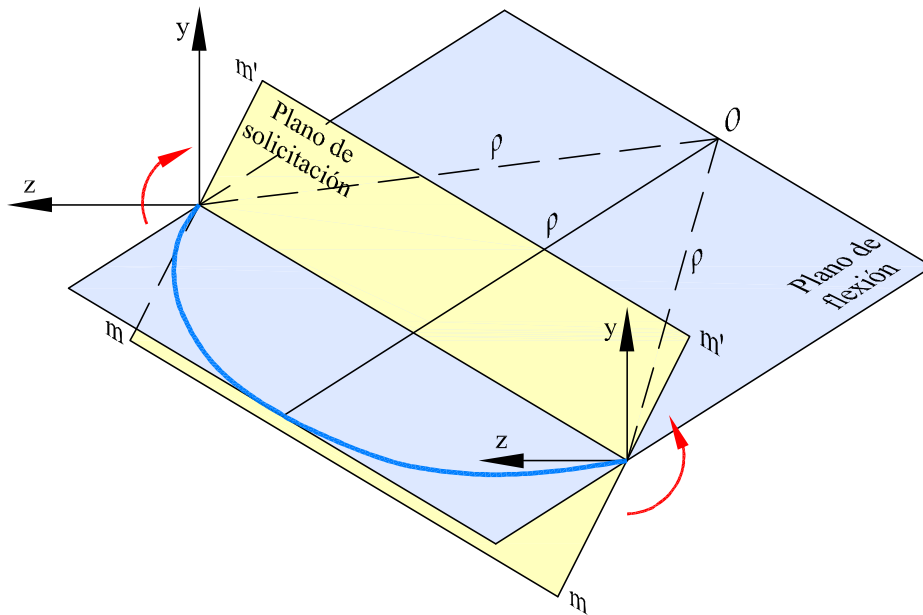


Fig. 7.4: Deformación en flexión pura esviada.

En consecuencia, y tal como se muestra en la Figura 7.4, la deformada del eje de la pieza es un arco de circunferencia, contenido en el plano normal al eje neutro que, en general, *no coincide* con el plano de sollicitación (el que contiene al momento flector actuante). De ahí el nombre de *flexión esviada* para este tipo de sollicitación.

Ejemplo 7.2.1

Una sección rectangular de ancho $b = 30$ cm y altura $h = 40$ cm está sometida a la acción de un momento flector esviado contenido en el plano de una de las diagonales de la sección y de valor $M = 50$ kN·m. Calcular: (a) la dirección del eje neutro, (b) las tensiones máximas y (c) la curvatura de la directriz de la rebanada, si el módulo elástico vale $E = 20$ GPa.

(a) Por un lado, los momentos de inercia de la sección respecto a sus ejes principales de inercia son:

$$I_y = 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \quad I_z = 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

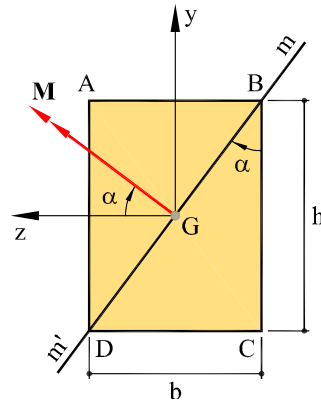


Fig. 7.5: Sección del Ejemplo 7.2.1

Por otro lado, y suponiendo que el momento está contenido en el plano de diagonal BD del rectángulo y que tiene el sentido de la Figura 7.5, las componentes del momento flector respecto a los ejes (y, z) son:

$$M_y = M \sin \alpha = 50 \cdot \frac{3}{5} = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_z = M \cos \alpha = 50 \cdot \frac{4}{5} = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Por tanto, la ecuación del eje neutro es:

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \tan \alpha \frac{I_z}{I_y} = \frac{3 \cdot 16 \cdot 10^4}{4 \cdot 9 \cdot 10^4} = \frac{4}{3}$$

Como puede verse en la Figura 7.6, el eje neutro coincide en este caso con la otra diagonal del rectángulo, la recta AC .

(b) Dada la dirección del eje neutro, las tensiones máximas se dan en los puntos B y D , a los que corresponden la máxima compresión y tracción respectivamente:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -\frac{M_z}{I_z} y_B + \frac{M_y}{I_y} z_B \\ &= \left[-\frac{40 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-4}} 0,20 + \frac{30 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{-4}} (-0,15) \right] \text{ Pa} = -10 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_D &= -\frac{M_z}{I_z} y_D + \frac{M_y}{I_y} z_D \\ &= \left[-\frac{40 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-4}} (-0,20) + \frac{30 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{-4}} 0,15 \right] \text{ Pa} = +10 \text{ MPa} \end{aligned}$$

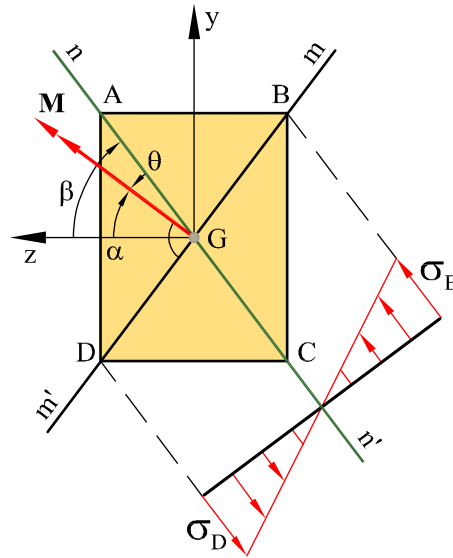


Fig. 7.6: Resolución del Ejemplo 7.2.1

La correspondiente distribución de tensiones puede verse en la Figura 7.6.

(c) El valor de la curvatura puede calcularse como:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{E} \sqrt{\frac{M_y^2}{I_y^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2}} \\ &= \frac{1}{20 \cdot 10^9} \sqrt{\frac{(30 \cdot 10^3)^2}{(9 \cdot 10^{-4})^2} + \frac{(40 \cdot 10^3)^2}{(16 \cdot 10^{-4})^2}} \text{ m}^{-1} = 2,0833 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

lo que corresponde a un radio de curvatura de $\rho = 480 \text{ m}$.

Ejemplo 7.2.2

La sección de pequeño espesor de la Figura 7.7 está sometida a la acción de un momento flector esviado M . Se pide: (a) Calcular y dibujar la distribución de tensiones normales, acotando sus valores máximos y (b) Calcular el valor máximo del momento M que soporta la sección si la tensión admisible del material es σ_{adm} .

Datos: $M = 350 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\sigma_{\text{adm}} = 260 \text{ MPa}$, $a = 40 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$, $h = 50 \text{ cm}$, $e = 1,5 \text{ cm}$.

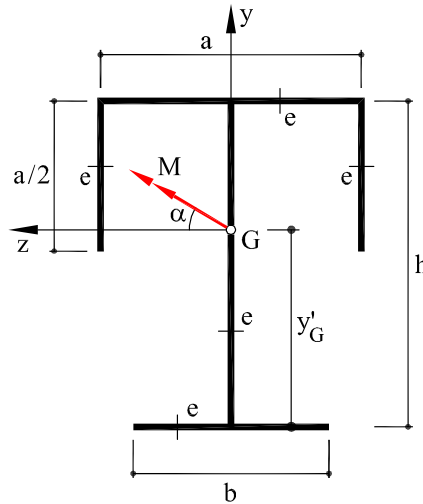


Fig. 7.7: Sección del ejemplo 7.2.2

La sección es simétrica respecto al eje y . Por tanto, el centro de gravedad está situado sobre dicho eje vertical. Al ser simétrica respecto al eje y , los ejes (y, z) son ejes principales de inercia de la sección.

Las características geométricas de la sección son (ver Ejemplo 6.2.6):

Área de la sección: $A = 240 \text{ cm}^2$,

Posición del centro de gravedad respecto del borde inferior: $y'_G = 30.3 \text{ cm}$,

Momentos de inercia principales: $I_y = 35\,400 \text{ cm}^4$, $I_z = 89\,977 \text{ cm}^4$.

(a) *Distribución de tensiones normales*

Teniendo en cuenta la inclinación α del momento M , las componentes del momento flector respecto a los ejes y, z son:

$$M_y = M \sin \alpha = 350 \frac{1}{2} = 175 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_z = M \cos \alpha = 350 \frac{\sqrt{3}}{2} = 303 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Por tanto, la ecuación del eje neutro es:

$$\tan \beta = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \tan \alpha \frac{I_z}{I_y} = 0,5774 \frac{8,9977 \cdot 10^4}{3,54 \cdot 10^4} = 1,467 \implies \beta = 55,73^\circ$$

El eje neutro es una recta que delimita la zona de tracción y de compresión en la sección (Figura 7.8). La tensión normal es proporcional a la distancia al eje neutro. Por tanto, los puntos de máxima tensión son los más alejados a dicho eje. En este caso

los puntos más alejados son: $C(19, 7; -20, 0)$ y $T(-30, 3; 15, 0)$ (cotas expresadas en cm), y las tensiones que resultan en ellos son:

$$\begin{aligned}\sigma_C^{\max} &= -\frac{M \cos \alpha}{I_z} y_C + \frac{M \sin \alpha}{I_y} z_C = \\ &= \left[-\frac{303 \cdot 10^3}{8,9977 \cdot 10^{-4}} (0,197) + \frac{175 \cdot 10^3}{3,54 \cdot 10^{-4}} (-0,20) \right] \text{ Pa} = -165 \text{ MPa (C)} \\ \sigma_T^{\max} &= -\frac{M \cos \alpha}{I_z} y_T + \frac{M \sin \alpha}{I_y} z_T = \\ &= \left[-\frac{303 \cdot 10^3}{8,9977 \cdot 10^{-4}} (-0,303) + \frac{175 \cdot 10^3}{3,54 \cdot 10^{-4}} (0,15) \right] \text{ Pa} = 176 \text{ MPa (T)}\end{aligned}$$

(b) *Máximo momento M admisible*

Para calcular el máximo momento M admisible y suponiendo que el valor de tensión admisible σ_{adm} es válido tanto para tracción como para compresión, se ha de tener en cuenta que la máxima tensión es de tracción (176 MPa) en el punto T . Se tiene:

$$\sigma_T^{\max} = M \left[-\frac{\cos \alpha}{I_z} (-0,303) + \frac{\sin \alpha}{I_y} (0,15) \right] < \sigma_{\text{adm}} = 260 \text{ MPa} \Rightarrow M_{\text{max}} = 516 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

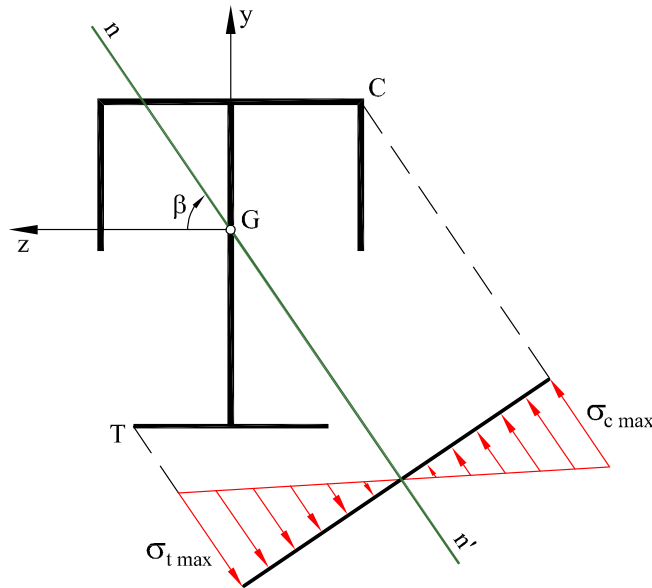


Fig. 7.8: Resolución del ejemplo 6.5.2

7.3 Flexión simple esviada

Como en el caso de flexión simple recta (Sección 6.3), en la flexión simple esviada, la actuación de un momento variable viene acompañada de esfuerzos cortantes:

$$T_y = -\frac{dM_z}{dx} \quad T_z = \frac{dM_y}{dx} \quad (7.10)$$

El esfuerzo cortante da lugar a la aparición de distorsiones angulares y tensiones tangenciales en la sección. Como consecuencia de la existencia de estas distorsiones angulares, además de producirse las elongaciones de las fibras longitudinales propias de la flexión, se produce cierta deformación de las secciones planas. Este fenómeno, explicado en la Sección 6.3 para el caso de flexión recta, se conoce con el nombre de *alabeo* de las secciones rectas y las consideraciones allí expuestas pueden extenderse al caso de la flexión esviada.

Dado que todas las expresiones obtenidas para la flexión pura se basan en la magnitud de las elongaciones longitudinales de las fibras, es obvio que si se admite la hipótesis generalizada de deformación de Bernoulli-Navier, la totalidad de las expresiones halladas para el caso de la flexión pura pueden extenderse al caso más general de la flexión simple.

Ejemplo 7.3.1

Para la viga recta de la Figura 7.9 sometida a las cargas que se indican, se pide: (a) determinar el valor y la localización de los momentos flectores máximos; (b) calcular y dibujar la distribución de tensiones normales y (c) calcular el valor máximo que puede alcanzar la carga P_y si la carga P_z permanece constante, suponiendo que el valor de la tensión admisible σ_{adm} es válido tanto para tracción como para compresión.

Datos: $l = 5$ m, $P_y = 90$ kN, $P_z = 15$ kN, $a = 40$ cm, $b = 30$ cm, $h = 50$ cm, $e = 1,5$ cm, $\sigma_{adm} = 260$ MPa, $E = 210$ GPa.

La sección es simétrica respecto al eje y . Por tanto, los ejes (y, z) son ejes principales de inercia de la sección.

Las características geométricas de la sección son:

Área de la sección: $A = 180$ cm²,

Posición del centro de gravedad respecto del borde inferior: $y'_G = 27$ cm,

Momentos de inercia principales: $I_y = 11\,389$ cm⁴, $I_z = 80\,200$ cm⁴.

(a) Las leyes de esfuerzos debidas a las cargas P_y y P_z pueden verse en la Figura ???. De éstas se concluye que la viga está sometida a un estado de flexión simple (momento

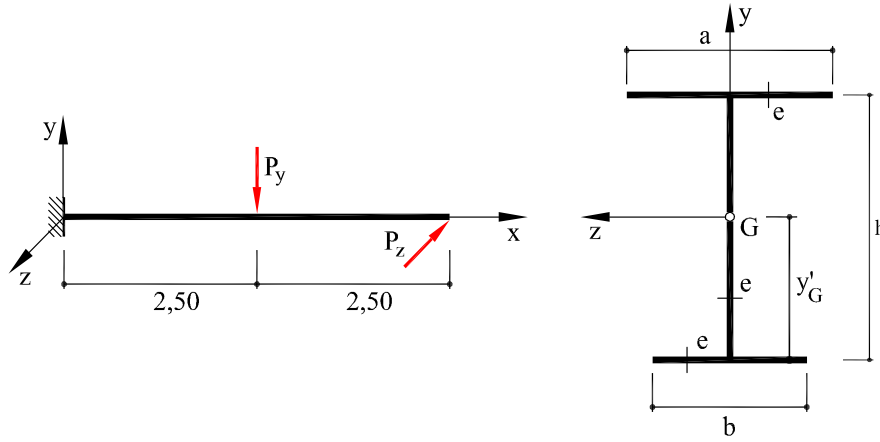


Fig. 7.9: Viga y sección normal del Ejemplo 7.3.1

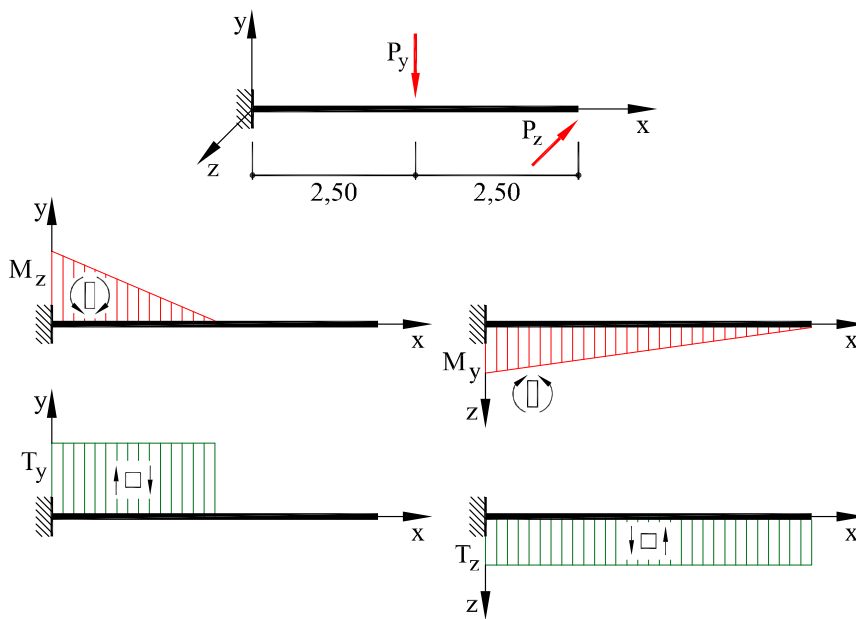


Fig. 7.10: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 7.3.1

flector más cortante). El momento flector en una sección genérica tiene componentes según ambos ejes (y, z). En consecuencia, las secciones están sometidas a un estado de flexión esviada. El máximo momento se produce en la sección del empotramiento y sus componentes según los ejes principales son:

$$M_y = 15 \cdot 5 = 75 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad M_z = -90 \cdot 2,5 = -225 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

(b) La ecuación del eje neutro es:

$$\tan \beta = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \frac{75 \cdot 10^3}{(-225 \cdot 10^3)} \frac{8,02 \cdot 10^{-4}}{1,14 \cdot 10^{-4}} = -2,35 \quad \Rightarrow \quad \beta = -66,95^\circ$$

Los puntos más alejados del eje neutro son $A(0,23 \text{ m}; 0,20 \text{ m})$ y $B(-0,27 \text{ m}; -0,15 \text{ m})$ (Figura 7.11), en ellos se producen las tensiones máximas:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{M_z}{I_z} y_A + \frac{M_y}{I_y} z_A = \\ &= \left[-\frac{(-225 \cdot 10^3)}{8,02 \cdot 10^{-4}} (0,23) + \frac{75 \cdot 10^3}{1,14 \cdot 10^{-4}} (0,20) \right] \text{ Pa} \\ &= +197 \text{ MPa (T)} \\ \sigma_B &= -\frac{M_z}{I_z} y_B + \frac{M_y}{I_y} z_B = \\ &= \left[-\frac{(-225 \cdot 10^3)}{8,02 \cdot 10^{-4}} (-0,27) + \frac{75 \cdot 10^3}{1,14 \cdot 10^{-4}} (-0,15) \right] \text{ Pa} \\ &= -175 \text{ MPa (C)} \end{aligned}$$

En A se produce la máxima tensión de tracción que coincide con el valor máximo absoluto de tensión en la sección. En B se da la máxima tensión de compresión. Se comprueba que ambas tensiones son menores que la tensión admisible del material $\sigma_{\text{adm}} = 260 \text{ MPa}$.

(c) En el punto A de la sección se produce la máxima tensión en valor absoluto. El valor máximo que puede alcanzar la carga P_y se determina a partir de la expresión:

$$\sigma_A = -\frac{M_z}{I_z} y_A + \frac{M_y}{I_y} z_A \leq \sigma_{\text{adm}} = 260 \text{ MPa}$$

teniendo en cuenta que $M_z = -P_y \cdot 2,5$ se obtiene:

$$\left[-\frac{(-P_y \cdot 2,5 \cdot 10^3)}{8,02 \cdot 10^{-4}} (0,23) + \frac{75 \cdot 10^3}{1,14 \cdot 10^{-4}} (0,20) \right] \text{ Pa} = 260 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad P_y^{\text{max}} = 178 \text{ kN}$$

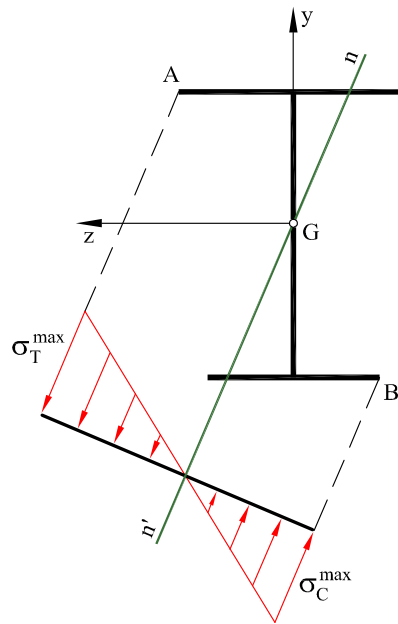


Fig. 7.11: Distribución de tensiones normales

Ejemplo 7.3.2

Se quiere elegir la sección de unas piezas prismáticas (Figura 7.12) para utilizar como correas en un tejado de pendiente $\alpha = 20^\circ$. Se dispone de un perfil normalizado IPN80 (ancho $a = 42$ mm, altura $b = 80$ mm, $I_z = 77,8$ cm⁴, $I_y = 6,29$ cm⁴) y de una sección tubular rectangular (ancho $a = 40$ mm, altura $b = 80$ mm, espesor $e = 2$ mm, $I_z = 38,97$ cm⁴, $I_y = 13,12$ cm⁴). Determinar: (a) cuál de ellas es la más resistente, si ambas van a estar sometidas a carga vertical descendente y (b) el valor de α para que ambas secciones resistan el mismo momento.

(a) Las dos secciones tienen las mismas direcciones principales de inercia. Las componentes del momento M vertical según los ejes principales (y, z) son:

$$M_z = M \cos \alpha = 0,940 M$$

$$M_y = M \sin \alpha = 0,342 M$$

Sección IPN 80: La ecuación del eje neutro para un momento M es:

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{\sin \alpha I_z}{\cos \alpha I_y} = \frac{0,342}{0,940} \frac{77,8}{6,29} = 4,50 \Rightarrow \beta = 77^\circ 28' 16''$$

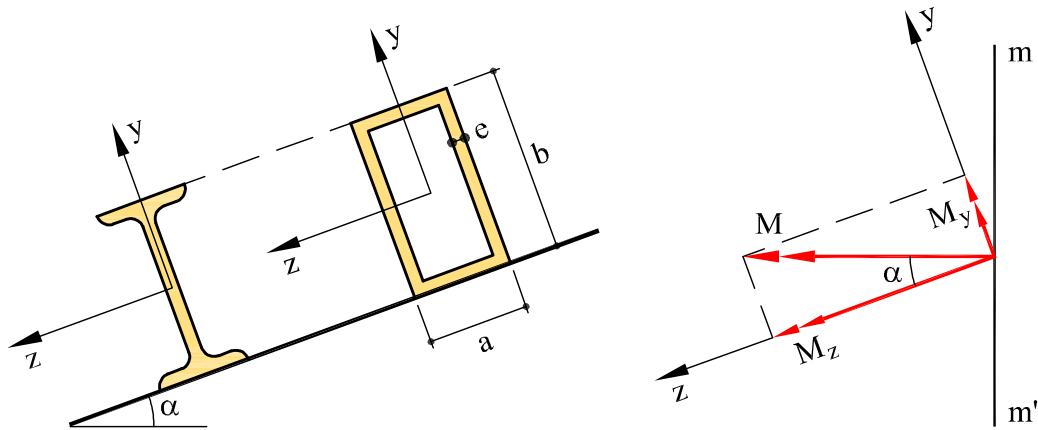


Fig. 7.12: Secciones del Ejemplo 7.3.2

La tensión máxima se produce en los puntos más alejados del eje neutro, es decir, en los puntos C y D (Figura 7.13), y su valor puede calcularse, para un momento M [kN·m] como:

$$\begin{aligned}\sigma_C &= -\frac{M_z}{I_z} y_C + \frac{M_y}{I_y} z_C \\ &= \left[-\frac{0,940 \cdot 10^3 M}{77,8 \cdot 10^{-8}} 4,0 \cdot 10^{-2} + \frac{0,342 \cdot 10^3 M}{6,29 \cdot 10^{-8}} (-2,1 \cdot 10^{-2}) \right] \text{ Pa} \\ &= -162,5 M \text{ MPa} \quad (\text{compresión máxima})\end{aligned}$$

La tensión en el punto D tiene el mismo valor absoluto, pero es de signo contrario, es decir, corresponde a la máxima tracción.

Sección Tubular: La ecuación del eje neutro, en este caso, es igual a:

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{\sin \alpha I_z}{\cos \alpha I_y} = \frac{0,342}{0,940} \frac{38,97}{13,12} = 1,08 \Rightarrow \beta = 47^\circ 12' 9''$$

La tensión máxima se produce en los vértices C y D de la sección (Figura 7.13) y su valor, para un momento M [kN.m], es igual a:

$$\begin{aligned}\sigma_C &= -\frac{M_z}{I_z} y_C + \frac{M_y}{I_y} z_C \\ &= \left[-\frac{0,940 \cdot 10^3 M}{38,97 \cdot 10^{-8}} 4 \cdot 10^{-2} + \frac{0,342 \cdot 10^3 M}{13,12 \cdot 10^{-8}} (-2 \cdot 10^{-2}) \right] \text{ Pa} \\ &= -148,6 M \text{ MPa} \quad (\text{compresión máxima})\end{aligned}$$

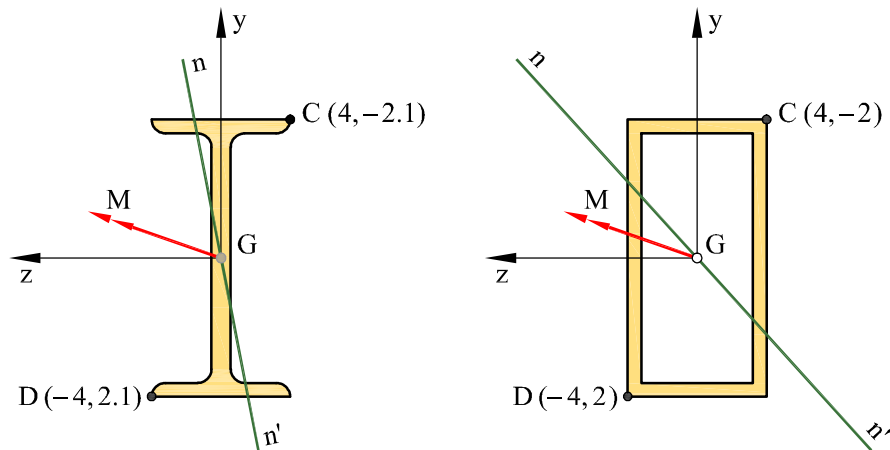


Fig. 7.13: Ejes neutros y puntos de máxima tensión en Ejemplo 7.3.2

La tensión en el vértice D es igual en valor absoluto, pero es de tracción.

De los valores de las tensiones máximas obtenidas, se observa que, para la sollicitación considerada, la sección tubular es *más resistente* que el perfil IPN 80, siendo la diferencia del orden de un 10 % aproximadamente.

(b) Para un ángulo α cualquiera, se puede escribir:

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z \\ &= M \left(-\frac{\cos \alpha}{I_z}y + \frac{\sin \alpha}{I_y}z \right)\end{aligned}$$

Tensión máxima en el perfil IPN 80:

$$\sigma_{\max}^{\text{IPN}} = M \left[-\frac{\cos \alpha}{77,8}(4) + \frac{\sin \alpha}{6,29}(-2,1) \right] \cdot 10^9$$

Tensión máxima en la sección tubular:

$$\sigma_{\max}^{\text{tubo}} = M \left[-\frac{\cos \alpha}{38,97}(4) + \frac{\sin \alpha}{13,12}(-2) \right] \cdot 10^9$$

Igualando se tiene:

$$\frac{4}{77,8} \cos \alpha + \frac{2,1}{6,29} \sin \alpha = \frac{4}{38,97} \cos \alpha + \frac{2}{13,12} \sin \alpha$$

de donde

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,051230}{0,181424} = 0,2823 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15^\circ 46' 6''$$

Obviamente, para ángulos inferiores a $\alpha = 15^{\circ}46'6''$, la IPN es más resistente, ya que tiene mayor módulo resistente W_z . Para ángulos superiores a $\alpha = 15^{\circ}46'6''$, la sección tubular es más resistente, ya que tiene mayor módulo resistente W_y .

7.4 Flexión compuesta esviada

Se dice que una pieza está solicitada a *flexión compuesta esviada* cuando sobre sus secciones actúa un sistema de esfuerzos que se reduce a un esfuerzo axial N y un momento flector M de componentes M_y y M_z , contenido en un plano *distinto* de los planos principales de flexión de la pieza, es decir, tal que el vector momento *no coincide* con ninguno de los ejes principales de inercia de las secciones (Figura 7.14a).

De forma análoga a lo descrito en flexión compuesta recta, la deformación de la rebanada puede deducirse de aplicar el principio de superposición. Así, la deformación debida al axil se produce según la hipótesis de Bernoulli (las secciones rectas se trasladan manteniéndose planas y paralelas a sí mismas), mientras que la deformación por flexión se produce según la hipótesis de Bernoulli-Navier (las secciones rectas giran alrededor del eje neutro manteniéndose planas y perpendiculares a la deformada de la directriz). Por superposición de efectos, una sección de la rebanada experimenta una traslación du , paralela al eje x (debida al axil), un giro $d\phi_z$, alrededor del eje z (debido al flector M_z), y un giro $d\phi_y$, alrededor del eje y (debido al flector M_y), relativos a otra sección recta infinitamente próxima. La composición de estos movimientos equivale a un único giro alrededor del *eje neutro*, cuya posición se determinará más adelante.

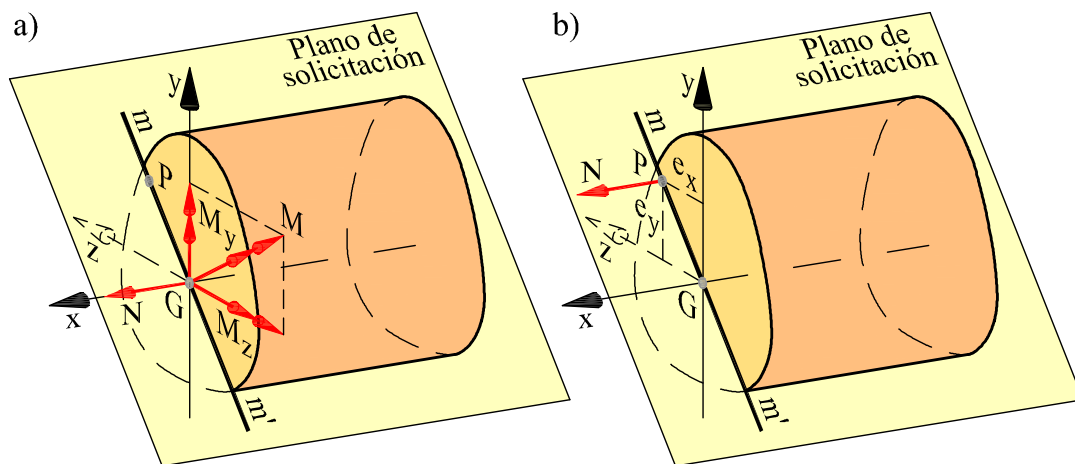


Fig. 7.14: Flexión compuesta esviada como fuerza normal excéntrica

El valor de las tensiones normales en un punto genérico de la sección, de coordenadas (y, z) respecto de los ejes principales, puede obtenerse también aplicando el principio de superposición. En este caso, se superponen las tensiones obtenidas para esfuerzo axial a las correspondientes a flexión esviada, en la forma:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (7.11)$$

Obsérvese que, de acuerdo a la hipótesis de deformación de Bernoulli-Navier y a la ley de Hooke, la distribución de tensiones es lineal en las coordenadas y, z .

Por otra parte, el axial N , aplicado en el baricentro de la sección G , más el momento \mathbf{M} son un sistema de esfuerzos estáticamente equivalente a una fuerza excéntrica única de valor N aplicada en el centro de presiones P (Figura 7.14b), cuya posición respecto de los ejes principales $P(e_y, e_z)$ viene dada por las relaciones:

$$M_y = N e_z \quad ; \quad M_z = -N e_y \quad (7.12)$$

o bien,

$$e_z = \frac{M_y}{N} \quad ; \quad e_y = -\frac{M_z}{N} \quad (7.13)$$

En flexión compuesta esviada, el centro de presiones P no está situado sobre ninguno de los ejes principales. La dirección \overline{GP} (o mm' en la Figura 7.14), ortogonal al vector momento, es la traza del plano de sollicitación. Según lo anterior, la tensión en un punto genérico de la sección puede expresarse también como:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (7.14a)$$

$$= \frac{N}{A} + \frac{N e_y y}{I_z} + \frac{N e_z z}{I_y} \quad (7.14b)$$

$$= \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_y y}{r_z^2} + \frac{e_z z}{r_y^2} \right) \quad (7.14c)$$

donde $r_z = \sqrt{I_z/A}$ y $r_y = \sqrt{I_y/A}$ son los radios de giro de la sección respecto a los ejes (y, z) , respectivamente.

Por definición, el *eje neutro* es el lugar geométrico de los puntos que tienen tensión normal nula. Por tanto, igualando a cero la expresión que permite calcular las tensiones se obtiene la ecuación del eje neutro:

$$1 + \frac{e_y y}{r_z^2} + \frac{e_z z}{r_y^2} = 0 \quad (7.15)$$

Ésta es la ecuación de una recta contenida en el plano yz . Dicha recta *no pasa* por el centro de gravedad de la sección y, en general, *no es perpendicular* a la traza del plano de sollicitación (dirección mm').

Si se llama A y B a los puntos de intersección del eje neutro con los ejes (y, z) , respectivamente, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{para } z = 0 &\Rightarrow y = a = -\frac{r_z^2}{e_y} && \text{siendo } a \text{ la ordenada del punto } A \\ \text{para } y = 0 &\Rightarrow z = b = -\frac{r_y^2}{e_z} && \text{siendo } b \text{ la abcisa del punto } B \end{aligned}$$

Debe observarse que si el centro de presiones P se acerca al centro de gravedad de la sección G , esto es, la excentricidad disminuye, el momento flector tiene menor importancia relativa y el eje neutro se aleja de la sección, estando toda ella sometida a tracción o compresión, según sea el signo de la fuerza normal N . En efecto, para $e_y, e_z \rightarrow 0$, $a, b \rightarrow \infty$. Por el contrario, si P se aleja de G , esto es, la excentricidad aumenta, la flexión tiene mayor importancia relativa, el eje neutro se acerca al centro de gravedad de la sección e interseca a la sección dividiéndola en dos zonas, una traccionada y otra comprimida ($e_y, e_z \rightarrow \infty$, $a, b \rightarrow 0$).

Se puede demostrar que si el centro de presiones se mueve sobre una recta r de ecuación:

$$\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1$$

los ejes neutros correspondientes a las sucesivas posiciones son rectas que giran alrededor del punto $R(y_R, z_R)$ de coordenadas:

$$y_R = -\frac{r_z^2}{a} \qquad z_R = -\frac{r_y^2}{b}$$

Ejemplo 7.4.1

Un pilar de sección rectangular $b \times h$ ($30 \times 40 \text{ cm}^2$) y longitud $l = 2,5 \text{ m}$ soporta una fuerza de compresión $F = 100 \text{ kN}$ ligeramente inclinada, según muestra la Figura 7.15. Calcular: (a) las leyes de esfuerzos en la pieza; (b) posición y dirección del eje neutro en cada sección; (c) tensiones máximas en cada sección.

Las características geométricas de la sección son:

$$A = 30 \cdot 40 = 1200 \text{ cm}^2$$

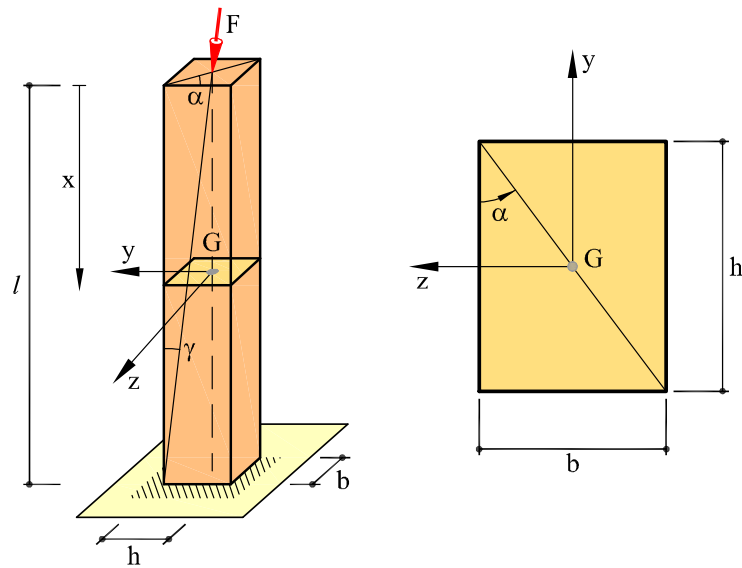


Fig. 7.15: Pilar y sección transversal del Ejemplo 7.4.1

$$I_y = \frac{1}{12} 40 \cdot 30^3 = 90\,000 \text{ cm}^4 \quad ; \quad r_y^2 = \frac{I_y}{A} = 75,00 \text{ cm}^2$$

$$I_z = \frac{1}{12} 30 \cdot 40^3 = 160\,000 \text{ cm}^4 \quad ; \quad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = 133,33 \text{ cm}^2$$

Los ángulos α y γ , con $d^2 = h^2 + b^2$, son:

$$\alpha = \arctan \frac{b}{h} = \arctan \frac{3}{4} \quad ; \quad \gamma = \arctan \frac{d/2}{l} = \arctan \frac{1}{10} \simeq \frac{1}{10}$$

Las excentricidades de la carga en función de la distancia x de la sección considerada al extremo superior del pilar son:

$$e_y(x) = \frac{h x}{2 l} \quad ; \quad e_z(x) = \frac{b x}{2 l}$$

(a) *Leyes de esfuerzos*

Las leyes de esfuerzos, en función de las excentricidades en cada sección, son:

$$N(x) = -F \cos \gamma \quad \simeq -F$$

$$T_y(x) = +F \sin \gamma \cos \alpha \quad \simeq +0,08F$$

$$T_z(x) = +F \sin \gamma \sin \alpha \quad \simeq +0,06F$$

$$M_y(x) = -F \cos \gamma e_z(x) \simeq -F \frac{b x}{2 l}$$

$$M_z(x) = +F \cos \gamma e_y(x) \simeq +F \frac{h x}{2 l}$$

Los esfuerzos axil y cortantes son constantes a lo largo de la pieza, mientras que los flectores crecen linealmente con x .

(b) *Posición y dirección del eje neutro en cada sección*

El eje neutro de cada sección corta a los ejes (y, z) de la sección en los puntos A y B , de coordenadas

$$a(x) = -\frac{r_z^2}{e_y(x)} = -6,66 \frac{l}{x} \text{ cm} \quad ; \quad b(x) = -\frac{r_y^2}{e_z(x)} = -5,00 \frac{l}{x} \text{ cm}$$

Por tanto, el eje neutro se acerca al centro de gravedad a medida que crece la relación x/l , según se muestra en la Figura 7.16.

(c) *Tensiones máximas en cada sección*

Las tensiones en un punto cualquiera de la pieza son:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_y y}{r_z^2} + \frac{e_z z}{r_y^2} \right)$$

$$= \frac{N}{A} \left(1 - \frac{y}{a(x)} - \frac{z}{b(x)} \right)$$

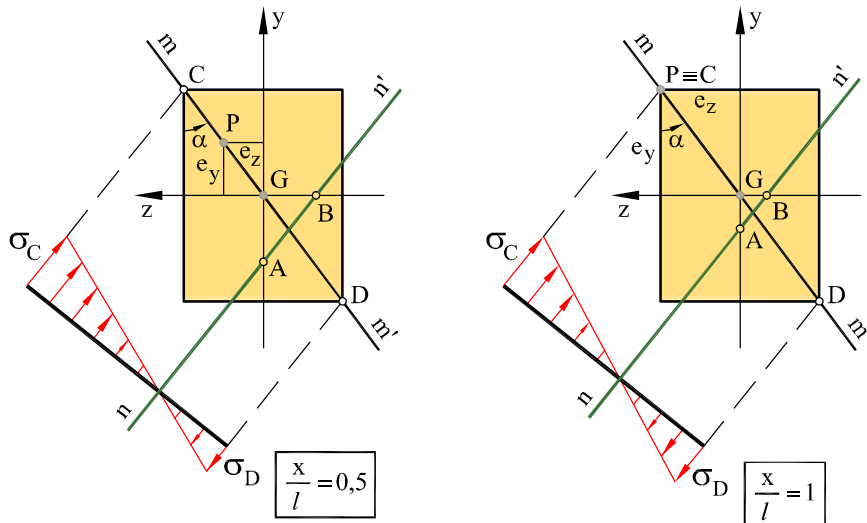


Fig. 7.16: Resultados del Ejemplo 7.4.1

Conocida la posición del eje neutro es fácil ver que las distribuciones de tensiones serán como las dibujadas en la Figura 7.16 para las secciones $x/l = 0,5$ y $x/l = 1$.

La máxima compresión se produce en el punto C , esquina superior izquierda, y vale:

$$\sigma_C(x) = \frac{N}{A} \left(1 + \left[\frac{20}{6,66} + \frac{15}{5,0} \right] \frac{x}{l} \right) = \frac{N}{A} \left(1 + 6,0 \frac{x}{l} \right)$$

y, entonces, $\sigma_C(x/l = 0,5) = -3,333$ MPa y $\sigma_C(x/l = 1) = -5,833$ MPa.

La máxima tracción se produce en el punto D , esquina inferior derecha, y vale:

$$\sigma_D(x) = \frac{N}{A} \left(1 - \left[\frac{20}{6,66} + \frac{15}{5,0} \right] \frac{x}{l} \right) = \frac{N}{A} \left(1 - 6,0 \frac{x}{l} \right)$$

y, entonces, $\sigma_D(x/l = 0,5) = 1,667$ MPa y $\sigma_D(x/l = 1) = 4,167$ MPa.

7.5 Núcleo central de la sección

Se define el *núcleo central de una sección* como el lugar geométrico de los puntos tales que, tomados como centro de presiones en tracción o compresión excéntricas, producen tensiones normales del mismo signo en todos los puntos de la sección (Figura 7.17).

Para determinar el núcleo central haremos uso de las siguientes propiedades:

- a) para que la sección esté sometida a tensiones normales del mismo signo es necesario y suficiente que el eje neutro *no corte* a la sección.

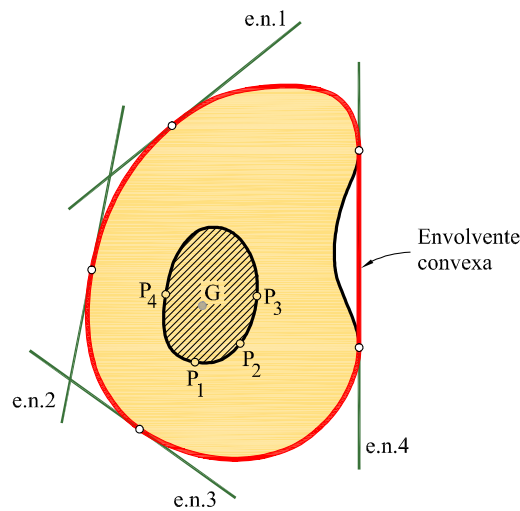


Fig. 7.17: Núcleo central de una sección

b) el centro de presiones y el eje neutro están relacionados por la Ec. (7.15).

Por consiguiente, el núcleo central de una sección está formado por los puntos interiores a una curva cerrada, lugar geométrico de los puntos a los que, tomados como centros de presión, les corresponden ejes neutros que son rectas tangentes a la envolvente convexa de la sección.

El concepto de núcleo central de una sección puede visualizarse con más facilidad si se tiene en cuenta que, tal como se muestra en la Figura 7.17:

1. *el núcleo central es un recinto cerrado.* Si no lo fuese, incluiría necesariamente puntos infinitamente alejados del centro de gravedad, lo cual es imposible, ya que a centros de presiones suficientemente alejados del baricentro les corresponden ejes neutros suficientemente próximos a éste que cortarían a la sección.
2. *el núcleo central incluye al baricentro de la sección como punto interior,* ya que a centros de presiones suficientemente próximos al centro de gravedad les corresponden ejes neutros suficientemente alejados de éste como para no cortar a la sección.
3. *el núcleo central es interior a la envolvente convexa de la sección,* ya que los centros de presiones son los puntos por los que pasa la resultante de las tensiones normales que actúan sobre la sección; si éstas son todas del mismo signo (tracción o compresión), su resultante debe pasar necesariamente por un punto interior a la envolvente convexa.
4. *el núcleo central es un recinto conexo y convexo,* dado que la *envolvente convexa* de la sección también lo es.

Tanto el concepto como la definición y el método de cálculo del núcleo central se deben a Bresse, que los incluyó en su libro sobre Resistencia de Materiales, publicado en 1859. Veamos, a continuación, cómo se determina el núcleo central de algunas secciones particulares.

7.5.1 Sección circular

En una sección circular de radio R cualquier eje que pase por el centro del círculo es eje principal de inercia y el radio de giro correspondiente es

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{\pi R^4/4}{\pi R^2} = \left(\frac{R}{2}\right)^2 \quad (7.17)$$

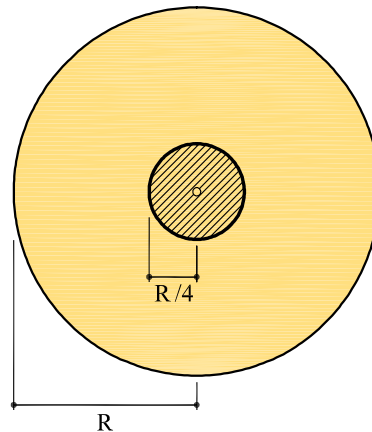


Fig. 7.18: Núcleo central de una sección circular

Por simetría radial, el núcleo central de una sección circular será un círculo concéntrico (ver Figura 7.18). Calculamos el radio del núcleo central imponiendo que el eje neutro sea tangente a la sección. Tomemos, por ejemplo, el caso de tangencia en la fibra inferior del círculo, de ecuación $y = -R$. Identificando esta ecuación con la expresión general del eje neutro en flexión compuesta recta alrededor del eje z ,

$$1 + \frac{e_y y}{r_z^2} = 0 \quad (7.18)$$

se tiene:

$$1 + \frac{e(-R)}{(R/2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad e = \frac{R}{4} \quad (7.19)$$

donde e es el radio del círculo que corresponde al núcleo central de la sección circular de radio R .

7.5.2 Sección corona circular

En una sección corona circular de radios R_e y R_i , exterior e interior, respectivamente, cualquier eje que pase por el centro del círculo es eje principal de inercia y el radio de giro correspondiente es

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{\pi (R_e^4 - R_i^4)/4}{\pi (R_e^2 - R_i^2)} = \frac{R_e^2 + R_i^2}{4} \quad (7.20)$$

Por simetría radial, el núcleo central de una sección corona circular será un círculo concéntrico. Aplicando un proceso similar al utilizado para la sección circular, calculamos el radio del núcleo central imponiendo que el eje neutro sea tangente a la sección,

por ejemplo, en la fibra inferior del círculo, de ecuación $y = -R_e$. Identificando esta ecuación con la expresión general del eje neutro en flexión compuesta recta alrededor del eje z , se tiene

$$1 + \frac{e(-R_e)}{\frac{R_e^2 + R_i^2}{4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad e = \frac{R_e^2 + R_i^2}{4R_e} > \frac{R_e}{4} \quad (7.21)$$

donde e es el radio del círculo que corresponde al núcleo central de la sección corona circular.

7.5.3 Sección rectangular

La envolvente convexa una sección rectangular de dimensiones $b \times h$ es la propia sección. Los radios de giro respecto a los ejes principales de inercia son $r_z^2 = h^2/12$ y $r_y^2 = b^2/12$. Consideremos en primer lugar un eje neutro coincidente con el lado \overline{CD} , de ecuación $y = -h/2$; el centro de presiones correspondiente es el punto M , y la ecuación del eje neutro es:

$$1 + \frac{e_M(-\frac{h}{2})}{r_z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_M = \frac{h}{6} \quad (7.22)$$

De forma análoga, para el eje neutro coincidente con el lado \overline{AD} , de ecuación $z = b/2$, el centro de presiones es el punto N con excentricidad $e_N = -b/6$.

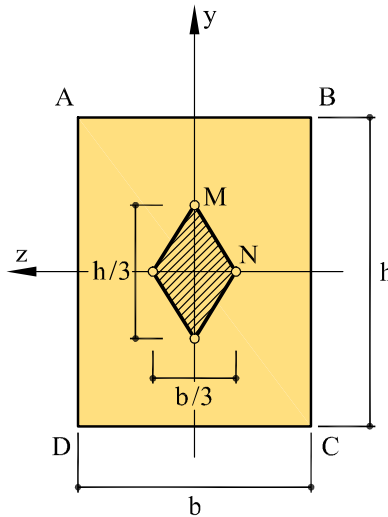


Fig. 7.19: Núcleo central de una sección rectangular

Cuando el centro de presiones recorre el segmento \overline{MN} , los correspondientes ejes neutros giran alrededor del punto D , ya que en D se cortan los ejes neutros correspondientes a los centros de presión M y N . Por doble simetría respecto a los ejes (y, z) , el núcleo central es un rombo de diagonales $h/3$ y $b/3$, respectivamente, según se observa en la Figura 7.19.

7.5.4 Sección en doble T

La envolvente convexa de una sección en doble T simétrica es un rectángulo, tal como se muestra en la Figura 7.20. Por tanto, el núcleo central será un rombo como en el caso anterior, pero las longitudes de sus diagonales vendrán dadas por los radios de giro de la sección en cuestión.

La posición del punto M la obtenemos de considerar que el lado \overline{CD} , de ecuación $y = -h/2$, es el eje neutro correspondiente a que M sea centro de presiones:

$$1 + \frac{e_M \left(-\frac{h}{2}\right)}{r_z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_M = \frac{2r_z^2}{h} \quad (7.23)$$

y, para el punto N y su eje neutro correspondiente \overline{AD} , de ecuación $z = b/2$, se tiene:

$$1 + \frac{e_N \frac{b}{2}}{r_y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_N = -\frac{2r_y^2}{b} \quad (7.24)$$

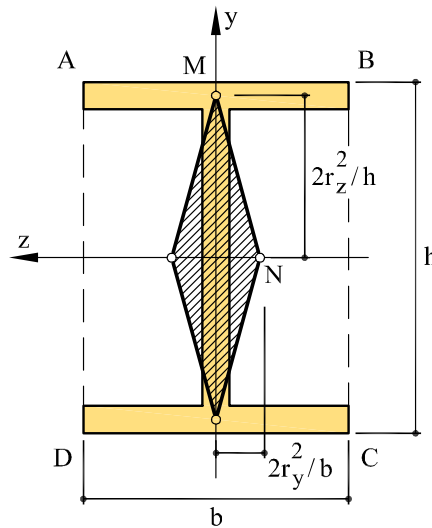


Fig. 7.20: Núcleo central de una sección en doble T

8 Esfuerzo Cortante

8.1 Introducción

Una sección de una pieza está sometida a *cizallamiento* o *cortadura* cuando sobre ella actúa un esfuerzo cortante, es decir, una resultante de fuerzas paralelas al plano de la sección.

La actuación de un esfuerzo cortante \mathbf{T} sobre la sección implica la existencia de una distribución de tensiones tangenciales sobre el plano de la sección, de tal forma que se cumplan las relaciones integrales:

$$T_y = \int_S \tau_{xy} dS \quad ; \quad T_z = \int_S \tau_{xz} dS \quad (8.1)$$

donde T_y, T_z son las componentes del esfuerzo cortante y τ_{xy}, τ_{xz} las componentes de la tensión tangencial.

Las ecuaciones anteriores no bastan para determinar la distribución de tensiones tangenciales, siendo necesario, como en los capítulos anteriores, hacer hipótesis sobre la deformación de la rebanada. Distintas hipótesis de deformación dan lugar a distintos resultados. En lo que sigue se considera, primero, la llamada *teoría elemental de la cortadura*, basada en una hipótesis de deformación muy simple. Se estudia, a continuación, la teoría de la cortadura de Collignon, basada en la hipótesis de deformación a flexión de Saint-Venant (hipótesis generalizada de Bernoulli-Navier).

8.2 Teoría elemental de la cortadura

La hipótesis más simple que puede hacerse respecto a la deformación de una rebanada de una pieza prismática sometida a cortadura es que “*las secciones transversales permanecen planas y se mueven paralelas a sí mismas en la dirección del esfuerzo cortante*”. En tal caso, en una rebanada de longitud dx tal como la mostrada en la Figura 8.1, sometida a la acción de un esfuerzo cortante en una determinada dirección, una sección

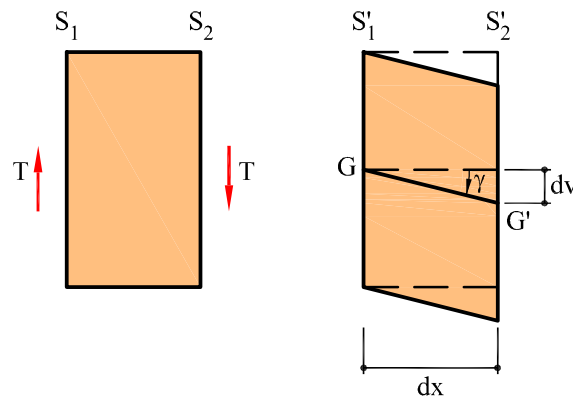


Fig. 8.1: Hipótesis de deformación de la Teoría elemental

como la S_2 tendrá respecto a otra infinitamente próxima S_1 un desplazamiento relativo de valor dv , en la dirección del cortante actuante. La distorsión angular producida en un punto cualquiera de la rebanada vendrá dada por:

$$\gamma = \frac{dv}{dx} \quad (8.2)$$

Por tanto, la rebanada está sometida a un estado de distorsión uniforme de valor γ . Si se cumple la ley de Hooke, la tensión tangencial que actúa en un punto cualquiera de la sección vale:

$$\tau = G\gamma \quad (8.3)$$

donde G es el módulo de rigidez transversal del material de la pieza.

Como la resultante de estas tensiones debe ser igual al esfuerzo cortante, se tiene una distribución uniforme de tensiones tangenciales, de dirección coincidente con la del esfuerzo cortante, y de valor:

$$\tau = \frac{T}{A} \quad (8.4)$$

donde A es el área de la sección. La distorsión angular valdrá entonces:

$$\gamma = \frac{T}{GA} \quad (8.5)$$

Es habitual utilizar esta teoría elemental para realizar el cálculo de uniones de piezas mediante remaches o cordones de soldadura (ver Figura 8.2) o en el caso de análisis de aparatos de apoyo.

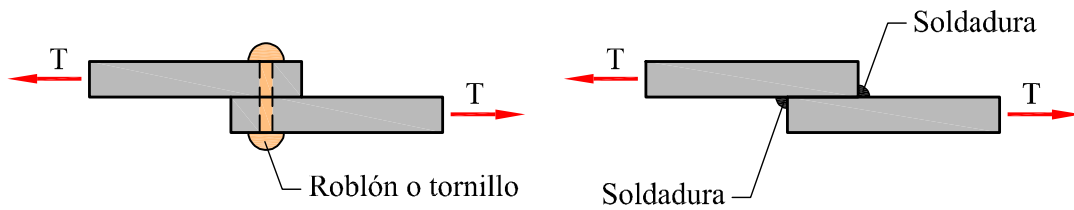


Fig. 8.2: Aplicaciones de la teoría elemental: uniones roblonadas o soldadas

Ejemplo 8.2.1

Tres placas de acero, de 1,6 cm de espesor cada una, están unidas por dos remaches de diámetro $d = 1,3$ cm cada uno, como muestra la Figura 8.3. Si el valor de la carga T es 44,5 kN, calcular: (a) la tensión tangencial media sobre los remaches, y (b) la carga T máxima que soporta la unión si la tensión tangencial admisible en los remaches es $\tau^* = 220$ MPa. Despreciar el rozamiento entre placas.

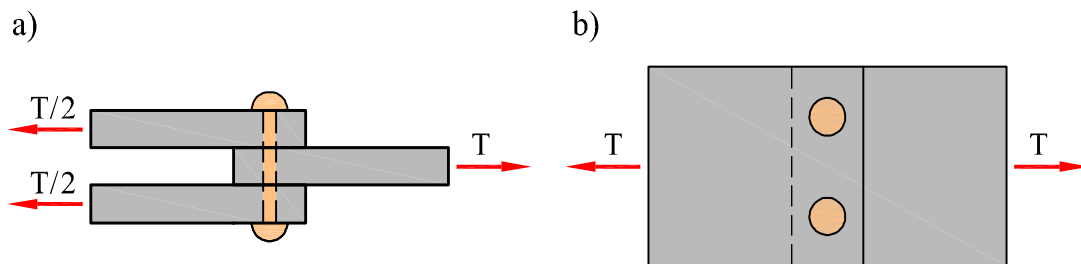


Fig. 8.3: Unión de las placas del Ejemplo 8.2.1: a) sección transversal b) vista en planta

(a) La unión de las placas se hace mediante dos remaches; por tanto, la fuerza T es soportada por cuatro secciones, y la tensión tangencial media en los remaches es:

$$\tau_{med} = \frac{T}{4A} = \frac{T}{4(\pi d^2/4)} = \frac{44,5 \cdot 10^3}{4 \cdot (\pi \cdot 1,3^2/4) \cdot 10^{-4}} \text{ Pa} = 83,8 \text{ MPa}$$

(b) Si en los roblones la tensión tangencial admisible es $\tau^* = 220$ MPa, el valor

máximo que puede tener la fuerza T es:

$$T_{\max} = 220 \cdot 10^6 \cdot 4A = 220 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot \frac{\pi \cdot 1,3^2}{4} \cdot 10^{-4} = 116,8 \text{ kN}$$

Ejemplo 8.2.2

El apoyo de una máquina está formado por una capa de neopreno de espesor h y una placa de acero de dimensiones $a \times b$ (Figura 8.4). Para una fuerza horizontal T , calcular: (a) la tensión tangencial media en el neopreno y (b) el desplazamiento horizontal u de la placa de acero, si el módulo de rigidez a cortante del neopreno es G_n . Despreciar el rozamiento entre la placa y el neopreno.

Datos: $a = 200 \text{ mm}$; $b = 150 \text{ mm}$; $h = 12 \text{ mm}$; $T_y = 8 \text{ kN}$; $G_n = 0,9 \text{ MPa}$.

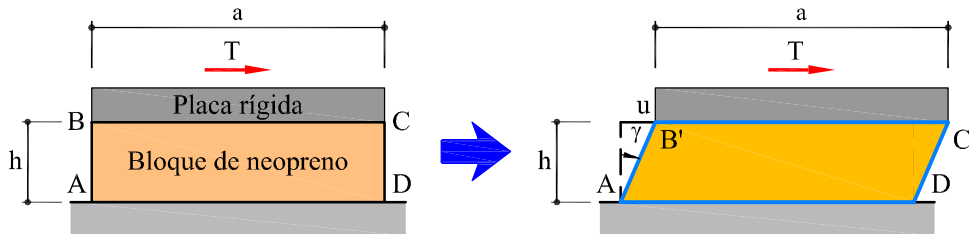


Fig. 8.4: Apoyo del Ejemplo 8.2.2

(a) La tensión tangencial media τ en el neopreno es:

$$\tau = \frac{T}{ab} = \frac{8 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 0,15} \text{ Pa} = 0,267 \text{ MPa}$$

(b) La distorsión media γ en el neopreno es:

$$\gamma = \frac{\tau}{G_n} = \frac{0,267 \cdot 10^6}{0,9 \cdot 10^6} = 0,297 \text{ rad}$$

Por tanto, el desplazamiento horizontal u de la placa de acero es:

$$u = h \cdot \gamma = 12 \cdot 0,297 = 3,56 \text{ mm}$$

8.3 Teoría de Collignon

Consideremos una pieza prismática recta de sección arbitraria pero constante a lo largo de la pieza, sometida a flexión simple según un plano principal de inercia (flexión recta). Supongamos a efectos de desarrollo que sobre una rebanada diferencial de la pieza actúan un momento flector variable M_z y un esfuerzo cortante T_y , ambos contenidos en el plano principal de inercia xy (Figura 8.5).

Del equilibrio de momentos de la rebanada, limitada por dos secciones S (frontal) y S' (dorsal), separadas una distancia dx , se obtiene la relación:

$$T_y = \frac{dM_z}{dx} \quad (8.6)$$

Consideremos ahora la rebanada dividida por una superficie plana $ABA'B'$, paralela al eje de la viga y que tenga a la recta AB por traza sobre el plano de la sección S y a la recta $A'B'$ por traza sobre el plano de la sección S' . Estudiemos el equilibrio de fuerzas según el eje x que actúan sobre la parte rayada de la rebanada (1) que queda por encima de dicha superficie de corte. De acuerdo con la ley de tensiones de Navier, sobre la cara S' actúan unas tensiones normales debidas a M_z cuya resultante F sobre la parte de la sección (1), limitada por la línea $A'B'$, vale:

$$F = \int_{\Omega} \sigma_x d\Omega = \int_{\Omega} -\frac{M_z}{I_z} y d\Omega = -\frac{M_z}{I_z} m_z^e(\Omega) \quad (8.7)$$

donde Ω es la parte de la sección sobre la que se evalúa dicha resultante (área rayada en la Figura 8.5) y $m_z^e(\Omega) = \int_{\Omega} y d\Omega$ es el momento estático de Ω respecto al eje z .

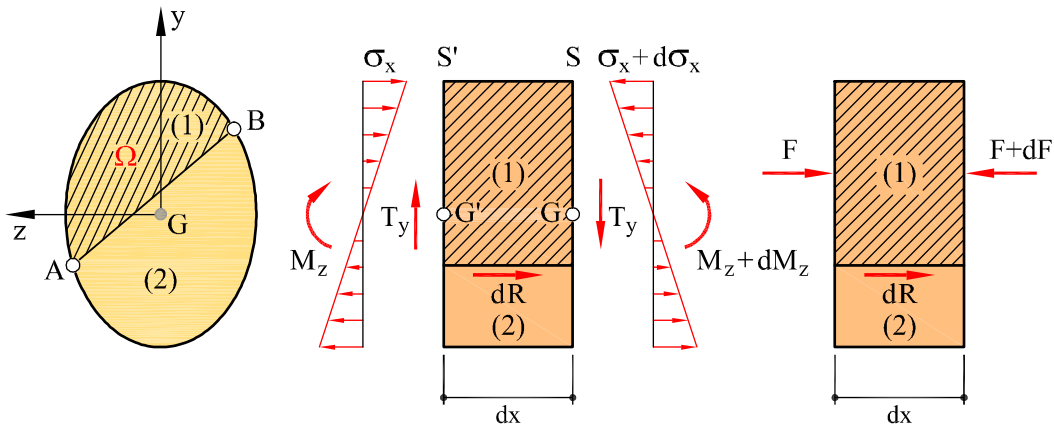


Fig. 8.5: Deducción de la fórmula de Collignon

De igual forma, sobre la cara S actúan unas tensiones normales debidas a la acción del momento $M_z + dM_z$, cuya resultante $F + dF$ vale:

$$F + dF = - \int_{\Omega} \frac{M_z + dM_z}{I_z} y \, d\Omega = - \frac{M_z + dM_z}{I_z} m_z^e(\Omega) \quad (8.8)$$

La diferencia entre ambas fuerzas normales es:

$$dF = - \frac{dM_z}{I_z} m_z^e(\Omega) \quad (8.9a)$$

$$= - \frac{T_y \, dx}{I_z} m_z^e(\Omega) \quad (8.9b)$$

donde se ha tenido en cuenta que $dM_z = T_y \, dx$.

Nótese que la expresión anterior es independiente del valor M_z del momento flector, y que sólo depende de dM_z , es decir, de la variación de dicho momento y, por lo tanto, del cortante T_y . Obsérvese también que, al ser el eje z un eje que pasa por el baricentro de la sección, el momento estático respecto a dicho eje del área rayada situada por encima de la línea AB es igual, y de signo contrario, que el momento estático del área situada por debajo de ésta.

Consideremos, por otro lado, las tensiones tangenciales que la parte de la rebanada (2), situada por debajo del plano de corte, ejerce sobre la parte (1) superior. Llamando dR a la resultante de estas tensiones tangenciales se puede escribir que

$$dR = dx \int_{AB} \tau \, dl \quad (8.10a)$$

$$\simeq dx \tau_{\text{med}} l_{AB} \quad (8.10b)$$

donde l_{AB} es la longitud del segmento \overline{AB} y τ_{med} queda definida como la tensión rasante *media* en la superficie $ABA'B'$.

El equilibrio de fuerzas según la dirección x del elemento diferencial (1) exige que $dR = |dF|$ (Figura 8.5) y, por tanto, igualando las ecuaciones (8.9b) y (8.10b), se tiene que:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{T_y m_z^e(\Omega)}{I_z l_{AB}} \quad (8.11)$$

La expresión anterior es conocida como *fórmula de Collignon* (1877), aunque este método aproximado de evaluar tensiones rasantes en vigas había sido ya utilizado por Jourawski en 1844 para calcular vigas de madera y vigas armadas con roblones, y publicado por éste en 1856. Obsérvese que dicha fórmula no proporciona el valor de la tensión rasante en un punto concreto, sino el valor *medio* de la tensión tangencial rasante a lo largo de la superficie de contacto.

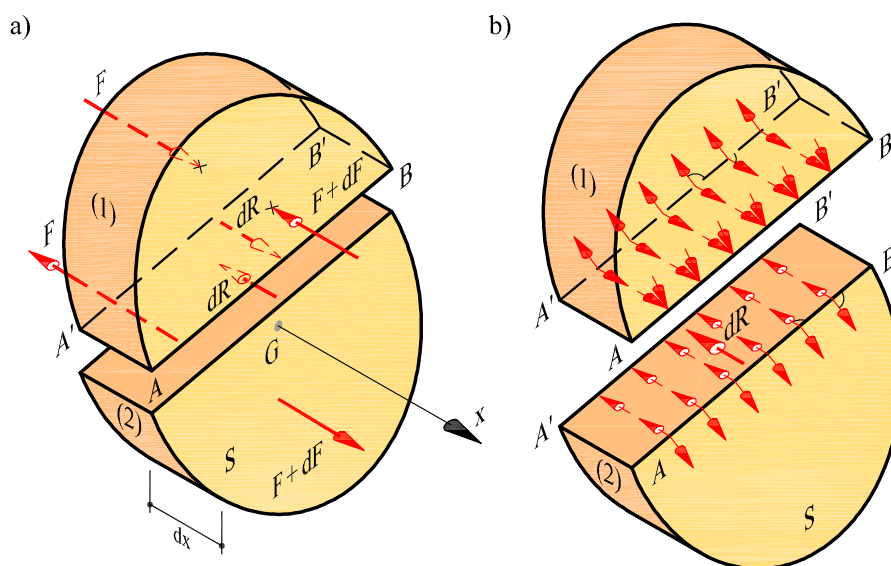


Fig. 8.6: Tensiones rasantes y tangenciales

Al considerar el equilibrio de fuerzas según el eje x que actúan sobre la parte inferior de la rebanada (2) que queda por debajo de dicha superficie de corte, se deduce que la fuerza rasante que la parte superior (1) ejerce sobre ésta es también de valor igual a dR , y de sentido contrario al que actúa sobre la parte superior (Figura 8.6a). Las tensiones rasantes en la superficie de corte de la parte inferior (2) son, obviamente, de igual valor y sentido contrario a las que actúan sobre la superficie de corte de la parte superior (1).

Por el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, junto a las tensiones rasantes, paralelas al eje de la pieza, que aparecen en la superficie $ABA'B'$, para equilibrar a dF aparecen otras contenidas en el plano de S (y de S'), cuya *componente normal* a la línea AB (y $A'B'$) será igual en cada punto a la correspondiente tensión tangencial contenida en la superficie plana $ABA'B'$. Estas tensiones rasantes sobre las secciones S y S' se muestran en la Figura 8.6b. Obsérvese que, según el principio de reciprocidad, ambas estarán dirigidas hacia la línea (hacia AB , en este caso) o se separarán de ella (como en $A'B'$, en este caso).

Por tanto, la fórmula de Collignon (8.11) nos permite hallar, por ser ambas iguales en módulo, tanto la tensión rasante media que actúa sobre la superficie $ABA'B'$ como la tensión tangencial media contenida en la sección S (y S'), a lo largo de \overline{AB} (y $\overline{A'B'}$) y normal a esta línea, debida al esfuerzo cortante. La misma observación permite determinar, sin ambigüedad, el sentido de estas tensiones cortantes.

De la fórmula fundamental se deduce que las tensiones tangenciales son nulas en los puntos más alejados del eje z , ya que para ambos se verifica que el momento estático correspondiente $m_z^e(\Omega)$ es nulo: en el punto superior por ser nula el área Ω , y en el inferior por ser Ω igual al área de la sección, y ser nulo el momento estático de la sección respecto a un eje baricéntrico como el eje z .

La importancia de los esfuerzos rasantes puede ponerse en evidencia mediante un experimento simple. Analicemos una viga simplemente apoyada, sometida a flexión simple, tal como la que se muestra en la Figura 8.7a. Imaginemos un corte longitudinal de la pieza según un plano horizontal AA' que divide la viga en dos partes: (1) la situada por encima del plano de corte y (2) la situada por debajo de éste. Al flectar la viga aparecen a lo largo de la superficie AA' unas tensiones tangenciales rasantes que impiden que la parte (1) deslice sobre la (2), y que hacen que la viga se comporte como una pieza única, tal como se muestra en la Figura 8.7b. Si el corte según AA' fuese real, y las partes (1) y (2) estuvieran simplemente superpuestas (sin rozamiento), estas tensiones rasantes no aparecerían, y el conjunto se comportaría de forma totalmente diferente, tal como se muestra en la Figura 8.7c.

Si se unen dos vigas superpuestas, y se desea que éstas trabajen solidariamente, aumentando así la resistencia a flexión de forma considerable (ver Ejemplo 6.2.5), se debe evitar el deslizamiento de una sobre la otra y posibilitar la aparición de las necesarias fuerzas rasantes. A tal efecto, deben unirse las partes componentes de las piezas mediante cuñas, tornillos pasantes o cualquier otro dispositivo que sea capaz de transmitir y resistir las fuerzas rasantes correspondientes.

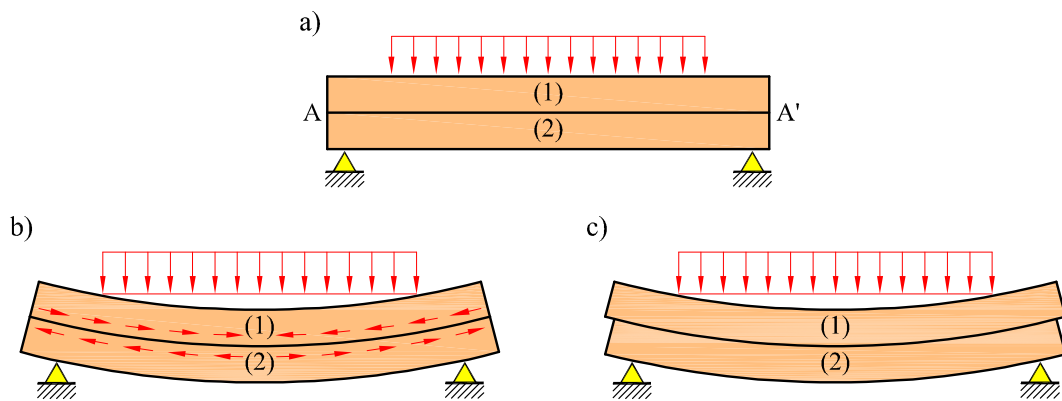


Fig. 8.7: Deformación de una viga sometida a flexión simple: (b) con tensiones rasantes y (c) sin tensiones rasantes

Ejemplo 8.3.1

La viga biapoyada de la Figura 8.8, de $l = 6$ m de luz, está sometida a una carga uniformemente repartida $p = 3$ kN/m. Se quiere construir a partir de tres piezas independientes de 40×10 cm², unidas mediante conectores, tal como se indica en la Figura 8.8. Dimensionar el diámetro de dichos conectores, sabiendo que se colocan a una distancia $d = 15$ cm de separación entre ellos, y que la tensión tangencial admisible en ellos es $\tau_{\text{adm}} = 200$ MPa.

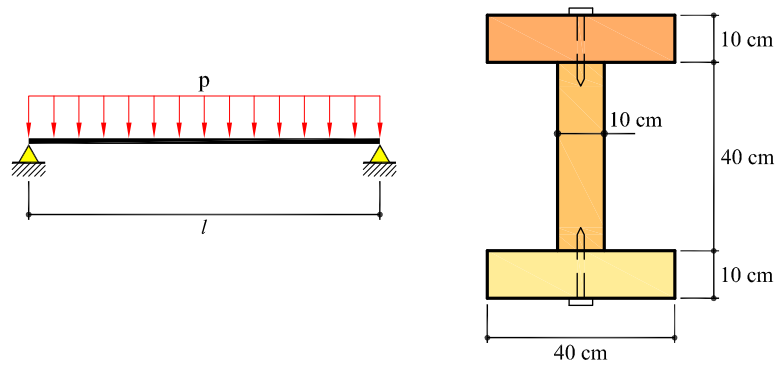


Fig. 8.8: Viga armada del Ejemplo 8.3.1

El cortante máximo en la viga se da en las secciones de apoyo y es igual a las reacciones verticales en éstos:

$$T_{\text{max}} = \frac{pl}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ kN}$$

La inercia de la sección respecto al eje baricéntrico horizontal vale:

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{12} 10 \cdot 40^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{12} 40 \cdot 10^3 + 40 \cdot 10 \cdot 25^2 \right) \right] \text{ cm}^4 \\ &= 56 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Según la fórmula de Collignon, la tensión rasante media sobre las superficies de contacto entre las alas y el alma de la sección es:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{T_{\text{max}} m^e(\Omega)}{I b}$$

donde $m^e(\Omega)$ es el momento estático del ala respecto del eje baricéntrico horizontal y b es el ancho de la superficie de contacto, o sea:

$$\begin{aligned} m^e(\Omega) &= 10 \cdot 40 \cdot 25 \text{ cm}^3 = 0,01 \text{ m}^3 \\ b &= 0,1 \text{ m} \end{aligned}$$

con lo que $\tau_{\text{med}} = 0,161 \text{ MPa}$. Cada conector de la zona de apoyos debe soportar una fuerza rasante de valor:

$$R = \tau_{\text{med}} b d = 0,161 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 0,15 \text{ N} = 2,42 \text{ kN}$$

Suponiendo ahora que la teoría elemental de la cortadura es aplicable al conector, se tiene que la tensión rasante en cada uno ellos es:

$$\tau_{\text{con}} = \frac{R}{A_{\text{con}}} \leq \tau_{\text{adm}}$$

de donde el área de cada conector resulta:

$$A_{\text{con}} \geq \frac{R}{\tau_{\text{adm}}} = \frac{2,42 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} \text{ m}^2 = 12,1 \text{ mm}^2$$

Si los conectores son de sección circular, se requiere un diámetro mínimo de $\phi = 4 \text{ mm}$.

Los cálculos anteriores proporcionan el diámetro mínimo de los conectores en las secciones próximas a los apoyos, donde el esfuerzo cortante es máximo. Dado que la variación del cortante es lineal a lo largo de la viga, con valores decrecientes a medida que nos acercamos al centro de la luz, es posible aumentar el espaciado de los conectores a medida que las tensiones rasantes disminuyen. Así, por ejemplo, en los 3 metros centrales de la viga, el cortante es inferior a $T = 4,5 \text{ kN}$ y es posible aumentar el espaciado a $d = 30 \text{ cm}$ sin que la tensión en los conectores supere la tensión admisible especificada.

8.4 Sección rectangular

Consideremos una viga de sección rectangular maciza de dimensiones $b \times h$ y determinemos, utilizando la teoría de Collignon, la tensión tangencial τ en un punto cualquiera de la sección recta, sometida a un esfuerzo cortante vertical de valor T .

Según el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, en puntos como A y A' del contorno de la sección (Figura 8.9) éstas deben estar dirigidas según dicho contorno, es decir, son verticales. Por simetría, en el punto M también debe serlo. Por

tanto, y como hipótesis simplificativa, admitiremos que en todo punto de la línea AA' las tensiones tangenciales son paralelas al esfuerzo cortante T , es decir, son verticales y que la distribución es uniforme a lo largo de la línea AA' . El sentido de las tensiones cortantes coincide obviamente con el del esfuerzo cortante. Entonces, el valor en cada punto coincide con el valor medio que proporciona la fórmula fundamental aplicada a la parte de sección situada por encima de la línea AA' . En este caso, tenemos $T_y = T$, $I_z = bh^3/12$ y $l = b$. El momento estático de la parte de sección situada por encima de la línea AA' puede calcularse en función de la ordenada y del corte y vale

$$m_z^e(y) = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (8.12)$$

Por tanto, sustituyendo los valores anteriores en la fórmula de Collignon se tiene:

$$\tau(y) \simeq \tau_{\text{med}}(y) = \frac{3 T}{2 bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad (8.13)$$

De esta expresión se deduce que la distribución de tensiones tangenciales en una sección rectangular sometida a esfuerzo cortante vertical es parabólica en función de la ordenada y , es nula en las fibras extremas ($y = \pm h/2$), y tiene su valor máximo en los puntos del eje z ($y = 0$) donde vale

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3 T}{2 bh} = \frac{3 T}{2 A} \quad (8.14)$$

Por consiguiente, la tensión tangencial máxima es un 50% mayor que la que se obtiene suponiendo una distribución uniforme de tensiones (Jourawski, 1844), tal como se obtendría de aplicar la teoría elemental de la cortadura. Cabe también señalar que se

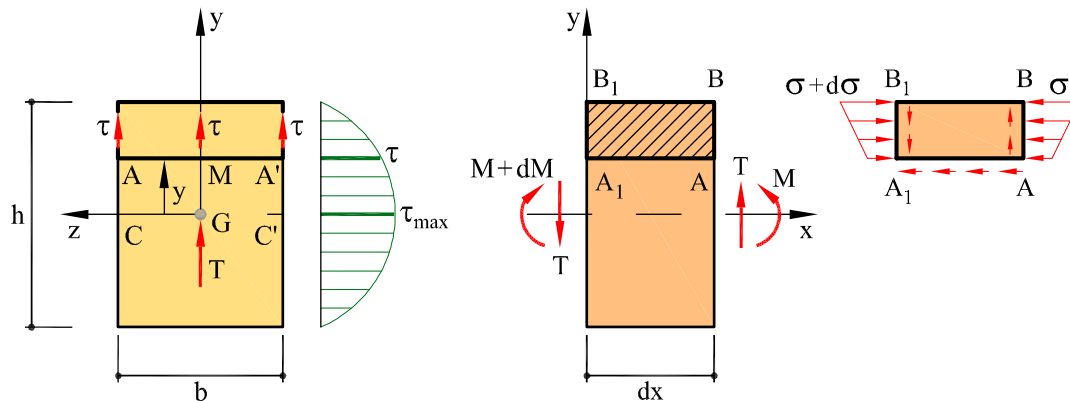


Fig. 8.9: Tensiones tangenciales y rasantes en sección rectangular

cumplen la relaciones integrales siguientes:

$$\begin{aligned} T_y &= \int_S \tau_{xy} dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] b dy = T \\ T_z &= \int_S \tau_{xz} dS \equiv 0 \end{aligned} \quad (8.15)$$

Los valores que proporciona la expresión (8.13) no son exactos, pero sí muy aproximados, tanto más cuanto mayor sea la relación h/b . Por ejemplo, si se calculan mediante la Teoría de la Elasticidad los valores exactos para los puntos del eje z ($y = 0$), se obtiene que la distribución no es uniforme a lo largo del eje, sino que hay un máximo en los puntos C y C' (Figura 8.9), y un mínimo en el punto G . Los factores de corrección que habría que aplicar respecto al valor τ_{\max} calculado aproximadamente se dan en la Tabla 8.1. Obsérvese lo cercano que el factor es a la unidad para $h/b > 1$.

	$h/b = 2$	$h/b = 1$	$h/b = 1/2$	$h/b = 1/4$
$z = 0$	0,983	0,940	0,856	0,805
$z = \pm b/2$	1,033	1,126	1,396	1,988

Tabla 8.1: Valores de corrección para tensiones tangenciales en el eje $y=0$

8.5 Secciones de pequeño espesor

8.5.1 Secciones abiertas

En las secciones de pequeño espesor abiertas, la teoría de la cortadura de Collignon permite determinar con mucha precisión la distribución de las tensiones tangenciales debidas al esfuerzo cortante, ya que se puede suponer sin gran error que la distribución de tensiones tangenciales es uniforme a través del espesor.

Sección en doble T

Estudiemos el caso de una sección en doble T simétrica sometida a un esfuerzo cortante T vertical ascendente (Figura 8.10a), y calculemos en primer lugar las componentes verticales de la tensión tangencial, τ_{xy} , y luego las componentes horizontales, τ_{xz} , que éste produce.

La componente vertical de la tensión tangencial τ_{xy} se calcula aplicando la fórmula de Collignon a cortes horizontales de la sección, tal como se muestra en la Figura 8.10b.

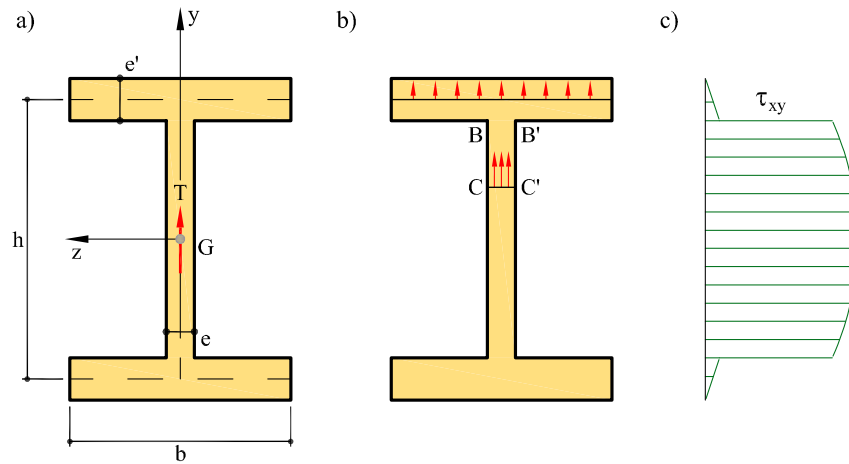


Fig. 8.10: Sección en doble T sometida a esfuerzo cortante según el alma. Tensiones tangenciales verticales

Entonces:

$$\tau_{xy} = \frac{T}{I_z} \frac{m_z^e}{l} \quad (8.16)$$

donde l es la “anchura” del corte. Se deduce, por tanto, que al pasar del ala al alma, el valor de τ_{xy} experimenta una fuerte discontinuidad, ya que l pasa de ser $l = b$ en el ala, a ser $l = e$ en el alma (ver Figura 8.10b). Dado que el espesor es pequeño, $e \ll b$, en las alas la tensión cortante vertical es despreciable frente a la del alma y el alma absorbe prácticamente en su totalidad el esfuerzo cortante vertical T .

En el alma, τ_{xy} varía como lo hace $m_z^e(y)$, en función de la ordenada y . Esta variación es parabólica y simétrica (Figura 8.10c):

$$m_z^e(y) = be' \frac{h}{2} + \left(\frac{h}{2} - y \right) e \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = be' \frac{h}{2} + \frac{e}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (8.17)$$

El valor mínimo de las tensiones verticales en el alma (Figura 8.10b) se da en los puntos extremos de ésta, B y B' , para $y = \pm h/2$, y vale

$$\tau_{xy}^{\min} = \frac{T}{I_z} \frac{1}{e} \left(be' \frac{h}{2} \right) \quad (8.18)$$

mientras que el valor máximo se da a la altura del baricentro, G , para $y = 0$, y vale

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{T}{I_z} \frac{1}{e} \left(be' \frac{h}{2} + \frac{e}{2} \frac{h^2}{4} \right) \quad (8.19)$$

La diferencia entre los valores mínimos (en B y B') y máximo (en G) de la parábola es pequeña para los perfiles normalizados. En este caso, puede considerarse que la distribución de tensiones tangenciales verticales es uniforme en el alma, con un valor de:

$$\tau_{xy} \simeq \tau_{xy}^{\text{med}} = \frac{T}{\Omega_{\text{alma}}} \quad (8.20)$$

donde $\Omega_{\text{alma}} = he$ es el área del alma. Esta aproximación implica errores menores del 10 % en los valores máximos para perfiles normalizados, *por defecto*. El sentido de las tensiones tangenciales τ_{xy} en el alma coincide, naturalmente, con el del esfuerzo cortante T .

Por tanto, las tensiones verticales τ_{xy} en las alas son despreciables, pero no así las componentes horizontales τ_{xz} , que pueden calcularse de forma análoga a las anteriores, aplicando la fórmula de Collignon a cortes verticales de la sección (Figura 8.11). Entonces:

$$\tau_{xz} = \frac{T m_z^e(s)}{I_z e'} \quad (8.21)$$

donde $m_z^e(s) = se'h/2$ es el momento estático del área rayada $AABB$ respecto al eje

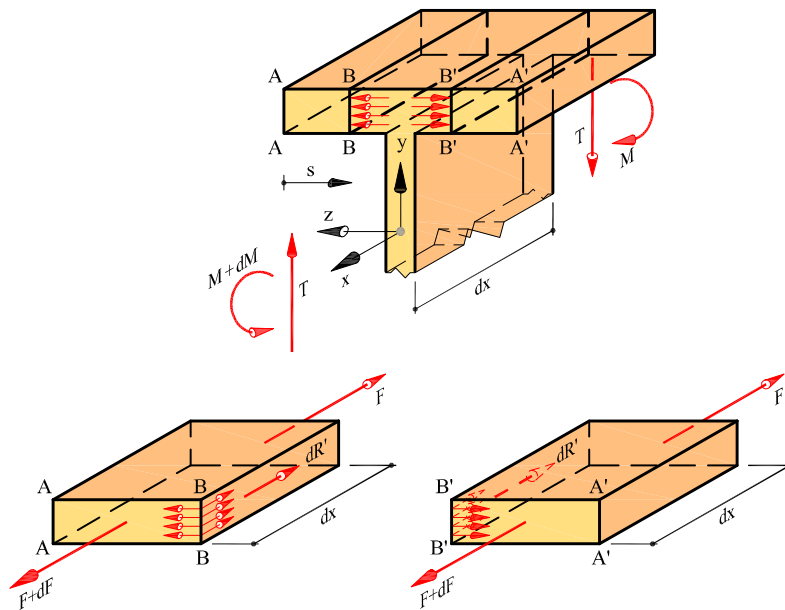


Fig. 8.11: Sección en doble T sometida a cortante. Tensiones tangenciales horizontales

z . Admitiremos, por ser el espesor pequeño, que las tensiones a lo largo de BB son paralelas y uniformes. Siendo T , I_z y e' constantes y variando $m_z^e(s)$ linealmente con s , la distribución de tensiones tangenciales en las alas será lineal, con valor nulo en los extremos. El sentido de las τ_{xz} se determina sin ambigüedad por consideraciones de equilibrio, tal y como se muestra en las Figuras 8.11 y 8.12.

La Figura 8.12 muestra las fuerzas rasantes diferenciales en el punto de unión del ala superior con el alma. Debe cumplirse, por equilibrio de fuerzas en la dirección del eje x , que:

$$dR = 2dR' \quad (8.22)$$

donde dR es la fuerza rasante en el extremo superior del alma y dR' es cada una de las fuerzas rasantes en las alas, y que son iguales entre sí por simetría de la sección y antisimetría de la sollicitación respecto del eje y . Se tiene:

$$\tau_{\text{alma}} e dx = 2 \tau_{\text{ala}} e' dx \quad (8.23)$$

siendo τ_{alma} y τ_{ala} las tensiones tangenciales en el alma y en las alas en el punto de unión, respectivamente. Por tanto, por equilibrio se debe cumplir la siguiente relación

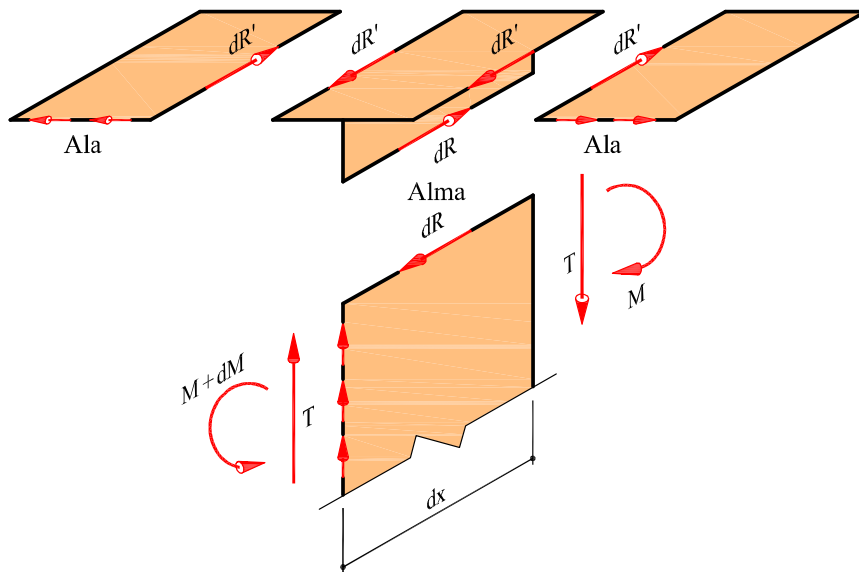


Fig. 8.12: Sección en doble T sometida a cortante. Sentidos de las tensiones tangenciales y rasantes

entre ambos valores:

$$\frac{\tau_{\text{alma}}}{\tau_{\text{ala}}} = \frac{2e'}{e} \quad (8.24)$$

La distribución final de tensiones tangenciales (con sus correspondientes sentidos) se muestra en la Figura 8.13. En el ala inferior las tensiones tangenciales son antisimétricas de las del ala superior, por simetría de la sección y antisimetría de la sollicitación respecto del eje z . Se observa en ella que, según las aproximaciones realizadas, se cumple que la dirección de la tensión tangencial en un punto de la sección depende de la forma de la sección, y no de la dirección del esfuerzo cortante, según se adelantó al principio del presente apartado.

Puede comprobarse también que la distribución de tensiones hallada satisface las ecuaciones de equilibrio interno. Llamemos R y V a las resultantes de las tensiones tangenciales en las alas y en el alma, respectivamente; su valor puede calcularse fácilmente hallando el área de los diagramas de tensiones tangenciales y multiplicando por el espesor correspondiente. En el alma, la resultante V vale:

$$V = \frac{T}{I_z e} \left(be' \frac{h}{2} + \frac{2e}{3} \frac{h^2}{4} \right) h e \quad (8.25a)$$

$$= \frac{T}{I_z} \left(\frac{be'h^2}{2} + \frac{eh^3}{12} \right) \quad (8.25b)$$

$$= T \quad (8.25c)$$

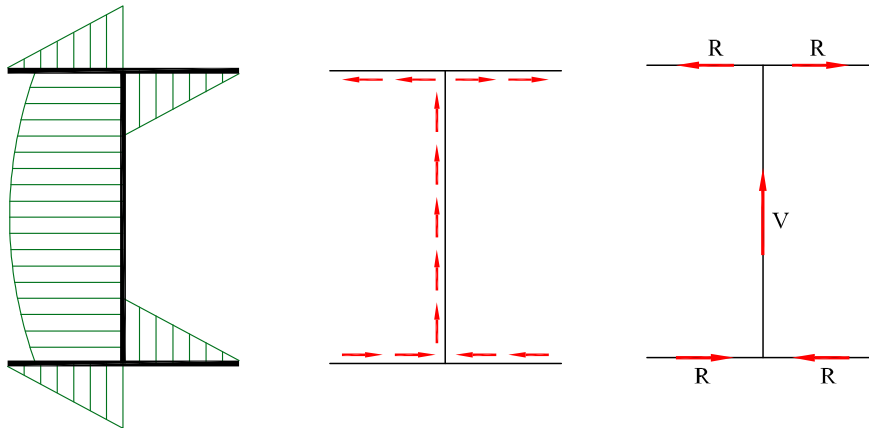


Fig. 8.13: Distribución de tensiones tangenciales y fuerzas rasantes en sección en doble T sometida a esfuerzo cortante

ya que el momento de inercia del perfil, despreciando el momento de inercia propio de las alas, vale:

$$I_z \simeq \frac{be'h^2}{2} + \frac{eh^3}{12} \quad (8.26)$$

Por otra parte, es obvio, por simetría, que la resultante total de las tensiones tangenciales horizontales en las alas es nula, como corresponde al hecho de que $T_z = 0$.

Sección en U

Consideremos una viga de sección en U, sometida a esfuerzo cortante T de dirección paralela a su alma y de sentido ascendente. Sea h la altura del perfil y b la anchura de las alas, e' el espesor de las alas y e el espesor del alma. Utilizando razonamientos análogos a los usados en la Sección anterior, la tensión tangencial debida al cortante T en el punto B del ala superior (Figura 8.14b) se puede calcular como:

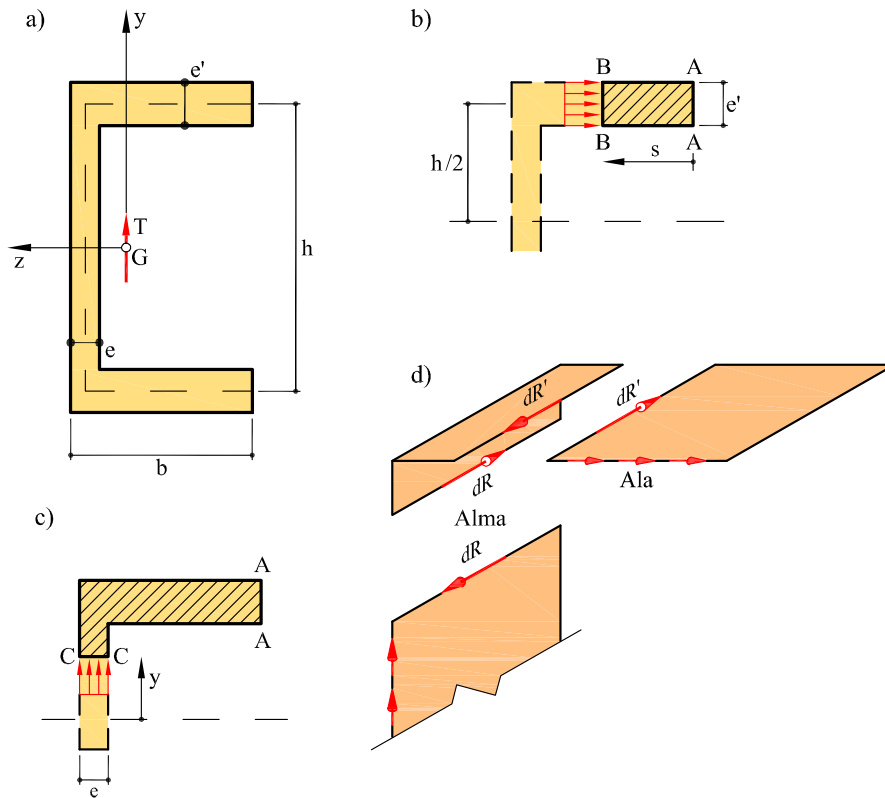


Fig. 8.14: Sección en U sometida a cortante

$$\tau(s) = \frac{T m_z^e(s)}{I_z e'} \quad (8.27)$$

con $m_z^e(s) = se'h/2$ para $e' \ll h$. En consecuencia:

$$\tau_{xz}(s) = \frac{T sh}{I_z 2} \quad (8.28)$$

Se observa que las tensiones tangenciales a lo largo del ala varían linealmente desde un valor nulo en el extremo A hasta un valor máximo en la unión con el alma igual a:

$$\tau(s = b) = \frac{T bh}{I_z 2} \quad (8.29)$$

El sentido de las tensiones tangenciales viene dado por el equilibrio de las fuerzas normales que actúan sobre el área rayada y las fuerzas rasantes, tal como se indica en la Figura 8.14d.

La misma expresión se obtiene para el ala inferior, salvo que las tensiones rasantes y cortantes tienen sentido contrario a las del ala superior.

Si deseamos calcular las tensiones tangenciales en el alma, por ejemplo en un punto C situado a una distancia y por encima del eje z , el momento estático en este caso es:

$$m_z^e(y) = be' \frac{h}{2} + e \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) \quad (8.30)$$

luego:

$$\tau(y) = \frac{Tbe'h}{2I_z e} + \frac{Th^2}{8I_z} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad (8.31)$$

Como puede deducirse de la expresión anterior, la variación de las tensiones tangenciales en el alma es simétrica y parabólica, con un valor máximo en el eje z ($y = 0$) que es igual a:

$$\tau_{xy}^{\max} = \tau_{xy}(y = 0) = \frac{Tbe'h}{2I_z e} + \frac{Th^2}{8I_z} \quad (8.32)$$

Llamemos R y V a las resultantes de las tensiones tangenciales en las alas y en el alma, respectivamente (Figura 8.15); su valor puede calcularse fácilmente hallando el área de los diagramas de tensiones tangenciales y multiplicando por el espesor correspondiente. En el alma, la resultante V vale:

$$V = \frac{Tbe'h^2}{2I_z} + \frac{Teh^3}{12I_z} \quad (8.33a)$$

$$= \frac{T}{I_z} \left(\frac{be'h^2}{2} + \frac{eh^3}{12} \right) \quad (8.33b)$$

$$= T \quad (8.33c)$$

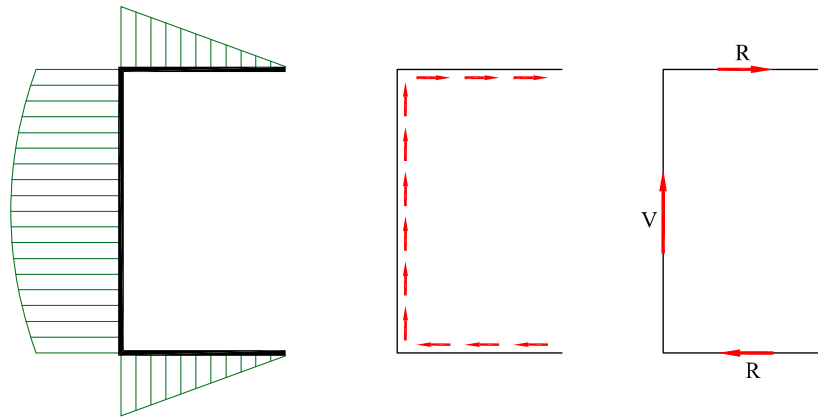


Fig. 8.15: Distribución de tensiones tangenciales en sección en U sometida a cortante

ya que el momento de inercia del perfil, despreciando el momento de inercia propio de las alas, vale:

$$I_z \simeq \frac{be'h^2}{2} + \frac{eh^3}{12} \quad (8.34)$$

Se observa que el alma toma enteramente el esfuerzo cortante, con contribución despreciable de las alas, que, sin embargo, están sometidas a tensiones tangenciales horizontales. Las resultantes de estas tensiones en las alas, R , deben ser iguales y de sentidos opuestos, por equilibrio, ya que $T_z = 0$.

8.5.2 Secciones cerradas

El problema general de determinar la distribución de tensiones tangenciales producidas por un esfuerzo cortante en una sección cerrada de pequeño espesor es hiperestático, dado que no se puede determinar el valor de las tensiones tangenciales, a lo largo de un único corte a través del espesor, utilizando sólo consideraciones de equilibrio.

Secciones cerradas simétricas

En el caso particular de que la sección sea simétrica respecto del eje de actuación del esfuerzo cortante, la distribución de tensiones tangenciales sí puede determinarse fácilmente utilizando la fórmula de Collignon.

En este caso, por simetría, las tensiones rasantes sobre el plano de simetría deben ser nulas. Recíprocamente, la tensiones tangenciales en cortes de la sección situados

sobre el eje de simetría deben ser nulas. Por tanto, a efectos de cálculo, la sección puede considerarse como dos medias secciones abiertas, trabajando de forma yuxtapuesta.

Tomemos, por ejemplo, la sección tubular rectangular de la Figura 8.16a, de canto h y ancho $2b$, sometida a esfuerzo cortante ascendente de valor T . Dada la simetría de la sección y de la sollicitación, puede analizarse como se muestra en la Figura 8.16b, esto es, como dos secciones en U , de canto h y ancho b , trabajando yuxtapuestas y soportando un cortante mitad $T/2$ cada una de ellas. La distribución de tensiones sobre cada una de ellas es análoga a la mostrada en la Figura 8.15. Obsérvese que las tensiones tangenciales sobre el eje de simetría son nulas.

Análogamente se puede analizar la sección tubular rectangular bicelular de la Figura 8.16c, de canto h y ancho $4b$, sometida a esfuerzo cortante ascendente de valor T . Obsérvese que el alma central tiene doble espesor que las almas laterales. Dada la

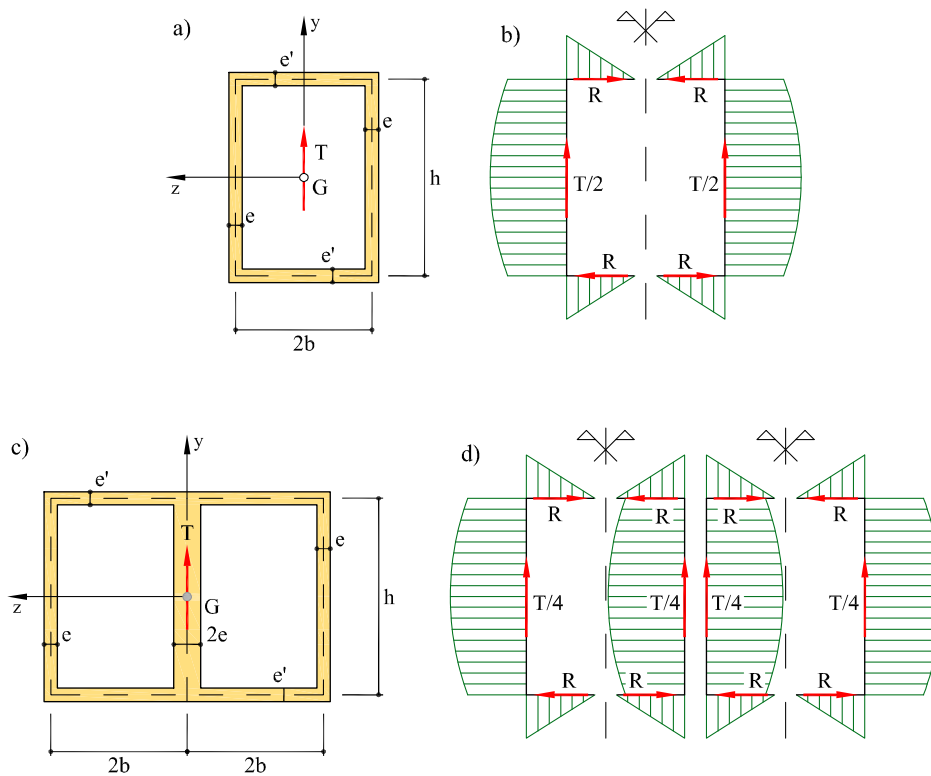


Fig. 8.16: Secciones cerradas simétricas sometidas a esfuerzos cortantes según el eje de simetría

simetría de la sección y de la sollicitación, puede analizarse como se muestra en la Figura 8.16d, esto es, como cuatro secciones en U , de canto h y ancho b , trabajando yuxtapuestas y soportando un cortante mitad $T/4$ cada una de ellas.

8.6 Centro de esfuerzos cortantes

De forma implícita, se ha supuesto en todos los desarrollos anteriores que la línea de acción del esfuerzo cortante pasa por el centro de gravedad de la sección. De hecho, la posición de dicho esfuerzo sobre el plano de la sección no ha desempeñado ningún papel en las consideraciones de equilibrio utilizadas para obtener la fórmula de Collignon y, por lo tanto, la distribución correspondiente de tensiones tangenciales (valores medios y sentidos) debidas a la flexión simple. Sin embargo, es necesario plantearse, *a posteriori*, si la resultante de dicha distribución pasa siempre por el centro de gravedad de la sección. Veremos a continuación que, en general, esto no es así y, por tanto, es necesario introducir el concepto de *centro de esfuerzos cortantes de la sección*, como punto de aplicación de la resultante de las tensiones tangenciales provenientes de la flexión simple.

Consideremos un voladizo con sección en U , simétrica respecto al eje z (principal de inercia), sometido a un esfuerzo cortante constante a lo largo de la pieza, de valor T_y , vertical ascendente, cuya línea de acción pasa por un punto C situado a una distancia d del punto O , centro de gravedad del alma. Sea h la altura del perfil y b la anchura de las alas, e' el espesor de las alas y e el espesor del alma (Figuras 8.17a y b).

La distribución de tensiones tangenciales que produce un cortante vertical sobre un perfil de este tipo se estudió detalladamente en el Apartado 8.5.1, y se muestra en la Figura 8.17c. Consiste en una distribución lineal de tensiones horizontales sobre las alas y una distribución parabólica de tensiones verticales sobre el alma. Llamaremos R y R' a las resultantes de las tensiones sobre el ala superior e inferior, respectivamente, y V a la resultante de las tensiones sobre el alma. Para que se cumplan las ecuaciones de equilibrio interno, el sistema formado por las fuerzas R , R' y V (Figura 8.17d) debe ser estáticamente equivalente del formado por el esfuerzo cortante actuando sobre el punto C , que se muestra en la Figura 8.17b. Para ello, debe cumplirse que:

- (a) Las resultantes R y R' de las tensiones tangenciales en las alas deben ser iguales y de sentidos opuestos, ya que $T_z = 0$. Su valor puede calcularse como:

$$R = R' = \frac{1}{2} \frac{T_y (be' \frac{h}{2})}{I_z e'} be' = \frac{T_y b^2 h e'}{4 I_z} \quad (8.35)$$

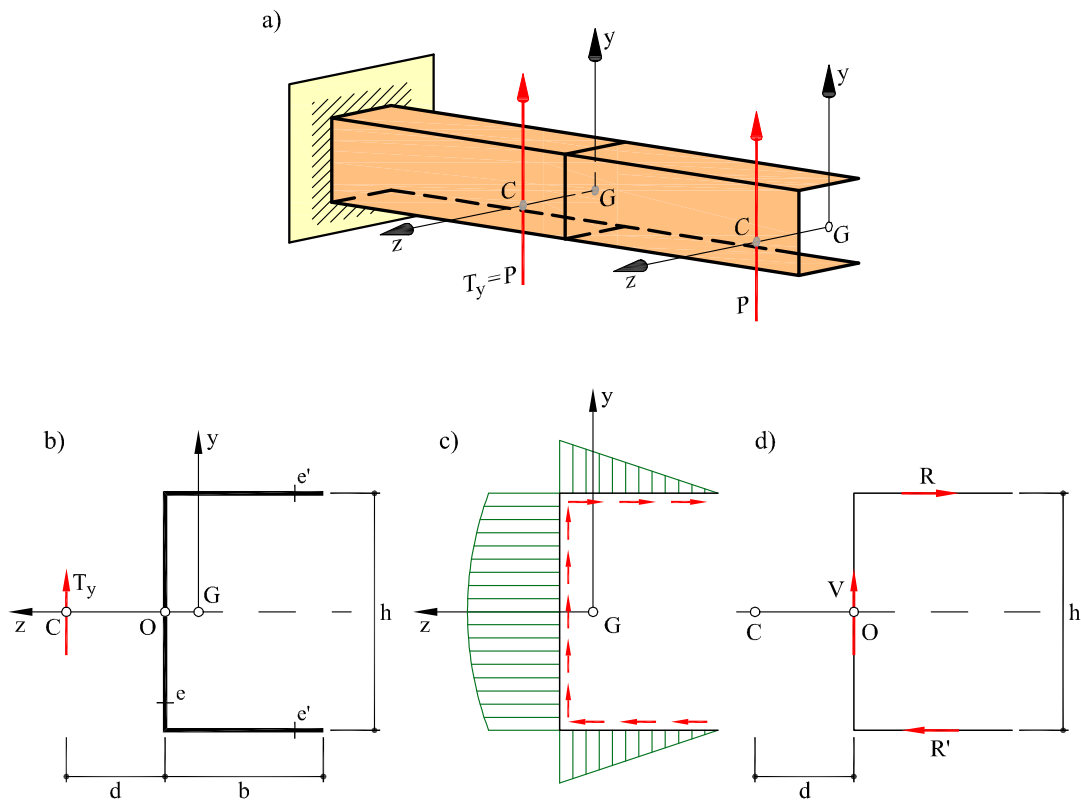


Fig. 8.17: Centro de esfuerzos cortantes de una sección U

- (b) La resultante V de las tensiones tangenciales sobre el alma es igual al cortante T_y , $V = T_y$, según se comprobó en la Sección 8.5.1.
- (c) Además, por ser los esfuerzos sobre la sección iguales a las fuerzas y los momentos resultantes de las tensiones, el momento de las tensiones respecto a cualquier punto debe ser igual al producido por el esfuerzo cortante T_y . Tomando momentos respecto al punto O , debe ser:

$$T_y d = R \frac{h}{2} + R' \frac{h}{2} = R h \quad (8.36)$$

de donde:

$$d = \frac{R h}{T_y} = \frac{b^2 h^2 e'}{4 I_z} \quad (8.37)$$

En conclusión, el sistema de tensiones tangenciales calculado es estáticamente equivalente al esfuerzo cortante T_y que actúa sobre la sección *solamente si éste pasa por el*

punto C . Se observa además que la posición del punto C sólo depende de la geometría de la sección, y no del valor del cortante actuante T_y . Es, por tanto, una característica geométrica de la sección.

Como proposición general podemos enunciar que *existe siempre un punto en el plano de la sección por el que pasa la resultante de las tensiones tangenciales debidas a la flexión simple (es decir, del esfuerzo cortante)*. Dicho punto es característico de la geometría de la sección y se conoce con el nombre de *centro de esfuerzos cortantes de la sección*. El concepto de centro de esfuerzos cortantes y el método para calcularlo se deben a R. Maillart (1922).

La introducción del concepto de centro de esfuerzos cortantes obliga a reconsiderar la definición del momento torsor reducido al centro de gravedad de la sección, tal como se introdujo en el Capítulo 3. Consideremos una sección solicitada por un sistema de esfuerzos que consiste en un momento flector \mathbf{M} , un esfuerzo cortante \mathbf{T} y un momento torsor \mathbf{M}_t , reducidos al centro de gravedad de la sección, tal como se muestra en la Figura 8.18. El sistema de fuerzas formado por \mathbf{T} y \mathbf{M}_t , reducidos al centro de gravedad G (Figura 8.18a), es estáticamente equivalente al sistema formado por \mathbf{T} y \mathbf{M}_t^* , reducidos al centro de esfuerzos cortantes C (Figura 8.18b), con:

$$\mathbf{M}_t^* = \mathbf{M}_t + \overrightarrow{CG} \times \mathbf{T} \quad (8.38a)$$

$$= \int_S \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} dS + \overrightarrow{CG} \times \int_S \boldsymbol{\tau} dS \quad (8.38b)$$

$$= \int_S (\mathbf{r} + \overrightarrow{CG}) \times \boldsymbol{\tau} dS \quad (8.38c)$$

$$= \int_S \mathbf{r}_c \times \boldsymbol{\tau} dS \quad (8.38d)$$

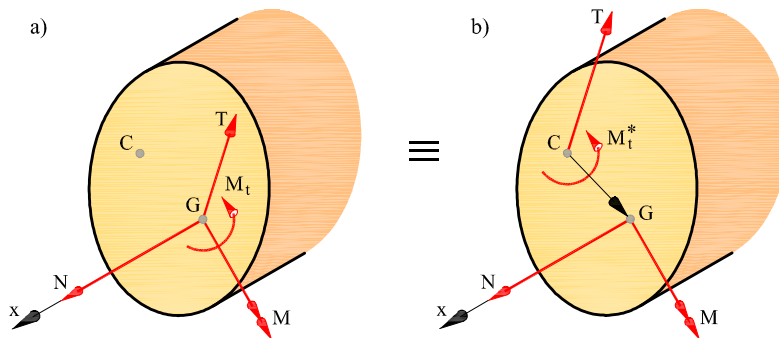


Fig. 8.18: Reducción de esfuerzos al centro de esfuerzos cortantes

donde τ es la tensión tangencial, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(y, z)$ es el vector de posición de un punto genérico de la sección respecto a G , y $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c(y - y_c, z - z_c)$ es el correspondiente vector de posición respecto al centro C , de coordenadas $C(y_c, z_c)$ (Figura 8.19).

Se comprueba, por tanto, que M_t^* (en módulo) es el momento resultante de las tensiones tangenciales totales *respecto al centro de cortantes*. En consecuencia, la existencia o no del fenómeno de torsión, tal como se estudiará en el próximo Capítulo, y de tensiones tangenciales asociadas a ésta, depende del valor del momento M_t^* , reducido al centro de esfuerzos cortantes, y no del valor de M_t (en módulo), reducido al centro de gravedad. Es por esta razón que M_t^* recibe el nombre de *momento torsor real*, y al centro de esfuerzos cortantes se le llama también *centro de torsión*.

Entonces, hecha la reducción del momento torsor al centro de esfuerzos cortantes, pueden resultar tres casos:

- (a) $T = 0$ y $M_t = M_t^* \neq 0$. La sección está solicitada únicamente a *torsión* o a *torsión y flexión pura* (el cortante es nulo) y las tensiones tangenciales son las debidas únicamente al momento torsor.
- (b) $T \neq 0$ y $M_t^* = 0$. La sección está solicitada únicamente a *flexión simple* y las tensiones tangenciales son las debidas únicamente a T pasando por el punto C .
- (c) $T \neq 0$ y $M_t^* \neq 0$. La sección está solicitada a *flexo-torsión* y las tensiones tangenciales totales serán las debidas a flexión (estáticamente equivalentes al esfuerzo cortante T pasando por el punto C) y a torsión (equivalentes al momento torsor M_t^*).

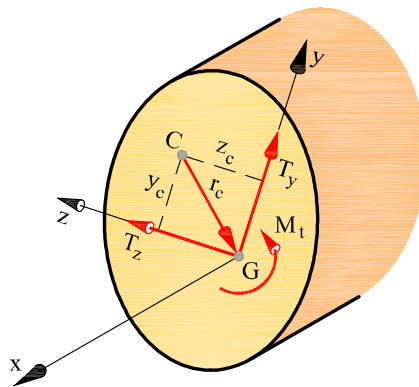


Fig. 8.19: Coordenadas del centro de esfuerzos cortantes

En conclusión, es necesario conocer la posición del centro de esfuerzos cortantes para poder definir el momento torsor real actuante sobre la sección. En particular, es necesario saber en qué secciones éste no coincide con el centro de gravedad, ya que éstas pueden estar sometidas de forma inadvertida a flexo-torsión.

Como ejemplo, veamos qué le ocurre al voladizo de sección en U con el que hemos empezado la discusión, según por donde pase la línea de acción de la carga en su extremo (y , por tanto, del esfuerzo cortante). En la Figura 8.20a el cortante pasa por el centro de esfuerzos cortantes C y, en ausencia de un momento torsor $M_t^* = M_t = 0$, la sección está sometida únicamente a flexión (por esta razón, el centro de esfuerzos cortantes recibe también el nombre de *centro de flexión*). En la Figura 8.20b el cortante no pasa por C y, por lo tanto, la sección está sometida a flexo-torsión, con un momento torsor real $M_t^* = T d$, antihorario, que provoca un giro de torsión del sentido indicado en la figura. En la Figura 8.20c ocurre lo mismo, pero con un momento torsor de sentido horario, opuesto al de la figura anterior. Este sería el caso, por ejemplo, debido a las cargas de peso propio, ya que entonces la línea de acción de T pasaría por el centro de gravedad de la sección. Por tanto, una pieza de sección en U , trabajando bajo la acción de su propio peso según su plano principal de inercia mayor, está sometida a torsión.

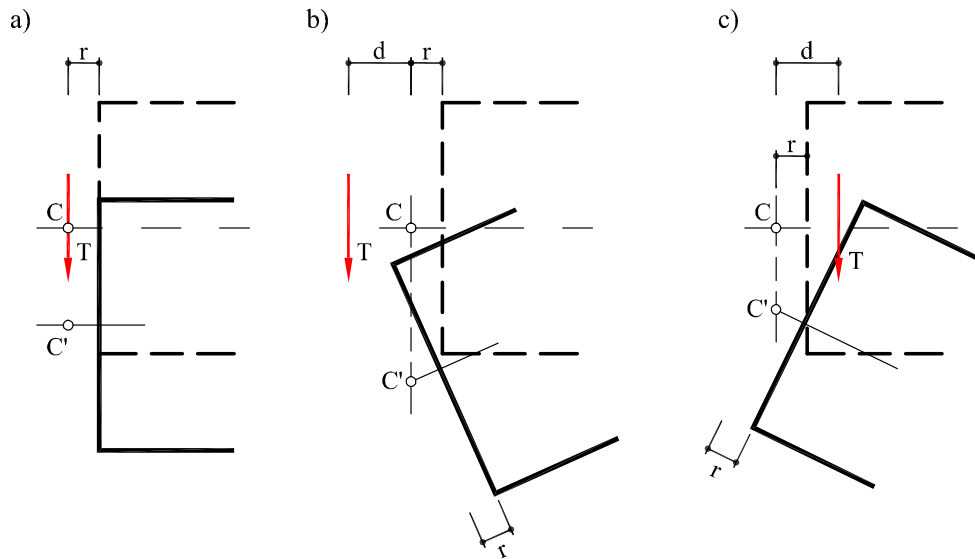


Fig. 8.20: Voladizo con sección en U sometido a esfuerzo cortante según diversas líneas de acción

8.6.1 Posición del centro de esfuerzos cortantes

La posición del centro de esfuerzos cortantes C se determina directamente a partir de su definición, es decir, su posición es tal que un esfuerzo cortante de dirección cualquiera, supuesto aplicado en C es estáticamente equivalente al sistema de fuerzas resultante de las tensiones tangenciales debidas a dicho esfuerzo cortante. En particular, el momento de un esfuerzo cortante de dirección cualquiera, supuesto aplicado en C , respecto a un punto arbitrario O de la sección debe ser igual al momento resultante de las tensiones tangenciales debidas a dicho esfuerzo cortante, respecto al punto O (ver Figura 8.21). Es decir:

$$\overrightarrow{OC} \times \mathbf{T} = \int_S \mathbf{r}_o \times \boldsymbol{\tau} dS \quad (8.39)$$

En general, ésta es una ecuación escalar con dos incógnitas: las dos coordenadas del punto C en el plano de la sección. Por tanto, para resolverla hay que plantearla dos veces, para cortantes \mathbf{T} actuando según dos direcciones distintas. Es habitual plantearla para cortantes actuando según los dos ejes principales de inercia de la sección, ya que esto reduce los dos casos a estudiar a sendos problemas de cortante recto (no esviado).

Cuando la sección tiene un eje de simetría, el centro de cortantes está en dicho eje, por simetría, con lo que se reduce a una la coordenada incógnita del centro de cortantes. Tal es el caso, por ejemplo, de la sección en U estudiada anteriormente, donde la posición del centro de esfuerzos cortantes se ha calculado planteando exactamente la igualdad de momentos de la ecuación (8.39). Si la sección tiene dos o más ejes de simetría, el centro de esfuerzos cortantes está necesariamente en la intersección de dichos ejes y coincide

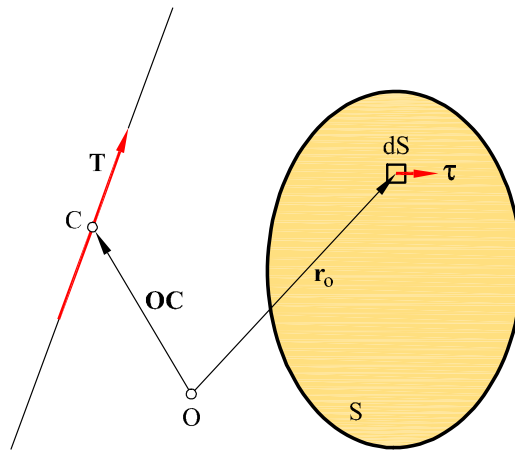


Fig. 8.21: Determinación de la posición del centro de esfuerzos cortantes

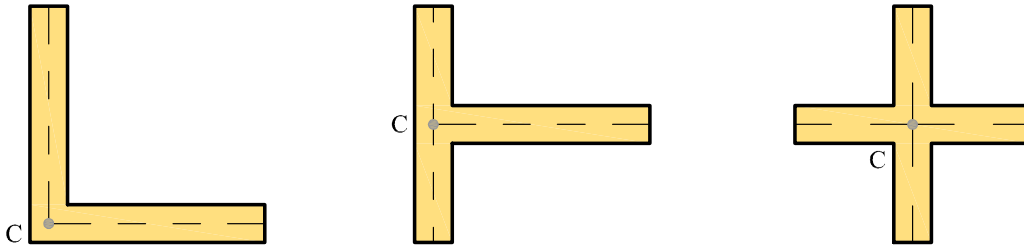


Fig. 8.22: Posición del centro de esfuerzos cortantes en algunas secciones particulares

con el centro de gravedad. Tal es el caso, por ejemplo, de las secciones rectangulares o circulares, así como el de las secciones simétricas en doble T .

En las secciones abiertas de pequeño espesor formadas por tramos rectos que concurren en un punto, tales como las que se muestran en la Figura 8.22, dicho punto es necesariamente el centro de esfuerzos cortantes, al ser nula la suma de momentos, respecto de dicho punto, de las tensiones tangenciales que un esfuerzo cortante arbitrario produce sobre la sección.

Ejemplo 8.6.1

Se dimensiona el voladizo de la Figura 8.23 para una carga vertical descendente uniformemente repartida de valor $p = 5 \text{ kN/m}$, atendiendo exclusivamente a que las tensiones normales no excedan el valor de la tensión admisible, $\sigma_{\text{adm}} = 250 \text{ MPa}$. Se pide: (a) Calcular la distribución de tensiones normales y comprobar que no se excede el valor admisible. (b) Dibujar la distribución de tensiones tangenciales debidas al cortante y calcular el valor máximo en la pieza. (c) Calcular y dibujar la posición del centro de esfuerzos cortantes.

Datos: $A = 119,28 \text{ cm}^2$, $z'_G = -4,356 \text{ cm}$, $I_z = 22\,669 \text{ cm}^4$

(a) Las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes debidas a la carga p son:

$$M(x) = \frac{1}{2}px^2 \quad ; \quad T(x) = px$$

con valores máximos en la sección del empotramiento ($x = 10 \text{ m}$) de valor:

$$M_{\text{max}} = 5 \cdot \frac{10^2}{2} = 250 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad T_{\text{max}} = 5 \cdot 10 = 50 \text{ kN}$$

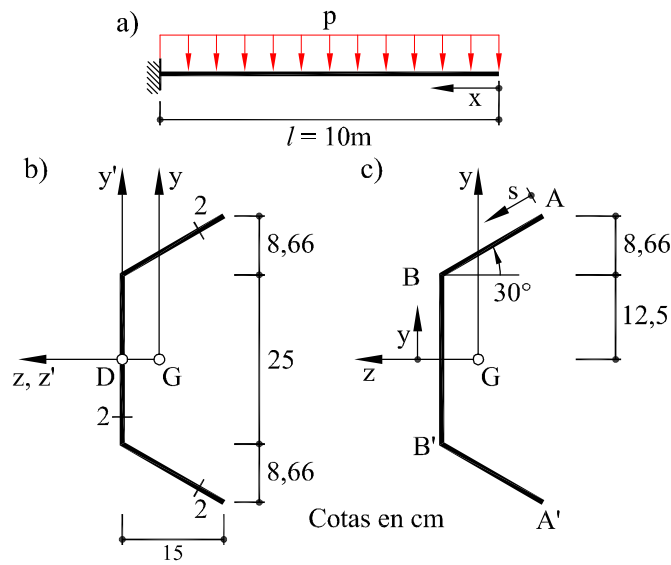


Fig. 8.23: Voladizo del Ejemplo 8.6.1

Las tensiones normales máximas en la sección de empotramiento pueden calcularse mediante la fórmula siguiente:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z v}{I_z} = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot (12,5 + 8,66) \cdot 10^{-2}}{2,2669 \cdot 10^{-4}} \text{ Pa} = 233,4 \text{ MPa} < \sigma_{\text{adm}}$$

(b) La distribución de tensiones tangenciales puede obtenerse aplicando la fórmula de Collignon:

$$\tau(s) = \frac{T_y m_z^e(s)}{I_z e}$$

En el ala superior, el valor del momento estático m_z^e , en función de la coordenada s (Figura 8.23b) es igual a:

$$m_z^e(s) = e s \left(12,5 + 8,667 - \frac{s}{2} \sin 30^\circ \right) = 42,33 s - 0,5 s^2 \text{ cm}^3$$

Por tanto, en el punto A la tensión tangencial es nula, $\tau_A = 0$. En el punto B ($s = 17,32 \text{ cm}$) el valor del momento estático es igual a $m_z^e = 583,2 \text{ cm}^3$ y, por consiguiente, la tensión tangencial en dicho punto es:

$$\tau_B = \frac{T_y \cdot 583,2 \cdot 10^{-6}}{2,2669 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 128,6 T_y \text{ Pa}$$

con T_y en Newtons. Reemplazando en la expresión anterior el valor del esfuerzo cortante T_y por $T_{\max} = 50$ kN se obtiene $\tau_B = 6,43$ MPa. Por simetría de la sección y antisimetría de la solicitación, las tensiones en el ala inferior son $\tau_A = \tau_{A'} = 0$ y $\tau_B = \tau_{B'} = 6,43$ MPa. Los sentidos de las tensiones en las alas son los de la Figura 8.24b, tal y como puede deducirse por sencillas consideraciones de equilibrio.

En el alma, el momento estático respecto al eje z puede calcularse en función de la coordenada y del corte (Figura 8.23b):

$$m_z^e(y) = 583,2 + (12,5 - y) e \frac{1}{2} (12,5 + y) = 739,45 - y^2 \text{ cm}^3$$

y el valor máximo del mismo, para el punto D ($y = 0$ cm), es $m_z^e(y = 0) = 739,5 \text{ cm}^3$; la tensión tangencial en dicho punto es:

$$\tau_D = \frac{T_y \cdot 739,45 \cdot 10^{-6}}{2,2669 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 163,1 T_y \text{ Pa}$$

con T_y en Newtons. Para el esfuerzo cortante $T_{\max} = 50$ kN resulta igual a $\tau_D = 8,155$ MPa.

Observar lo reducido del valor de las tensiones tangenciales debidas al cortante frente a las tensiones normales debidas al momento flector.

(c) Al ser la sección simétrica respecto al eje z , el centro de esfuerzos cortantes C estará necesariamente situado sobre dicho eje, y hay que calcular su posición sobre éste. Para ello supongamos ésta conocida y apliquemos sobre la sección un cortante vertical que pase por el centro de esfuerzos cortantes, tal como se muestra en la Figura 8.24a. La correspondiente distribución de tensiones tangenciales es conocida, ya que coincide con la calculada en el apartado anterior de este ejemplo. Calculemos el valor de las

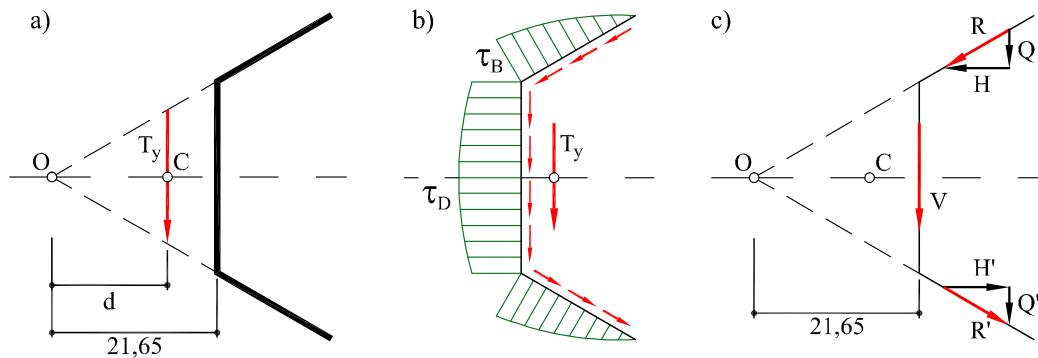


Fig. 8.24: Determinación de la posición del centro de esfuerzos cortantes

resultantes de las tensiones tangenciales en las alas R y R' y en el alma V (Figura 8.24b):

$$\begin{aligned} R &= \int_{s=0}^{s=17,32} \frac{T_y m_z^e(s)}{I_z e} e ds = \frac{T_y}{I_z} \int_0^{17,32} (42,32 s - 0,5 s^2) ds = 0,2419 T_y \\ Q &= R \sin 30^\circ = 0,1210 T_y \\ V &= 2 \int_{y=0}^{y=12,5} \frac{T_y m_z^e(y)}{I_z e} e dy = \frac{2T_y}{I_z} \int_0^{12,5} (739,45 - y^2) dy = 0,7580 T_y \end{aligned}$$

Nótese que $V + 2Q = T_y$. Igualando momentos respecto al punto O de los sistemas de fuerzas formados por T_y (Figura 8.24a) por un lado, y las resultantes R, R' y V , por otro (Figura 8.24c), se obtiene:

$$T_y d = V \cdot 21,65 \quad \Rightarrow \quad d = 21,65 \frac{V}{T_y} = 16,41 \text{ cm}$$

que proporciona la posición del centro de esfuerzos cortantes C sobre el eje de simetría de la sección.

9 Momento Torsor

9.1 Introducción

Una pieza prismática está sometida a *torsión simple* cuando sobre sus secciones actúa únicamente un momento resultante que tiene componente sólo según el eje x de la pieza, es decir, un *momento torsor*, M_t (Figura 9.1a). Si el momento torsor actuante es constante a lo largo de la pieza, se dice que el estado es de *torsión pura*.

Recordemos que la determinación del momento torsor debe hacerse respecto al centro de esfuerzos cortantes C de la sección, para poder determinar de esa manera el *momento torsor real* que actúa sobre ella (ver Sección 8.6 dedicada al *centro de esfuerzos cortantes*). En este Capítulo se entenderá siempre que el momento torsor M_t al que se hace referencia es el momento torsor *real*, y, por tanto, se prescindirá del calificativo correspondiente.

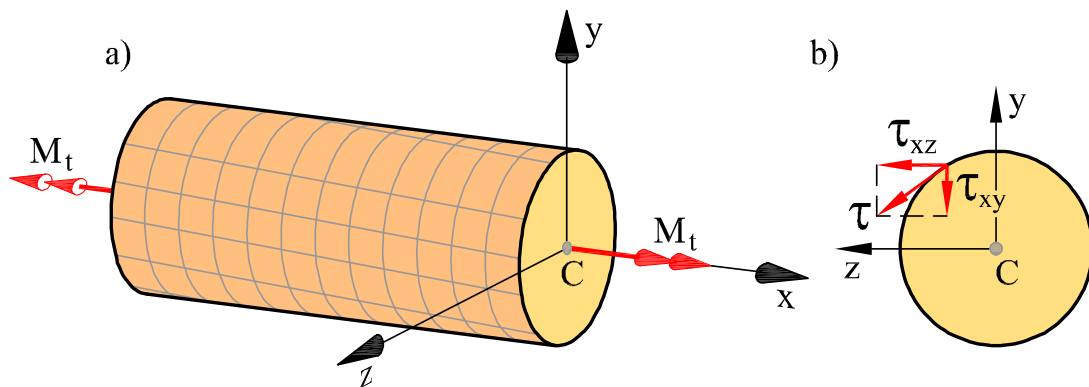


Fig. 9.1: Pieza sometida a momento torsor

Dado que los diferentes esfuerzos que actúan sobre una sección son las fuerzas y momentos resultantes de las tensiones que actúan sobre dicha sección, en el caso de *torsión pura* con momento torsor M_t constante, deben cumplirse las igualdades:

$$\begin{aligned} N &= \int_S \sigma_x dS = 0 & ; & & T_y &= \int_S \tau_{xy} dS = 0 \\ T_z &= \int_S \tau_{xz} dS = 0 & ; & & M_t &= \int_S (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dS \\ M_y &= \int_S \sigma_x z dS = 0 & ; & & M_z &= -\int_S \sigma_x y dS = 0 \end{aligned} \quad (9.1)$$

donde las distancias y, z se miden respecto al centro de esfuerzos cortantes C (Figura 9.1). La actuación de un momento torsor sobre la sección implica la aparición de tensiones tangenciales sobre la sección (Figura 9.1b), de tal forma que se cumplan las relaciones integrales:

$$\mathbf{T} = \int_S \boldsymbol{\tau} dS = 0 \quad ; \quad \mathbf{M}_t = \int_S \mathbf{r}_c \times \boldsymbol{\tau} dS \quad (9.2)$$

donde \mathbf{r}_c es el vector de posición respecto al centro de esfuerzos cortantes. En los casos tratados en este Capítulo, las tensiones longitudinales son nulas, $\sigma_x \equiv 0$. La torsión no uniforme, no tratada aquí, es un caso notorio en que las tensiones normales no son nulas.

Como en Capítulos anteriores, estas ecuaciones integrales no bastan para determinar la distribución de tensiones tangenciales, por lo que es necesario hacer hipótesis sobre la deformación de la rebanada, cuya validez debe ser avalada por la experiencia.

El estudio general de piezas prismáticas sometidas a momento torsor es un tema complejo que escapa de las hipótesis fundamentales en las que se basa la Resistencia de Materiales. La dificultad principal consiste en que, en general, las secciones sometidas a torsión no permanecen planas, sino que sufren deformación fuera de su plano, fenómeno conocido con el nombre de *alabeo*. En función de este hecho, se distingue entre *torsión uniforme*, cuando el alabeo relativo es despreciable, y *torsión no uniforme*, cuando el alabeo relativo debe ser considerado.

La torsión uniforme se estudia mediante la teoría de Coulomb, válida para secciones en las que no se produce alabeo de la sección, y la teoría de Saint-Venant, más general, válida para situaciones sin alabeo relativo. Ambas teorías son compatibles con el planteamiento general de la Resistencia de Materiales. Por el contrario, cuando el alabeo relativo es relevante *no se cumple el principio de Saint-Venant*, es decir, las tensiones en una sección no dependen exclusivamente del valor del momento torsor sobre ella. En estas situaciones el estudio queda, estrictamente hablando, fuera del

campo de aplicación de la Resistencia de Materiales. El problema se puede resolver con un planteamiento *ad hoc* adecuado, lo que se conoce como *teoría de la torsión no uniforme*, o mediante el planteamiento general de la teoría de la elasticidad.

En este Capítulo se estudiará en detalle la torsión simple de barras cilíndricas de sección circular, mediante la teoría de Coulomb. Se introducirá, asimismo, la teoría de Saint-Venant para torsión uniforme, y se describirán las analogías oportunas para considerar la torsión de piezas de sección arbitraria, obteniéndose resultados de interés práctico para el estudio de perfiles de pequeño espesor, tanto abiertos como cerrados. En resumen, en lo que sigue se tratará únicamente el caso de torsión uniforme, dejando el tratamiento de situaciones de torsión no uniforme para los libros especializados.

9.2 Torsión de Coulomb

9.2.1 Sección circular

Consideremos una pieza prismática recta de sección circular constante, sometida a un estado de *torsión pura* bajo la acción de dos momentos M_t , iguales y de sentidos opuestos, aplicados en sus secciones extremas.

Sencillas consideraciones geométricas, basadas en la simetría de la pieza y de la sollicitación (Figura 9.2), permiten asegurar que en la deformación por torsión:

- las secciones rectas giran alrededor de su centro de gravedad, por simetría axial respecto al eje de la pieza.
- las secciones rectas se conservan circulares y planas en la deformación. En efecto, las secciones deben permanecer circulares por simetría axial respecto al eje de la pieza. Además, deben permanecer planas por simetría de la sollicitación respecto de cualquier sección recta.

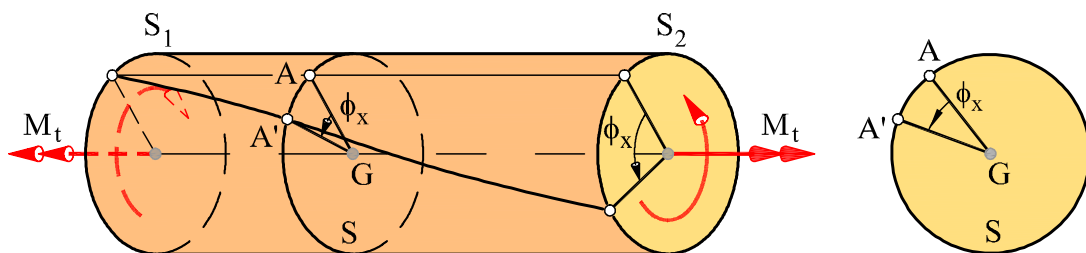


Fig. 9.2: Pieza de sección circular sometida a torsión pura

- los radios de la sección se conservan rectos en la deformación, por simetría de la sollicitación respecto de cualquier sección recta.
- el ángulo entre dos radios cualesquiera de la sección permanece inalterado en la deformación, por simetría axial respecto al eje de la pieza.

En resumen, la deformación por torsión de piezas rectas de sección circular se puede describir mediante la hipótesis de C. A. de Coulomb (1784), que puede enunciarse:

“en una pieza recta de sección circular sometida a torsión pura, la deformación es tal que cada sección gira alrededor de su centro sin deformarse en su plano y sin alabearse, como si fuera un disco rígido. Las fibras longitudinales de la pieza se deforman en hélices”.

Bajo la hipótesis de pequeños movimientos y deformaciones, los giros de torsión son suficientemente pequeños y la curvatura de los arcos de hélice de las fibras deformadas puede suponerse despreciable, es decir, éstos pueden suponerse rectilíneos.

La hipótesis de deformación de Coulomb es puramente geométrica, puede verificarse experimentalmente y concuerda con los resultados de la Teoría de la Elasticidad, incluso cuando el momento torsor es variable a lo largo del eje de la pieza, es decir, en situaciones de *torsión simple*.

Analicemos una rebanada diferencial de longitud dx de una pieza prismática de sección circular sometida a *torsión simple*, tal como se muestra en la Figura 9.3a. Consideremos en ella el elemento diferencial $ABCD$, situado sobre un cilindro de radio ρ , concéntrico con el eje de la pieza; dicho elemento se deformará a torsión según el “paralelogramo” $ABC'D'$ de la Figura 9.3b, donde AC' y BD' son segmentos de hélice de longitud infinitesimal, por lo que pueden considerarse rectilíneos.

La deformación angular del elemento vendrá dada por:

$$\gamma \simeq \tan \gamma = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \frac{\rho d\phi_x}{dx} = \rho \theta \quad (9.3)$$

donde se ha introducido el ángulo de torsión, ϕ_x , y el ángulo de torsión por unidad de longitud, $\theta = d\phi_x/dx$. Obsérvese que el giro de torsión, ϕ_x , es un ángulo; por tanto, es adimensional, y se mide en radianes [rad]. Por el contrario, el giro de torsión por unidad de longitud, θ , es un ángulo por unidad de longitud y se mide en [rad/L].

Se tiene, por consiguiente, que las distorsiones son proporcionales a ρ :

$$\gamma = \rho \theta \quad (9.4)$$

De acuerdo con la ley de Hooke, las tensiones tangenciales en el elemento $ABCD$ son proporcionales a las deformaciones, de la forma:

$$\tau = G \gamma = G \rho \theta \quad (9.5)$$

donde G es el módulo de rigidez a cortante del material. Estas tensiones tangenciales tienen las direcciones y sentidos que se muestran en las Figuras 9.3a y c. Se observa que las tensiones tangenciales en un punto de la sección son perpendiculares al radio que pasa por dicho punto, y que varían linealmente con la distancia ρ al centro de la sección. Por tanto, los valores máximos se dan en el contorno de ésta.

El momento resultante de las tensiones tangenciales debe ser igual al momento torsor actuante M_t ; por consiguiente:

$$M_t = \int_S \rho \tau \, dS = \int_S G \theta \rho^2 \, dS = G \theta \int_S \rho^2 \, dS = G \theta I_p \quad (9.6)$$

donde I_p es el momento polar de inercia de la sección circular. Para un círculo de radio r , es $I_p = \pi r^4/2$, y el giro de torsión por unidad de longitud θ vale:

$$\theta = \frac{M_t}{G I_p} \quad (9.7)$$

El producto $G I_p$ se denomina *rigidez torsional* de la sección. Sustituyendo este valor

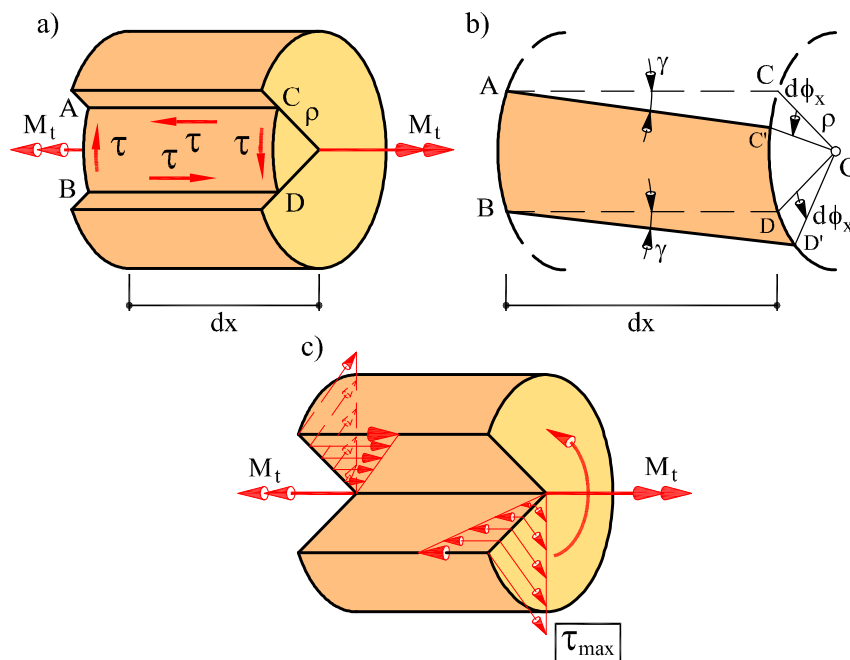


Fig. 9.3: Rebanada sometida a torsión de Coulomb

en la expresión (9.5) de las tensiones tangenciales, se obtiene:

$$\tau = \frac{M_t \rho}{I_p} \quad (9.8)$$

Por tanto, en una sección circular el valor de la tensión tangencial máxima se da en la circunferencia exterior y su valor viene dado por la expresión:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t r}{I_p} = \frac{2M_t}{A r} \quad (9.9)$$

Es interesante resaltar que los elementos diferenciales tales como el de la Figura 9.4 están sometidos a cortante puro. A este estado tensional le corresponden tensiones principales $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{\max}$ en direcciones a $\pm 45^\circ$ con el eje longitudinal de la pieza.

Si el material de la pieza tiene resistencias a tracción y compresión de valores parecidos, la rotura a torsión se produce en un plano perpendicular al eje de la pieza, cuando la tensión tangencial máxima alcanza el valor de rotura. Este tipo de rotura es común en la mayoría de los metales y generalmente es de carácter dúctil. Por el contrario, si el material de la pieza resiste menos a tracción que a compresión la rotura se produce por tracción, apareciendo grietas helicoidales a 45° con el eje de la pieza.

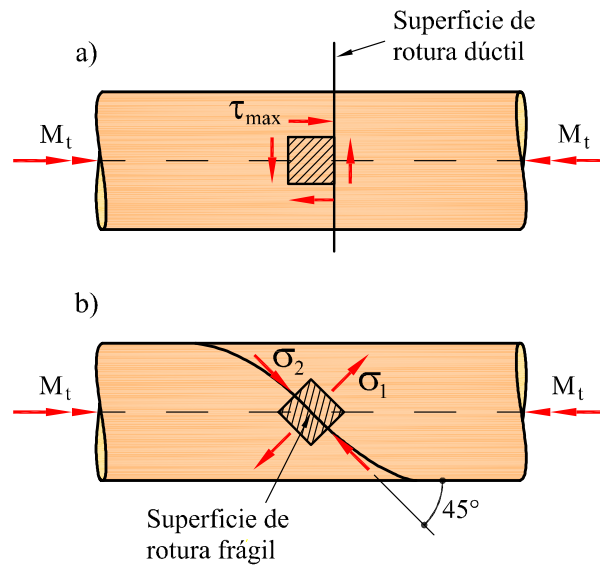


Fig. 9.4: Superficies de rotura de pieza sometida a torsión de Coulomb: (a) rotura dúctil, (b) rotura frágil

Este tipo de rotura es, generalmente, de carácter frágil y se da en materiales como el hierro fundido, el hormigón o las rocas.

El giro total de la pieza debido a torsión, entre sus secciones extremas, es:

$$\phi_x = \int_l \theta \, dx = \int_0^l \frac{M_t(x)}{G I_p(x)} \, dx \quad (9.10)$$

donde l es la longitud total de la pieza. En el caso particular de torsión pura y pieza de sección constante, el giro total de torsión resulta:

$$\phi_x = \frac{M_t l}{G I_p} \quad (9.11)$$

9.2.2 Sección circular hueca

Consideremos una sección circular hueca, con r_e y r_i como radios exterior e interior de la sección, respectivamente, tal como se muestra en la Figura 9.5. Las consideraciones geométricas y las expresiones obtenidas en las dos Secciones anteriores son, obviamente, aplicables también en este caso. De hecho, la sección hueca puede considerarse “compuesta” por dos materiales, de los cuales el material “interior” tiene un coeficiente de equivalencia nulo, y la distribución de tensiones en una sección tubular es la representada en la Figura 9.5.

El momento de inercia polar I_p y el módulo de torsión de la sección hueca valen:

$$I_p = \frac{\pi (r_e^4 - r_i^4)}{2} \quad (9.12)$$

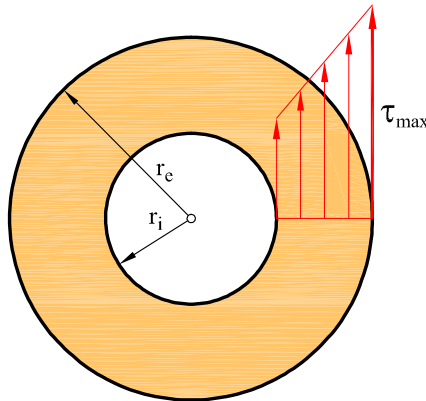


Fig. 9.5: Sección circular hueca

Además, si el espesor de la sección es pequeño en relación al radio exterior se puede aproximar:

$$I_p \simeq 2\pi r_m^3 e = A r_m^2 \quad (9.13)$$

con $A = 2\pi r_m e$, igual al área de la sección. De esta manera, en una sección circular hueca de pequeño espesor, la tensión tangencial debida al momento torsor M_t se puede considerar *uniforme* en toda la sección y de valor:

$$\tau_{med} = \frac{M_t}{A r_m} \quad (9.14)$$

Se observa así que el material está muy bien aprovechado en las secciones tubulares de pequeño espesor solicitadas a torsión, ya que todo el material está sometido a tensión prácticamente uniforme.

9.2.3 Secciones cerradas de pequeño espesor

Sea una rebanada de una pieza de sección cerrada de pequeño espesor sometida a torsión uniforme y consideremos el equilibrio de un elemento diferencial como el de la Figura 9.6. Por ser el espesor pequeño, admitiremos que la distribución de tensiones tangenciales a través del espesor es uniforme.

Por equilibrio de fuerzas según la dirección del eje x , debe ser:

$$\tau_b e_b dx - \tau_c e_c dx = 0 \quad (9.15)$$

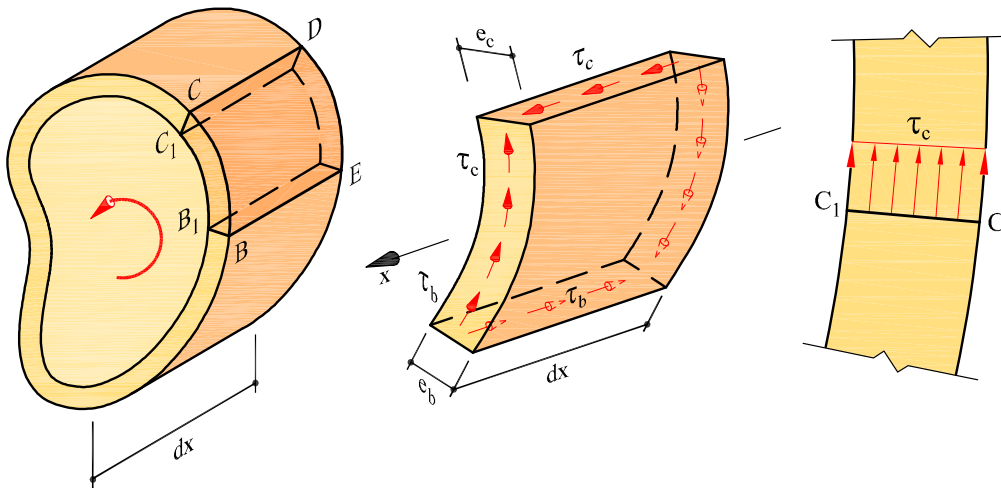


Fig. 9.6: Sección cerrada de pequeño espesor

donde e es el espesor en un punto dado de la sección. De la expresión anterior, se deduce que:

$$\tau_b e_b = \tau_c e_c = q = cte \quad (9.16)$$

Lo que significa que el flujo de tensiones tangenciales a través del espesor, $q = \tau e$, es constante en toda la sección (hipótesis de Bredt).

Para hallar la tensión sobre cada corte de la sección se establece la igualdad entre el momento resultante de las tensiones y el momento torsor actuante, respecto de un punto interior O cualquiera. Se tiene:

$$M_t = \int_S r \tau dS = \oint_s r \tau e ds = \oint_s q r ds = q \oint_{S_m} 2 dS_m = 2qS_m \quad (9.17)$$

donde r es la distancia al punto O (arbitrario) de la tangente en un punto dado de la línea media, s es la longitud de arco medida sobre la línea media, y S_m es la superficie encerrada por la línea media de la sección (Figura 9.7).

Por tanto, el flujo de tensiones q es igual a:

$$q = \tau e = \frac{M_t}{2S_m} \quad (9.18)$$

Esta expresión se conoce como *primera fórmula de Bredt*.

Por consideraciones energéticas, se puede deducir que en secciones cerradas de pequeño espesor el giro de torsión por unidad de longitud, θ , es:

$$\theta = \frac{1}{2GS_m} \oint_s \frac{q}{e} ds \quad (9.19)$$

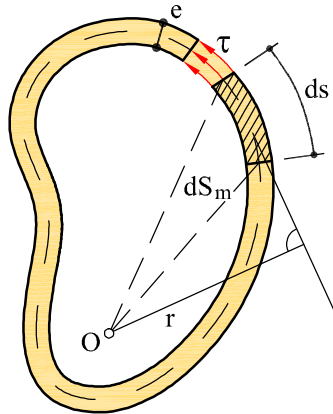


Fig. 9.7: Área encerrada por la línea media

y al sustituir $\tau = q/e = M_t/(2S_m e)$, se tiene:

$$\theta = \frac{M_t}{G 4 S_m^2 / \oint_s \frac{ds}{e}} = \frac{M_t}{GI_t} \quad (9.20)$$

ecuación que se conoce como *segunda fórmula de Bredt*, y de la que se obtiene el valor de la inercia a torsión en este tipo de sección:

$$I_t = \frac{4 S_m^2}{\oint_s \frac{ds}{e}} \quad (9.21)$$

Donde la integral $\oint_s \frac{ds}{e}$ es el perímetro de la sección media partido por el espesor. En el caso de secciones medias poligonales este término es igual a $\sum_i \frac{l_i}{e_i}$, siendo l_i la longitud de cada lado del polígono y e_i el espesor correspondiente.

Ejemplo 9.2.3.1

Calcular la inercia a torsión y el máximo momento torsor que puede resistir una pieza de sección anillo circular cerrado de radio r y de espesor e (Figura 9.8) si la tensión tangencial admisible es τ_{adm} .

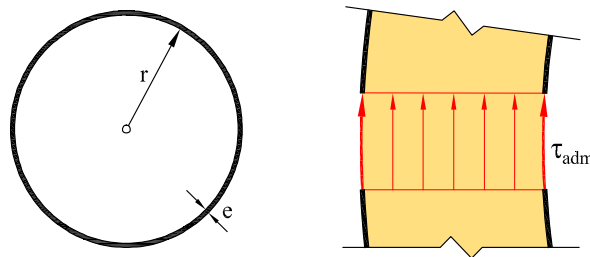


Fig. 9.8: Anillo circular cerrado

La inercia a torsión de la sección cerrada vale (ver Ec. (9.21) y Ec. (9.13a)):

$$I_t = \frac{4S_m^2}{\oint \frac{ds}{e}} = \frac{4(\pi r^2)^2}{2\pi r e} = 2\pi r^3 e = A r^2 = I_p$$

y comparando con la inercia a torsión de la misma sección abierta (ver Ejemplo 9.3.5.1) se tiene la relación:

$$\frac{(I_t)_{ce}}{(I_t)_{ab}} = \frac{Ar^2}{\frac{1}{3}Ae^2} = 3 \left(\frac{r}{e}\right)^2$$

El momento torsor máximo es, según la ecuación (9.18):

$$M_t^{\max} = 2S_m\tau_{\text{adm}}e = 2\pi r^2e\tau_{\text{adm}} = Ar\tau_{\text{adm}}$$

y todos los puntos de la sección trabajan a tensión τ_{adm} , al ser el espesor uniforme.

Ejemplo 9.2.3.2

Dimensionar la longitud a de la sección de la Figura 9.9, solicitada por un momento torsor $M_t = 150 \text{ kN}\cdot\text{m}$, sabiendo que la tensión tangencial admisible es $\tau_{\text{adm}} = 100 \text{ MPa}$. Calcular el ángulo de torsión por unidad de longitud si el módulo de rigidez transversal es $G = 100 \text{ GPa}$.

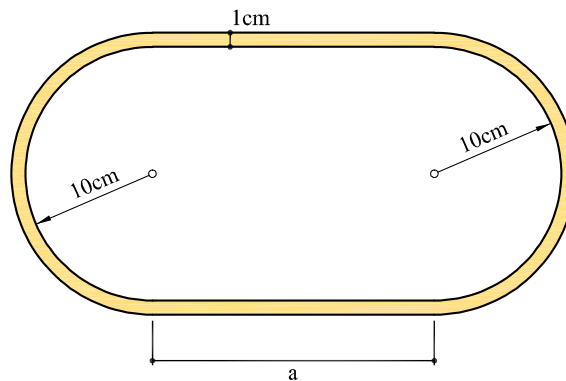


Fig. 9.9: Sección del Ejemplo 9.2.3.2

El valor de la tensión tangencial es uniforme en toda la sección y vale:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{M_t}{2S_me} \\ &= \frac{150 \cdot 10^3}{2(a \cdot 21,0 + \pi \cdot 10,5^2) \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}} \text{ Pa} = \frac{1,5 \cdot 10^5}{42,0a + 692,72} \text{ MPa} \end{aligned}$$

Haciendo $\tau < \tau_{\text{adm}} = 100 \text{ MPa}$ se tiene $a > 19,22 \text{ cm}$. La inercia a torsión de la sección para $a = 20 \text{ cm}$ vale:

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{4S_m^2}{\oint \frac{ds}{e}} = \frac{4S_m^2}{\sum \frac{l_i}{e_i}} \\ &= \frac{4 \cdot (20,0 \cdot 21,0 + \pi \cdot 10,5^2)^2}{\frac{2 \cdot (20,0 + \pi \cdot 10,5)}{1,0}} \text{ cm}^4 = 22\,168,14 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Luego el ángulo de torsión por unidad de longitud vale:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{M_t}{GI_t} \\ &= \frac{150 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^9 \cdot 2,2168 \cdot 10^{-4}} \text{ rad/m} \\ &= 6,766 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m} = 0,387 \text{ }^\circ\text{m}^{-1} \end{aligned}$$

9.3 Torsión de Saint-Venant

9.3.1 Formulación general

Como hemos visto, la solución del problema de la torsión de una pieza de sección circular se obtiene admitiendo como hipótesis de deformación que las secciones rectas de la pieza permanecen planas y giran sin deformarse. Esta hipótesis, formulada por Coulomb, fue aplicada más tarde por Navier al caso de una pieza prismática de sección rectangular, llegando a la conclusión *errónea* siguiente: para un determinado momento torsor M_t , el ángulo de torsión es inversamente proporcional al momento polar de inercia respecto al baricentro de la sección y los valores máximos de la tensión tangencial se producen en los puntos más alejados de dicho punto.

Por otro lado, en ensayos experimentales realizados con piezas de sección rectangular se comprueba que

- (a) la distorsión angular es máxima en los puntos medios de los lados más largos del rectángulo, que no son los puntos más alejados del baricentro de la sección, mientras que en las esquinas, que sí lo son, la distorsión es nula. Esto implica que la distribución real de tensiones tangenciales en una sección rectangular es tal como se muestra en la Figura 9.10b, y
- (b) las secciones rectas de las piezas *no permanecen planas* al ser sometidas a torsión, sino que se alabea.

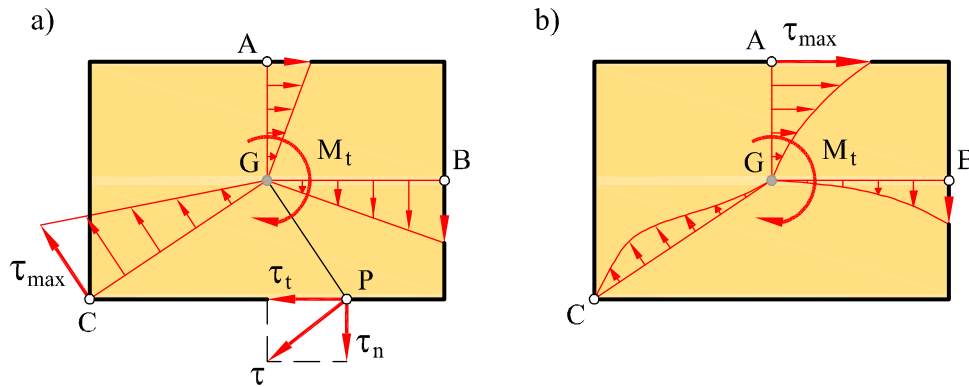


Fig. 9.10: Distribución de tensiones tangenciales de torsión en una sección rectangular: (a) teoría de Coulomb, (b) teoría de Saint-Venant

Estas evidencias experimentales indican claramente que la teoría de Coulomb no es adecuada para representar el fenómeno de torsión en piezas de sección no circular.

La solución exacta del problema de *torsión uniforme* en piezas prismáticas de forma arbitraria fue obtenida por Saint-Venant (1853), suponiendo que la deformación es *uniforme*, esto es, idéntica para todas las secciones de la pieza y que consiste en:

- (a) una *rotación rígida* de las secciones en su plano, y
- (b) un *alabeo* de las secciones fuera de su plano.

Se demuestra (Teoremas de Reciprocidad) que el centro de giro de las secciones en su plano es, precisamente, el centro de esfuerzos cortantes, cuya posición puede calcularse tal y como se mostró en el Capítulo 8. Por esta razón, al centro de esfuerzos cortantes se le llama también *centro de torsión* de la sección. En torsión uniforme, al lugar geométrico de los centros de torsión se le llama *eje de torsión*, y es un eje paralelo a la directriz de la pieza.

En la Figura 9.11 se muestra la deformación en torsión pura de dos piezas prismáticas, una de sección circular y otra de sección rectangular. La pieza de sección circular se deforma según la hipótesis de Coulomb, esto es, sin alabeo, y las secciones rectas permanecen planas. Por el contrario, la pieza de sección rectangular se deforma según la hipótesis de Saint-Venant, y las secciones rectas giran en su plano y además dejan de ser planas, es decir, se alabean.

Obviamente, la teoría de Coulomb es un caso particular de la teoría de Saint-Venant en el que el alabeo es nulo.

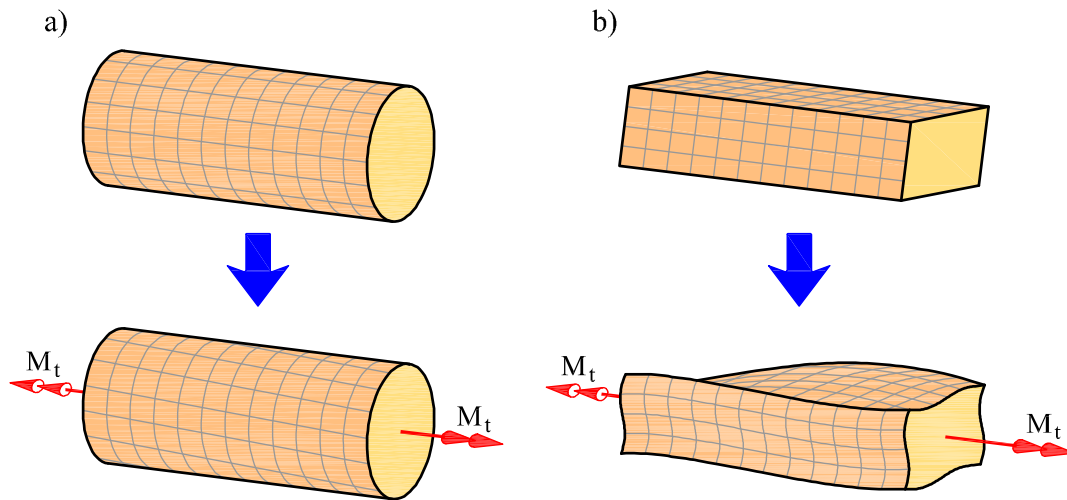


Fig. 9.11: Deformación por torsión: (a) pieza de sección circular (b) pieza de sección rectangular

En la teoría de Saint-Venant tanto el giro de torsión por unidad de longitud, θ , como el alabeo son uniformes a lo largo de la pieza. El suponer que el alabeo es uniforme para todas las secciones simplifica el planteamiento del problema, ya que de esta forma no aparecen tensiones normales debidas al fenómeno de alabeo.

Sin embargo, es frecuente que una pieza sometida a torsión tenga alguna sección transversal obligada a permanecer fija, como es el caso de las secciones de empotramiento que no pueden alabearse durante la torsión. Esta restricción del alabeo de una sección transversal da lugar a la aparición de torsión no uniforme a lo largo de la pieza.

La influencia que el alabeo no uniforme tiene en el comportamiento de una pieza solicitada a torsión puede ser importante cuando las secciones rectas son abiertas y de pequeño espesor, pero es despreciable en los restantes tipos de secciones.

El estudio completo del problema de torsión uniforme (o de Saint-Venant) se hace mediante la teoría de la Elasticidad.

La solución del problema elástico de torsión uniforme en secciones de forma arbitraria es un problema matemático complejo, que a menudo se resuelve mediante métodos numéricos aproximados, tales como las diferencias finitas, los elementos finitos o los elementos de contorno.

9.3.2 Analogía de la membrana

De forma alternativa a la resolución del problema elástico de torsión uniforme mediante métodos analíticos o numéricos, la solución del mismo puede abordarse mediante la *analogía de la membrana*. Imaginemos una membrana elástica homogénea cuyos bordes se mantienen fijos sobre un contorno igual a la sección recta de la pieza que se desea estudiar, sometida a una tracción uniforme en sus bordes y a una presión normal también uniforme (Figura 9.12a). Si la sección es múltiplemente conexa, es decir, tiene huecos interiores, éstos se cubren con placas rígidas de peso despreciable (Figura 9.12b).

Sea q la presión normal por unidad de superficie de la membrana y Q la tracción uniforme por unidad de longitud del contorno de la misma. Se puede demostrar que el problema de deformación de la membrana y el problema elástico de torsión uniforme tienen una formulación analítica análoga. Por tanto, mediante la representación de la superficie deformada de la membrana por curvas de nivel se pueden obtener, *por analogía*, varias conclusiones importantes relativas a la distribución de tensiones tangenciales en el problema de la torsión:

(a) La tensión tangencial en un punto genérico de la sección tiene la dirección de la tangente a la curva de nivel que pasa por dicho punto (Figura 9.13). En particular, la tensión tangencial en el contorno es paralela a éste.

(b) La magnitud de la tensión tangencial τ en un punto genérico de la sección es análoga a la pendiente de la membrana en dicho punto (Figura 9.13). Por tanto, la

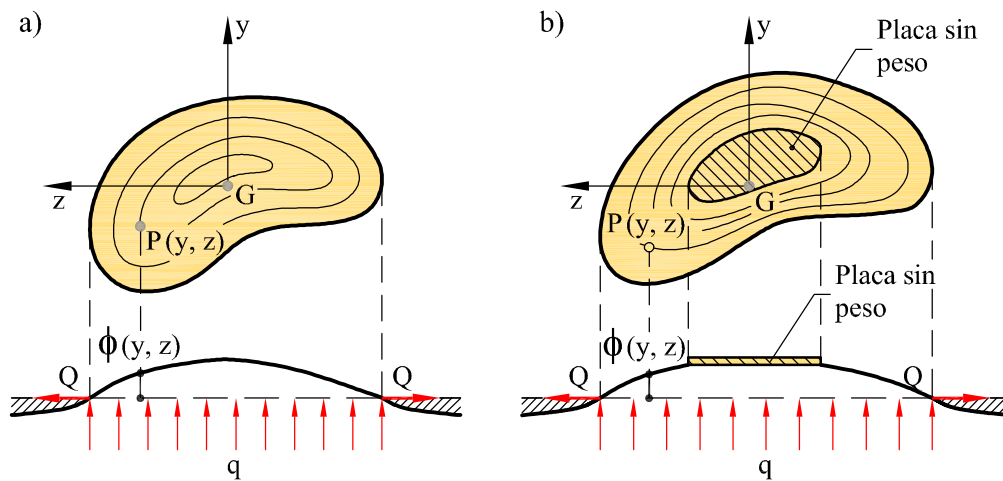


Fig. 9.12: Analogía de la membrana: (a) dominio conexo (b) dominio con "hueco"

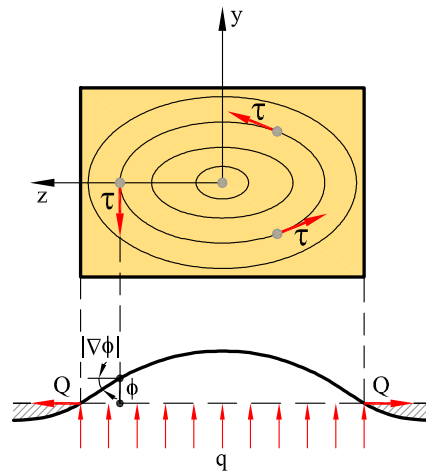


Fig. 9.13: Analogía de la membrana

tensión tangencial será mayor en las zonas de la sección donde la membrana presente mayor pendiente y cuanto más cercanas estén las curvas de nivel entre sí.

(c) El momento torsor que actúa sobre la sección es *análogo* al doble del volumen encerrado por la membrana deformada.

Por tanto, la analogía de la membrana proporciona una imagen cualitativa y cuantitativa de la distribución de tensiones tangenciales que aparecen en una sección sometida a esfuerzo torsor.

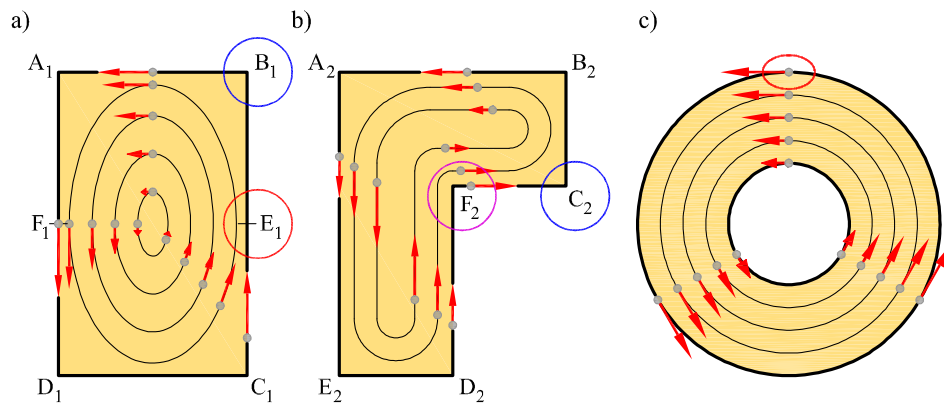


Fig. 9.14: Distribución de tensiones sobre secciones de distintas geometrías

Así por ejemplo, en una sección rectangular, los vértices A_1, B_1, C_1, D_1 tienen tensión tangencial nula, ya que la pendiente de la membrana es nula en dichos puntos, y las trayectorias de tensión son como las de la Figura 9.14a; las tensiones máximas se dan en los puntos medios de los lados más largos, E_1 y F_1 , donde la pendiente de la membrana es máxima. Por consideraciones análogas se deduce que en una sección como la de la Figura 9.14b, la tensión es nula en los ángulos salientes (A_2, B_2, C_2, D_2, E_2) e infinita en los ángulos entrantes (F_2). En la práctica, se evita este tipo de singularidad redondeando los ángulos entrantes. En la Figura 9.14c se muestran las trayectorias de tensión para una sección circular hueca; por simetría central, éstas resultan ser circunferencias concéntricas, resultado coincidente con la teoría de Coulomb.

9.3.3 Sección rectangular

La solución del problema de torsión uniforme en piezas de sección rectangular puede obtenerse de forma analítica resolviendo el correspondiente problema elástico sobre un dominio rectangular. Sin embargo, los métodos que hay que utilizar están más allá del nivel de desarrollo matemático utilizado en este libro. A través de la analogía de la membrana se tiene una imagen cualitativa de las trayectorias de tensión obtenidas, esto es, de la dirección de las tensiones tangenciales, que son como las mostradas en la Figura 9.14a.

Para una sección rectangular de lados $b \times c$, donde b es el lado más largo, la máxima tensión tangencial se da en los puntos medios de los lados más largos del rectángulo y vale:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha bc^2} \quad (9.22)$$

donde α es un valor que depende de la relación $b/c > 1$. El giro de torsión por unidad de longitud vale

$$\theta = \frac{M_t}{G \beta bc^3} \quad (9.23)$$

donde β también depende de la relación b/c . La Tabla 9.1 proporciona valores de los coeficientes α y β para varios valores de esta relación. Obsérvese que tanto α como β tienden a valer $1/3$ cuando el rectángulo es largo y estrecho.

b/c	1	1,5	2	3	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,299	0,312	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,299	0,312	0,333

Tabla 9.1: Coeficientes para secciones rectangulares

9.3.4 Secciones rectangulares estrechas

La analogía de la membrana permite obtener una solución muy sencilla del problema de la torsión de una pieza prismática de sección rectangular estrecha de dimensiones $b \times c$, con $b \gg c$ (Figura 9.15).

En efecto, si el rectángulo es suficientemente largo, se puede despreciar el efecto de los extremos de éste sobre la deformación de la membrana en zonas suficientemente alejadas de ellos. Esto equivale a decir que, salvo en las zonas próximas a los extremos, la membrana se deforma en forma de cilindro parabólico (Figura 9.15a). En este caso:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t c}{\frac{1}{3}bc^3} = \frac{M_t c}{I_t} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{M_t}{G \frac{1}{3}bc^3} = \frac{M_t}{GI_t} \quad (9.24)$$

donde $I_t = bc^3/3$ es la *inercia a torsión de la sección*.

Además, en la parábola la pendiente varía linealmente; por tanto, la distribución de tensiones tangenciales, a lo largo de un corte transversal AA' , es lineal:

$$\tau(z) = \tau_{\max} \frac{z}{c/2} = \frac{M_t 2z}{I_t} \quad (9.25)$$

con los valores máximos en los puntos A y A' del contorno.

Las expresiones anteriores son tanto más aproximadas cuanto mayor es la relación b/c . Para $b/c > 10$ pueden considerarse como exactas.

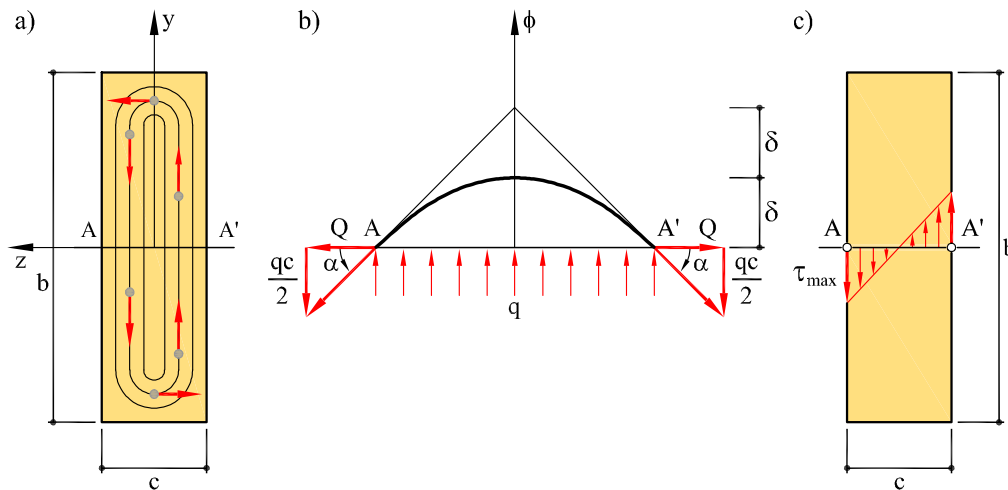


Fig. 9.15: Analogía de la membrana en sección rectangular estrecha

9.3.5 Perfiles laminados abiertos

Las expresiones (9.24) y (9.25), obtenidas para secciones rectangulares estrechas, pueden aplicarse, de forma aproximada, a secciones abiertas delgadas de espesor uniforme que no sean rectangulares, pero que puedan ser “rectificadas” para tomar dicha geometría. En ellas se toma como magnitud “ b ” la longitud “rectificada” de la línea media de la sección y como espesor “ e ” (Figuras 9.16a y 9.16b). El argumento para esta generalización consiste en suponer que la deformada de la membrana será, aproximadamente, un cilindro parabólico de longitud b .

En el caso de perfiles laminados “ramificados”, en los que las longitudes y los espesores de las “ramas” que los componen son distintos, pero se cumple que $b_i/e_i \gg 1$ (Figura 9.16c), se considera adecuada la siguiente aproximación.

Sea m_i la parte de momento torsor absorbido por la “rama” i –ésima y sea θ el ángulo de torsión de la sección, supuesta igual para todas las “ramas” (torsión uniforme). Si consideramos que cada rama resiste una fracción del momento torsor total proporcional a su propia rigidez a torsión, m_i , tal que $\sum_i m_i = M_t$, se tiene:

$$\theta = \frac{m_i}{G \frac{1}{3} b_i e_i^3} = \frac{M_t}{G \sum_i \frac{1}{3} b_i e_i^3} \quad (9.26)$$

Por tanto, se puede definir:

$$I_t = \sum_{i=1}^n (I_t)_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} b_i e_i^3 \quad (9.27)$$

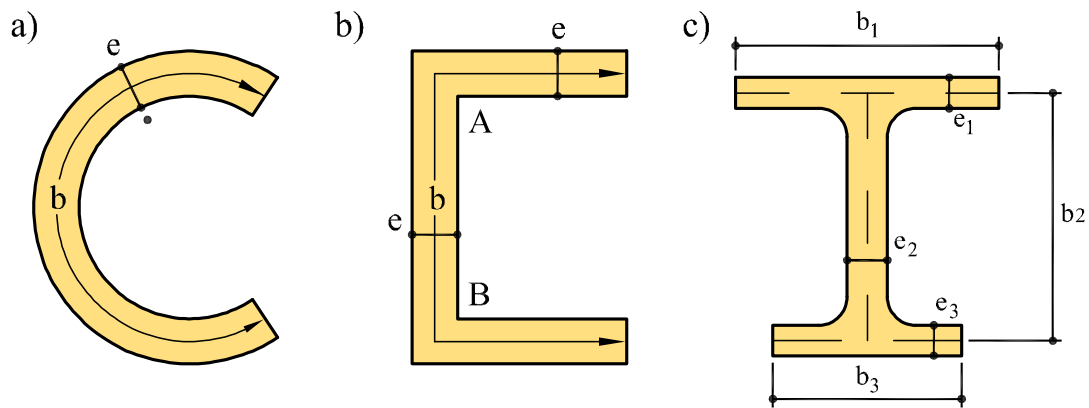


Fig. 9.16: Perfiles abiertos: a) y b) de espesor uniforme c) con variación de espesores

como la inercia a torsión de la sección (suma de las correspondientes a las distintas ramas). Además, según la analogía de la membrana, la tensión máxima en cada “rama” se dará a lo largo de su contorno, y valdrá:

$$(\tau_{\max})_i = G \theta e_i = \frac{M_t e_i}{I_t} \quad (9.28)$$

Hay que señalar que esta aproximación desprecia los efectos locales que ocurren en los ángulos entrantes de la sección, tales como los ángulos A y B de la Figura 9.16b. Sin embargo, la analogía de la membrana predice que en los ángulos entrantes de dichas uniones la tensiones tienden a infinito. En la práctica, dichas singularidades se evitan redondeando dichos ángulos. Puede demostrarse mediante la teoría de la elasticidad que la relación entre la tensión máxima real, $\bar{\tau}_{\max}$, y la tensión predicha por las expresiones anteriores, τ_{\max} , en estos ángulos es función de la relación R/e entre el radio de curvatura R de la unión y el espesor e de la pieza, tal como se muestra en la Figura 9.17.

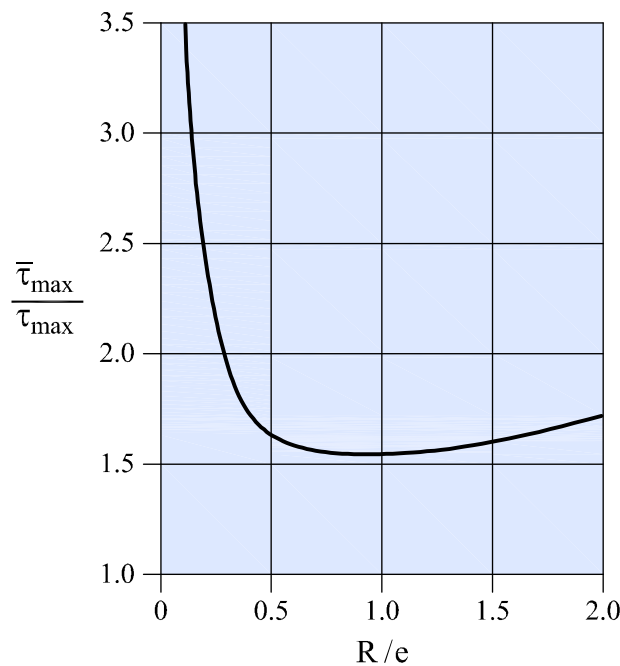


Fig. 9.17: Efecto de concentración de tensiones en ángulos entrantes en función de la relación radio/espesor

Ejemplo 9.3.5.1

Calcular la inercia a torsión y el máximo momento torsor que puede resistir una pieza de sección anillo circular *abierto* de radio r y espesor e , para una tensión tangencial admisible τ_{adm} .

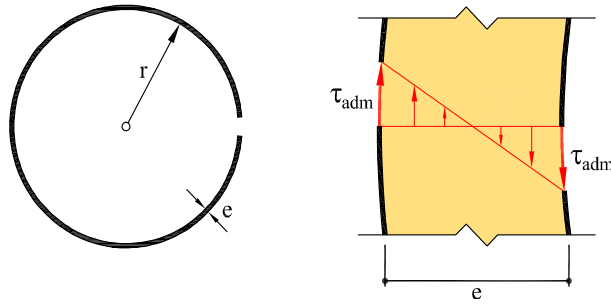


Fig. 9.18: Anillo circular abierto

La inercia a torsión de la sección es:

$$I_t = \frac{1}{3} b e^3 = \frac{1}{3} 2\pi r e^3 = \frac{1}{3} A e^2$$

y por tanto, según la ecuación (9.24b),

$$M_t^{\text{max}} = \frac{I_t \tau_{\text{adm}}}{e} = \frac{1}{3} A e \tau_{\text{adm}}$$

y la tensión τ_{adm} se alcanza sólo a lo largo del contorno de la sección.

Si se compara este resultado con el obtenido en el Ejemplo 9.2.3.1 para la sección *cerrada* de igual área se tiene una relación:

$$\frac{(M_t^{\text{max}})_{\text{ce}}}{(M_t^{\text{max}})_{\text{ab}}} = \frac{Ar \tau_{\text{adm}}}{\frac{1}{3} A e \tau_{\text{adm}}} = 3 \left(\frac{r}{e} \right)$$

Ambos resultados demuestran la superioridad de las secciones cerradas frente a las abiertas desde el punto de vista de la resistencia frente a la sollicitación de torsión uniforme.

Ejemplo 9.3.5.2

El voladizo de la Figura 9.19 trabaja con una carga vertical descendente uniformemente repartida de valor $p = 5 \text{ kN/m}$ (ver Ejemplo 8.8.1.1. del Capítulo 8). Si el plano de actuación de las cargas verticales es el que contiene a los centros de gravedad de las secciones, se pide: (a) Calcular el momento torsor real que actúa sobre cada sección. (b) Calcular el valor máximo de las tensiones tangenciales debidas al momento torsor, en la sección más solicitada. Comparar con los resultados obtenidos en el apartado (b) del Ejemplo 8.8.2.1. y comentar. (c) Calcular el giro de torsión que sufre el extremo del voladizo y comentar el resultado. Tomar $G = 80 \text{ GPa}$.

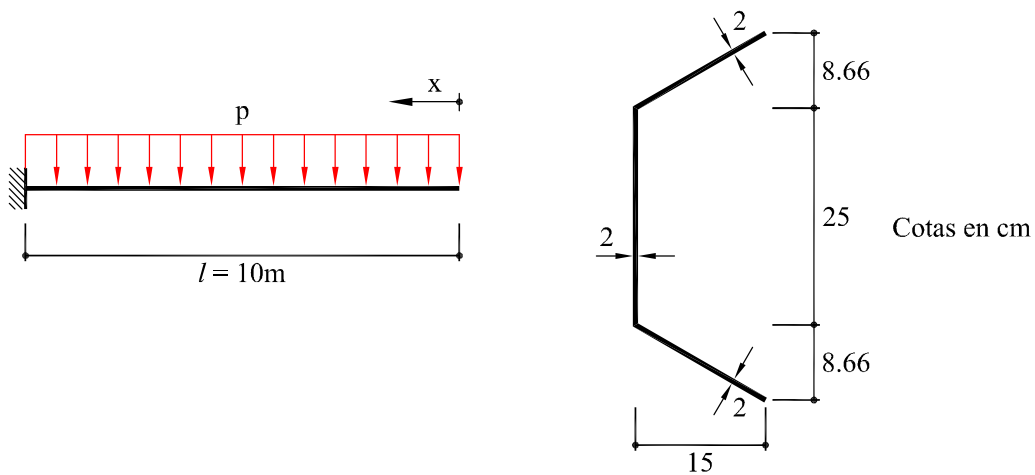


Fig. 9.19: Voladizo del Ejemplo 9.3.5.2

(a) Según se calculó en el Ejemplo 8.8.1.1 del Capítulo 8, el centro de esfuerzos cortantes de la sección C está situado sobre el eje de simetría de la sección, a la izquierda del alma, a $9,596 \text{ cm}$ del centro de gravedad G . Al actuar las cargas en el plano que contiene a los centros de gravedad de las secciones y puesto que el centro de esfuerzos cortantes no coincide con el centro de gravedad, se produce en cada sección un momento torsor real de valor:

$$M_t = T_y \cdot \overline{CG} = 9,596 \cdot 10^{-2} T_y \text{ kN} \cdot \text{m}$$

con el cortante T_y expresado en kN.

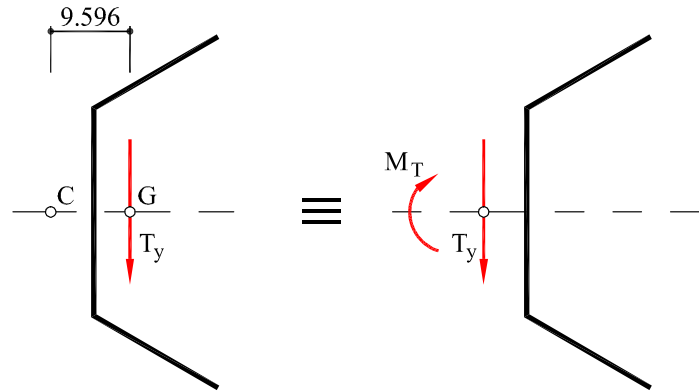


Fig. 9.20: Posición del centro de esfuerzos cortantes y momento torsor real

(b) Al tratarse de un perfil abierto de pequeño espesor, las tensiones tangenciales máximas debidas al momento torsor M_t pueden calcularse mediante la expresión:

$$\tau = \frac{M_t e}{I_t}$$

siendo e el espesor del perfil. La inercia a torsión de la sección es igual a:

$$I_t = \frac{1}{3} b e^3 = \frac{1}{3} (25 + 2 \cdot 17,32) \cdot 2^3 = 159,04 \text{ cm}^4$$

donde b es la longitud de la línea media del perfil. Por tanto, el valor de la tensión tangencial máxima es:

$$\tau_{\max} = \frac{9,596 \cdot 10^{-2} T_y \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{159,04 \cdot 10^{-8}} \text{ Pa} = 1,207 T_y \text{ MPa}$$

con T_y en kN. Para el valor máximo del esfuerzo cortante $T_{\max} = 50$ kN, la tensión tangencial máxima debida a la torsión es $\tau_{\max} = 60,35$ MPa.

Si se compara este resultado con el obtenido en el apartado (b) del Ejemplo 8.8.1.1, se observa que la tensión tangencial máxima debida al momento torsor es aproximadamente siete veces mayor que la tensión tangencial máxima debida al esfuerzo cortante.

(c) El giro de torsión por unidad de longitud es igual a:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{\overline{CG} \cdot T_y}{GI_t} = \frac{\overline{CG} \cdot p x}{GI_t} \text{ rad/m}$$

donde $\overline{CG} = 9,596 \cdot 10^{-2}$ m, $p = 5$ kN/m y $GI_t = 127232$ N·m². Por tanto, el valor del giro de torsión que sufre el extremo del voladizo es igual a:

$$\phi_x = \int_l \theta dx = \frac{\overline{CG} p}{GI_t} \int_0^l x dx = \frac{\overline{CG} pl^2}{2GI_t} = 0,189 \text{ rad} = 10,81^\circ$$

Como puede observarse el valor del giro de torsión en el extremo del voladizo es muy elevado, y queda fuera de las hipótesis de pequeños movimientos. La sección debería redefinirse para limitar el giro por torsión.

Ejemplo 9.3.5.3

La sección rectangular hueca de la Figura 9.21a está abierta en el punto medio de su base inferior, mediante un corte de ancho despreciable. La sección está sometida a un esfuerzo cortante paralelo al eje y aplicado en el alma vertical izquierda. Calcular: (a) el momento torsor real que actúa sobre cada sección, (b) el valor máximo de las tensiones tangenciales debidas al momento torsor, en la sección más solicitada. (c) la tensión tangencial máxima que se produce en la sección, (d) el valor máximo del cortante T_y que soporta la sección si la tensión tangencial admisible es τ_{adm} .

Datos: $b = 20 \text{ cm}$, $h = 40 \text{ cm}$, $e = 1 \text{ cm}$, $d_{CG} = 42,86 \text{ cm}$, $T_y = 20 \text{ kN}$, $\tau_{adm} = 150 \text{ MPa}$, $G = 100 \text{ GPa}$.

(a) Al reducir el esfuerzo cortante T_y (Figura 9.21b) al centro de esfuerzos cortantes

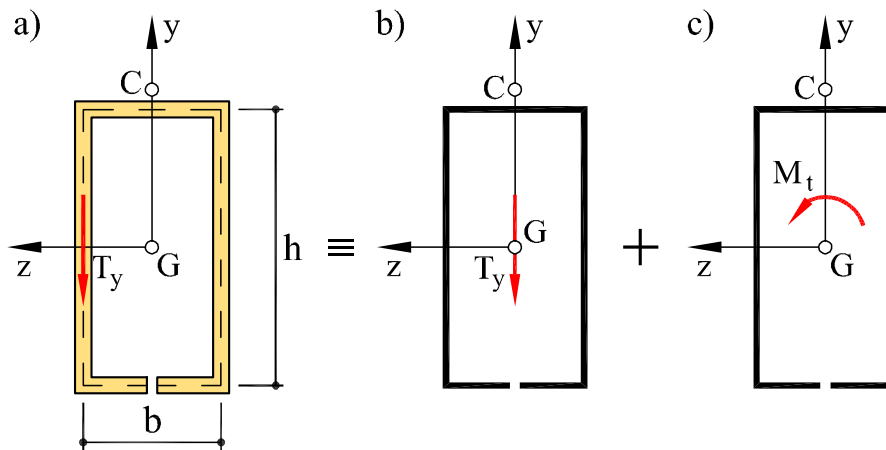


Fig. 9.21: a) Sección del Ejemplo 9.3.5.3 b) reducción del cortante T_y al centro de esfuerzos cortantes c) momento torsor real

C , el momento torsor real sobre la sección, con T_y expresado en Newtons, es:

$$M_t = 10 \cdot 10^{-2} T_y \text{ N} \cdot \text{m}$$

y su sentido es antihorario, como muestra la Figura 9.21c.

(b) La sección es abierta y de pequeño espesor. Las tensiones tangenciales máximas debidas al momento torsor M_t pueden calcularse mediante la expresión:

$$\tau_{\max}(M_t) = \frac{M_t e}{I_t}$$

siendo e el espesor de la sección. La inercia a torsión de la sección abierta es igual a:

$$I_t = \sum \frac{1}{3} b_i e_i^3 = \frac{1}{3} (2 \cdot 20 + 2 \cdot 40) \cdot 1^3 = 40,0 \text{ cm}^4$$

El valor máximo de las tensiones tangenciales debidas al momento torsor es:

$$\tau_{\max}(M_t) = \frac{10 \cdot 10^{-2} T_y \cdot 1 \cdot 10^{-2}}{40 \cdot 10^{-8}} \text{ Pa} = 2500 T_y \text{ Pa}$$

Con T_y expresado en Newtons. Para el esfuerzo cortante $T_y = 20 \text{ kN}$, la tensión tangencial máxima debida a la torsión es $\tau_{\max} = 50 \text{ MPa}$. Al ser el espesor constante en toda la sección, el valor de la tensión tangencial máxima es igual en toda la sección y se da en los contornos de la misma (Figura 9.22b).

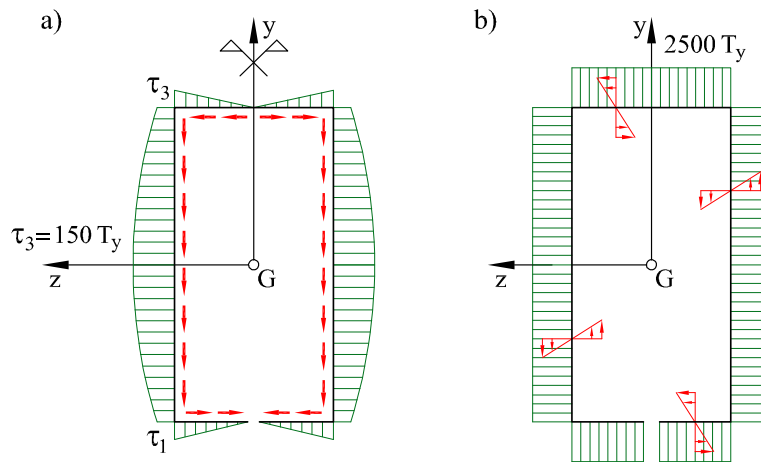


Fig. 9.22: Distribución de tensiones tangenciales debidas a T_y y a M_t

(c) La máxima tensión tangencial total que soporta la sección se obtiene por superposición de las tensiones tangenciales debidas al cortante T_y actuando en el centro de esfuerzos cortantes y las correspondientes al momento torsor real.

Las tensiones tangenciales debidas al cortante $T_y = 20$ kN, aplicado en el centro de esfuerzos cortantes (Figura 9.22a) se han calculado en el Ejemplo 8.5.1.2 del Capítulo 8. El valor máximo se da en el punto medio de las almas verticales y su valor es:

$$\tau_{\max}(T_y) = 150T_y \text{ Pa} = 3,0 \text{ MPa}$$

Por tanto, la tensión tangencial máxima total se da en el punto medio de las almas verticales y su valor es:

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}(T_y) + \tau_{\max}(M_t) = (150T_y + 2500T_y) \text{ Pa} = 53 \text{ MPa}$$

(d) El valor máximo del cortante T_y que puede soportar la sección para una tensión admisible $\tau_{\text{adm}} = 150$ MPa es:

$$\tau_{\max} = 2650T_y \text{ Pa} \leq \tau_{\text{adm}} \quad \Rightarrow \quad T_y = \frac{150 \cdot 10^6}{2650} \text{ N} = 56,60 \text{ kN}$$

A Características Geométricas de la Sección

A.1 Momento estático axial de una sección

Sea S una sección homogénea contenida en un plano sobre el que se sitúan unos ejes cartesianos dextrógiros (y, z) , tal como se muestra en la Figura A.1. Se definen como *momentos estáticos* de la sección respecto a los ejes (y, z) las integrales:

$$m_y = \int_S z dS \quad ; \quad m_z = \int_S y dS \quad (\text{A.1})$$

donde dS es un elemento diferencial de área e (y, z) son las distancias de éste a los ejes coordenados.

El momento estático de una sección respecto a un eje puede ser positivo, negativo o nulo, dependiendo de la distancia y posición de la sección respecto a éste. Las dimensiones del momento estático son $[L^3]$; por tanto, en el SI se miden en m^3 .

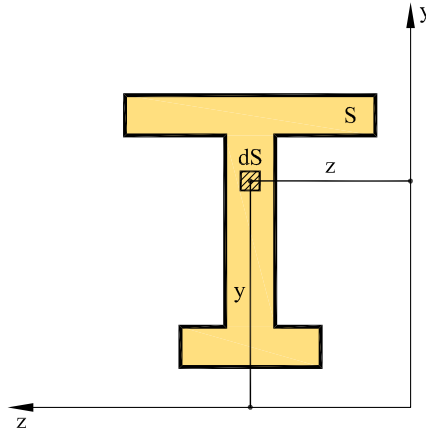


Fig. A.1: Momentos estáticos axiales de una sección

Centro de gravedad

Se define como *centro de gravedad* o *baricentro* de la sección S al punto G de coordenadas (y_G, z_G) que satisface las relaciones:

$$y_G = \frac{\int_S y dS}{\int_S dS} \quad ; \quad z_G = \frac{\int_S z dS}{\int_S dS} \quad (\text{A.2})$$

De las ecuaciones (A.1) y (A.2) se deduce que los momentos estáticos de la sección S con respecto a los ejes (y, z) se pueden expresar también en la forma

$$m_y = z_G A \quad ; \quad m_z = y_G A \quad (\text{A.3})$$

donde $A = \int_S dS$ es el área de la sección. Asimismo, se deduce de estas ecuaciones que el momento estático de una sección respecto a un eje es nulo si y sólo si dicho eje pasa por el baricentro de la sección.

Es fácil observar que si la sección S tiene un eje de simetría, el momento estático con respecto a dicho eje es cero. En efecto, para una sección en la que el eje y sea eje de simetría, por cada elemento dS con abscisa z positiva existe otro elemento idéntico dS' con abscisa z negativa, luego $m_y = 0$. En consecuencia, de las ecuaciones (A.2), $z_G = 0$, es decir, el centro de gravedad de la sección está situado sobre el eje de simetría.

Siguiendo el mismo procedimiento se demuestra también que si la sección tiene dos ejes de simetría, el baricentro coincide con el punto de intersección de los mismos. Teniendo en cuenta lo anterior es posible determinar con facilidad el centro de gravedad de algunas secciones, por ejemplo:

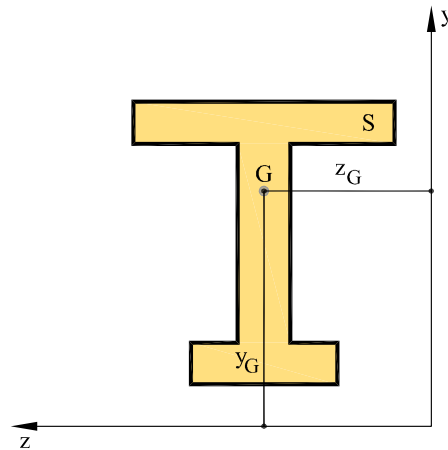


Fig. A.2: Centro de gravedad o baricentro de una sección

- *rectángulo o paralelogramo*: el baricentro coincide con el punto de intersección de las medianas o de las diagonales (ver Figura A.3). Cada una de las medianas es eje de simetría de la sección, y el momento estático de la sección respecto a ellas es nulo.
- *triángulo*: el baricentro está situado en el punto de intersección de las tres medianas (Figura A.4). Las medianas no son ejes de simetría, pero puede decirse que el área se dispone “simétricamente” a uno y otro lado.

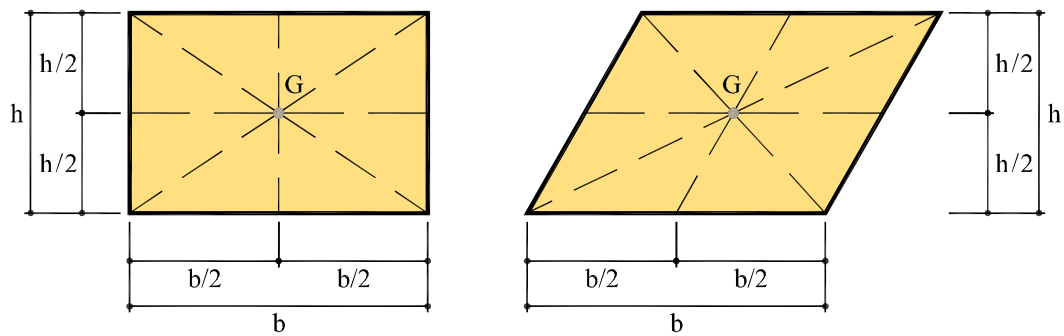


Fig. A.3: Baricentro: rectángulo y paralelogramo

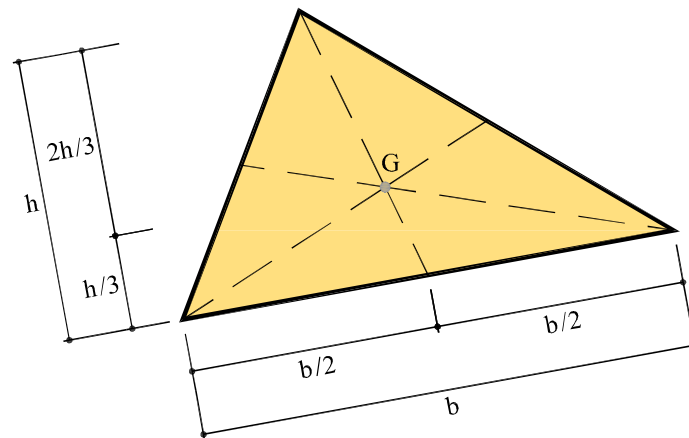


Fig. A.4: Baricentro de un triángulo

Ejemplo A.1.1

Para la sección de la Figura A.5, calcular: (a) el momento estático respecto al eje y' , (b) el momento estático respecto al eje z' , y (c) la posición del centro de gravedad G de la sección.

Datos: $b = 15$ cm, $h = 30$ cm, $e = 4$ cm.

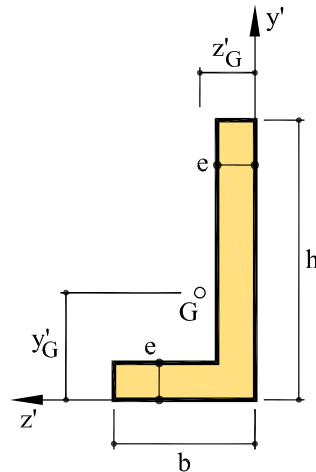


Fig. A.5: Sección del Ejemplo A.1.1

(a) Descomponiendo la sección en dos rectángulos: 15×4 cm \times cm en la base y 4×26 cm \times cm en el ala vertical, el momento estático de la sección respecto del eje y' es:

$$m_{y'} = \int_S z' dS = 15 \cdot 4 \cdot 7,5 + 4 \cdot 26 \cdot 2 = 658 \text{ cm}^3$$

(b) Procediendo de forma similar para el momento estático de la sección respecto al eje z' , se tiene:

$$m_{z'} = \int_S y' dS = 15 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 26 \cdot 17 = 1888 \text{ cm}^3$$

(c) Aplicando la Ec. (A.2) y teniendo en cuenta que:

$$\int_S dS = A = 15 \cdot 4 + 4 \cdot 26 = 164 \text{ cm}^2$$

la posición del centro de gravedad de la sección queda definida por:

$$y'_G = \frac{m_{z'}}{A} = \frac{1888}{164} = 11,51 \text{ cm}$$

$$z'_G = \frac{m'_y}{A} = \frac{658}{164} = 4,01 \text{ cm}$$

que son sus coordenadas respecto a los ejes y', z' .

A.2 Momentos de inercia de una sección

A.2.1 Momento de inercia axial y radio de giro

Sea S una sección homogénea contenida en un plano sobre el que se sitúan unos ejes cartesianos dextrógiros (y, z) . Se definen como *momentos de inercia* de la sección respecto a los ejes las integrales:

$$I_y = \int_S z^2 dS \quad ; \quad I_z = \int_S y^2 dS \quad (\text{A.4})$$

donde dS es un elemento diferencial de área e (y, z) son las distancias de éste a los ejes coordenados (Figura A.6).

El momento de inercia de una sección respecto a un eje es siempre positivo. Las dimensiones de los momentos de inercia son $[L^4]$; por tanto, en el SI se miden en m^4 .

Se denomina *radio de giro de la sección con respecto a un eje* a la raíz cuadrada de la relación entre el momento de inercia y el área de la sección.

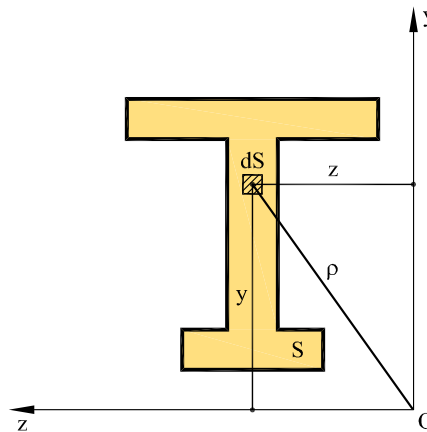


Fig. A.6: Momentos de inercia de una sección

Para los ejes (y, z) puede escribirse, respectivamente:

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} \quad ; \quad r_z^2 = \frac{I_z}{A} \quad (\text{A.5})$$

A.2.2 Momento de inercia polar

Sea S una sección contenida en un plano y O un punto de dicho plano (Figura A.6). Se define el momento de inercia polar I_o de la sección S respecto al punto O como la integral

$$I_o = \int_S \rho^2 dS \quad (\text{A.6})$$

donde dS es un elemento diferencial de área y ρ es su distancia al punto O .

Al igual que el momento de inercia axial, el momento polar es siempre positivo y sus dimensiones son $[L^4]$.

Si se trazan dos ejes ortogonales que pasen por el punto O (Figura A.6) y se miden las distancias y, z de un diferencial de área dS a dichos ejes, se puede escribir:

$$\rho^2 = y^2 + z^2 \quad (\text{A.7})$$

y, por tanto:

$$I_o = \int_S \rho^2 dS \quad (\text{A.8a})$$

$$= \int_S (y^2 + z^2) dS \quad (\text{A.8b})$$

$$= \int_S y^2 dS + \int_S z^2 dS \quad (\text{A.8c})$$

$$= I_z + I_y \quad (\text{A.8d})$$

Por tanto, el momento de inercia polar respecto a un punto O es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes ortogonales que pasen por dicho punto.

De la propiedad anterior también se concluye que la suma de momentos de inercia axiales es un invariante para cualquier par de ejes ortogonales que pasen por el mismo punto.

A.2.3 Producto de inercia

Se define el *producto de inercia* de la superficie S respecto a los ejes (y, z) como la integral

$$I_{yz} = \int_S yz dS \quad (\text{A.9})$$

El producto de inercia de una sección puede ser positivo, negativo o nulo. Sus dimensiones son $[L^4]$.

Si una sección S tiene un eje de simetría, el producto de inercia de la sección respecto a dicho eje y a otro eje perpendicular a éste es nulo. En efecto, a cada elemento diferencial de área dS con abscisa z positiva, le corresponde, por simetría, otro elemento idéntico con abscisa z negativa, cuya ordenada y tiene el mismo valor y signo, luego los productos de inercia de estos elementos diferenciales se anulan.

Ejemplo A.1.2

Para la sección rectangular de base b y altura h (Figura A.7), calcular: (a) el momento de inercia respecto al eje z' que pasa por su base y (b) el momento de inercia respecto al eje baricéntrico z_0 .

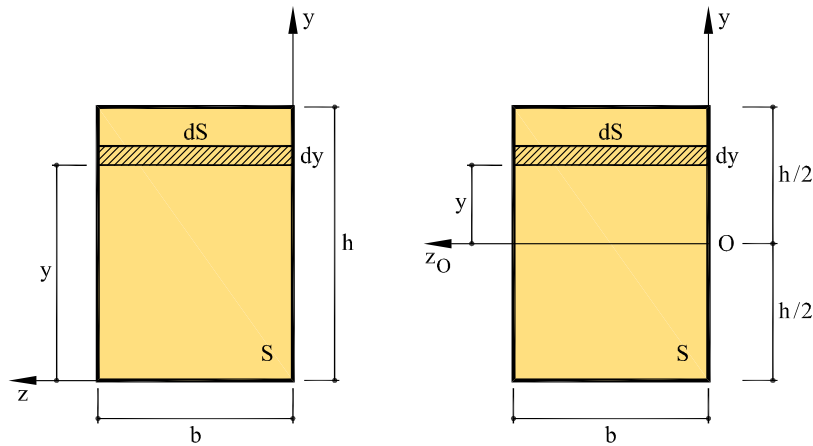


Fig. A.7: Sección rectangular del Ejemplo A.1.2

(a) El momento de inercia de la sección rectangular respecto al eje z' se obtiene aplicando la Ec. A.4. Como el ancho de la sección es constante, el diferencial de área puede expresarse por $dS = b dy$. Integrando entre $y = 0$ e $y = h$, se tiene:

$$I_z = \int_S y^2 dS = \int_0^h y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3} \quad (\text{A.10})$$

(b) Aplicando nuevamente la Ec. (A.4) para calcular la inercia de la sección respecto

al eje baricéntrico z_0 , integrando entre $y = -h/2$ e $y = +h/2$, se tiene:

$$I_z = \int_S y^2 dS = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{A.11})$$

Estos resultados se utilizan con frecuencia en las secciones que pueden descomponerse en suma de rectángulos.

Ejemplo A.1.3

Para la sección de la Figura A.8 calcular: (a) el momento de inercia respecto al eje y' , (b) el momento de inercia respecto al eje z' , (c) el momento de inercia polar respecto al punto O y (d) el producto de inercia de la sección.

Datos: $b = 15$ cm, $h = 30$ cm, $e = 4$ cm.

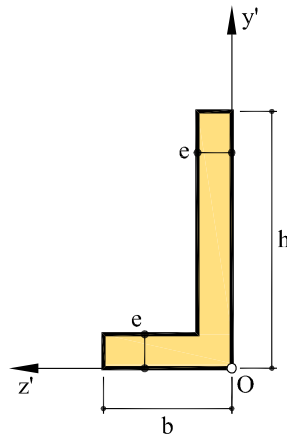


Fig. A.8: Sección del Ejemplo A.1.3

(a) Descomponiendo la sección en los rectángulos, $b \times e = 15 \times 4$ cm \times cm en la base y $e \times (h - e) = 4 \times 26$ cm \times cm en el ala vertical, el momento de inercia de la sección respecto al eje y' se obtiene aplicando la Ec.(A.10):

$$\begin{aligned} I_{y'} &= \frac{eb^3}{3} + \frac{(h-e)e^3}{3} \\ &= \frac{4 \cdot 15^3}{3} + \frac{26 \cdot 4^3}{3} = 5054,67 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

(b) Análogamente, descomponiendo la sección en los rectángulos, $(b - e) \times e = 11 \times 4 \text{ cm} \times \text{cm}$ en la base y $e \times h = 4 \times 30 \text{ cm} \times \text{cm}$ en el ala vertical, y aplicando la Ec.(A.10), el momento de inercia respecto al eje z' es:

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \frac{(b - e) e^3}{3} + \frac{e h^3}{3} \\ &= \frac{11 \cdot 4^3}{3} + \frac{4 \cdot 30^3}{3} = 36\,234,67 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

(c) El momento de inercia polar de la sección se calcula aplicando la Ec. (A.8a):

$$\begin{aligned} I_o &= \int_S \rho^2 dS = I_{z'} + I_{y'} \\ &= 5054,67 + 36234,67 = 41\,289,34 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

(d) Por último, aplicando la Ec. (A.9), el producto de inercia de la sección es igual a:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \int_S yz dS \\ &= (15 \cdot 4) \cdot 7,5 \cdot 2 + (4 \cdot 26) \cdot 2 \cdot 17 = 4\,436 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

A.3 Traslación de ejes de referencia

A.3.1 Momento de inercia axial

Sea z_o un eje baricéntrico de la sección S y sea z un eje paralelo a éste a una distancia d_y del anterior (Figura A.9). El momento de inercia I_z puede calcularse como:

$$I_z = \int_S y^2 dS \quad (\text{A.12a})$$

$$= \int_S (y_o + d_y)^2 dS \quad (\text{A.12b})$$

$$= \int_S y_o^2 dS + 2d_y \int_S y_o dS + d_y^2 \int_S dS \quad (\text{A.12c})$$

$$= I_{z_o} + d_y^2 A \quad (\text{A.12d})$$

donde la segunda integral de la ecuación (A.12c) es nula por ser z_o un eje baricéntrico. Por tanto, *el momento de inercia de una sección respecto a un eje arbitrario es igual a la suma del momento de inercia respecto al eje baricéntrico paralelo al eje anterior más el área de la sección multiplicada por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes (Teorema de Steiner).*

$$I_z = I_{z_o} + d_y^2 A \quad (\text{A.13})$$

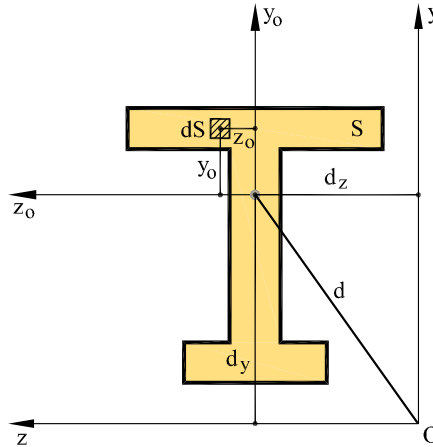


Fig. A.9: Traslación de ejes de referencia

Dividiendo esta ecuación por el área de la sección se tiene:

$$r_z^2 = r_{z_0}^2 + d_y^2 \quad (\text{A.14})$$

Esta expresión permite conocer el radio de inercia de la sección respecto a un eje en función del radio de inercia respecto a un eje baricéntrico paralelo.

A.3.2 Momento de inercia polar

Sean I_y e I_z los momentos de inercia de una sección respecto a dos ejes que se cortan en el punto O , y sea I_O el momento de inercia polar de la sección respecto a dicho punto. Si se consideran dos ejes baricéntricos (y_0, z_0) paralelos a los anteriores (ver Figura A.6), y se aplica el Teorema de Steiner, se obtiene:

$$I_O = I_y + I_z = I_{y_0} + d_z^2 A + I_{z_0} + d_y^2 A = I_G + d^2 A \quad (\text{A.15})$$

Las ecuaciones anteriores permiten obtener el momento de inercia polar de una sección respecto a un punto cualquiera O , a partir del momento de inercia polar de la sección respecto al baricentro G y la distancia entre ambos puntos.

A.3.3 Producto de inercia

De igual manera, si se conoce el producto de inercia de una sección respecto a unos ejes ortogonales (y_0, z_0) baricéntricos, y se desea obtener el valor del producto de inercia

respecto a unos ejes coordenados (y, z) , paralelos a los anteriores y situados a distancias d_y, d_z de los ejes baricéntricos (ver Figura A.6), se tiene que

$$I_{yz} = \int_S y z dS = \int_S (y_o + d_y) (z_o + d_z) dS \quad (\text{A.16a})$$

$$= \int_S y_o z_o dS + d_y \int_S z_o dS + d_z \int_S y_o dS + d_y d_z \int_S dS \quad (\text{A.16b})$$

$$= I_{y_o z_o} + d_y d_z A \quad (\text{A.16c})$$

donde se ha sustituido $y = y_o + d_y$, $z = z_o + d_z$. Los sumandos segundo y tercero de la ecuación (A.16b) son nulos por ser los momentos estáticos de la sección respecto a dos ejes baricéntricos.

Ejemplo A.1.4

Para la sección de la Figura A.10, calcular: (a) los momentos de inercia respecto a los ejes y_o, z_o que pasan por el centro de gravedad de la sección G , (b) los radios de giro correspondientes y (c) el producto de inercia de la sección respecto a dichos ejes baricéntricos.

Datos: $b = 15$ cm, $h = 30$ cm, $e = 4$ cm, $A = 164$ cm².

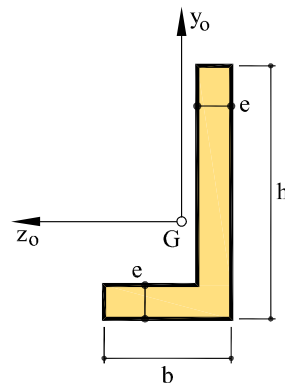


Fig. A.10: Sección del Ejemplo A.1.4

(a) La posición del centro de gravedad G de la sección se determinó en el Ejemplo A.1.1, las coordenadas del mismo respecto de los ejes coordenados y', z' son:

$$y'_G = 11,51 \text{ cm} \quad z'_G = 4,01 \text{ cm}$$

El momento de inercia respecto al eje baricéntrico y_o puede calcularse descomponiendo la sección en los rectángulos, $11 \times 4 \text{ cm} \times \text{cm}$ en la base y $4 \times 30 \text{ cm} \times \text{cm}$ en el ala vertical, y aplicando el teorema de Steiner. Teniendo en cuenta la Ec. (A.11) se tiene:

$$\begin{aligned} I_{y_o} &= \frac{4 \cdot 11^3}{12} + 4 \cdot 11 \cdot 5,49^2 + \frac{30 \cdot 4^3}{12} + 30 \cdot 4 \cdot 2,01^2 \\ &= 2414,64 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

De forma análoga, se calcula el momento de inercia de la sección respecto al eje baricéntrico z_o :

$$\begin{aligned} I_{z_o} &= \frac{11 \cdot 4^3}{12} + 4 \cdot 11 \cdot 9,51^2 + \frac{4 \cdot 30^3}{12} + 30 \cdot 4 \cdot 3,49^2 \\ &= 14499,64 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

(b) Los radios de giro de la sección correspondientes a los ejes baricéntricos y_o, z_o son:

$$\begin{aligned} r_{y_o}^2 &= \frac{I_{y_o}}{A} = \frac{2414,64}{164} = 14,72 \text{ cm}^2 \Rightarrow r_{y_o} = 3,84 \text{ cm} \\ r_{z_o}^2 &= \frac{I_{z_o}}{A} = \frac{14499,64}{164} = 88,41 \text{ cm}^2 \Rightarrow r_{z_o} = 9,40 \text{ cm} \end{aligned}$$

(c) El producto de inercia de la sección puede determinarse aplicando la Ec. (A.9):

$$\begin{aligned} I_{y_o z_o} &= \int_S y_o z_o dS \\ &= (11 \cdot 4) \cdot 5,49 \cdot (-9,51) + (4 \cdot 30) \cdot (-2,01) \cdot 3,49 = -3139,03 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

A.4 Rotación de ejes de referencia

Sean (y, z) e (y_1, z_1) dos sistemas de ejes coordenados que forman entre sí un ángulo α , tal como se muestra en la Figura A.11. Las coordenadas en el sistema (y_1, z_1) pueden expresarse en función de las coordenadas en el sistema (y, z) en la forma:

$$y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha \quad (\text{A.17a})$$

$$z_1 = -y \sin \alpha + z \cos \alpha \quad (\text{A.17b})$$

Utilizando estas ecuaciones, el momento de inercia de la sección respecto al eje y_1 es:

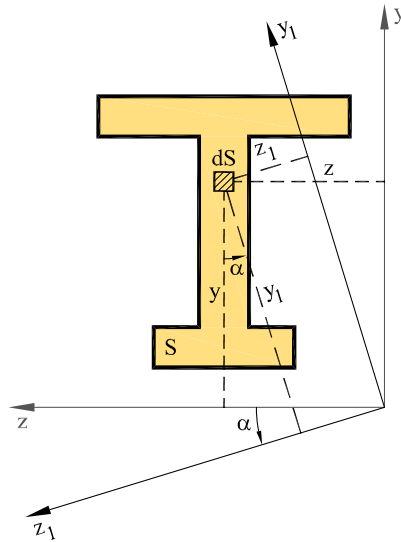


Fig. A.11: Rotación de ejes de referencia

$$I_{y_1} = \int_S z_1^2 dS \quad (\text{A.18a})$$

$$= \int_S (-y \sin \alpha + z \cos \alpha)^2 dS \quad (\text{A.18b})$$

$$= \int_S y^2 \sin^2 \alpha dS - \int_S yz 2 \sin \alpha \cos \alpha dS + \int_S z^2 \cos^2 \alpha dS \quad (\text{A.18c})$$

$$= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha - 2 I_{yz} \sin \alpha \cos \alpha \quad (\text{A.18d})$$

Análogamente pueden calcularse las expresiones:

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + 2 I_{yz} \sin \alpha \cos \alpha \quad (\text{A.19a})$$

$$I_{y_1 z_1} = (I_y - I_z) \cos \alpha \sin \alpha + I_{yz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (\text{A.19b})$$

Las ecuaciones anteriores se pueden reescribir en la forma:

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \quad (\text{A.20a})$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \quad (\text{A.20b})$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \quad (\text{A.20c})$$

donde se han utilizado las igualdades trigonométricas:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad ; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (\text{A.21a})$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad ; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (\text{A.21b})$$

Ejemplo A.1.5

Para la sección de la Figura A.12, calcular: (a) los momentos de inercia respecto a los ejes y_1 y z_1 que pasan por el centro de gravedad de la sección G , y forman con los ejes y_o, z_o un ángulo $\alpha = 30^\circ$ y (b) el producto de inercia respecto a los ejes y_1 y z_1 .

Datos: $b = 15 \text{ cm}$, $h = 30 \text{ cm}$, $e = 4 \text{ cm}$, $A = 164 \text{ cm}^2$, $I_{y_o} = 2414,64 \text{ cm}^4$, $I_{z_o} = 14499,64 \text{ cm}^4$, $I_{y_o z_o} = -3139,03 \text{ cm}^4$

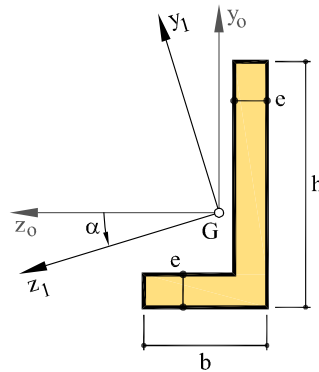


Fig. A.12: Sección del Ejemplo A.1.5

(a) Los momentos de inercia respecto a los ejes y_1 y z_1 , que forman un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con los anteriores, pueden calcularse aplicando las Ecs. (A.20a) y (A.20b).

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \frac{I_{y_o} + I_{z_o}}{2} + \frac{I_{y_o} - I_{z_o}}{2} \cos 2\alpha - I_{y_o z_o} \sin 2\alpha \\ &= \frac{2414,64 + 14499,64}{2} + \frac{2414,64 - 14499,64}{2} \cdot 0,5 - (-3139,03) \cdot 0,866 \\ &= 8154,29 \text{ cm}^4 \\ I_{z_1} &= \frac{I_{y_o} + I_{z_o}}{2} - \frac{I_{y_o} - I_{z_o}}{2} \cos 2\alpha + I_{y_o z_o} \sin 2\alpha \\ &= \frac{2414,64 + 14499,64}{2} - \frac{2414,64 - 14499,64}{2} \cdot 0,5 + (-3139,03) \cdot 0,866 \\ &= 8759,60 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

(b) El producto de inercia de la sección respecto a los ejes y_1, z_1 se puede calcular aplicando la Ec. (A.20c):

$$\begin{aligned} I_{y_1 z_1} &= \frac{I_{y_o} - I_{z_o}}{2} \sin 2\alpha + I_{y_o z_o} \cos 2\alpha \\ &= \frac{2414,64 - 14499,64}{2} \cdot 0,866 + (-3139,03) \cdot 0,5 \\ &= -6802,33 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

A.5 Ejes principales de inercia

En toda sección plana se pueden hallar dos ejes ortogonales baricéntricos para los que se cumple que el producto de inercia de la sección respecto a ellos es nulo. A estos ejes se les denomina *ejes principales de inercia*, y resultan de gran importancia en el estudio de la flexión de piezas prismáticas.

El ángulo α que los ejes principales de inercia de una sección (y, z) forman con otro sistema de ejes baricéntrico (v, w) (ver Figura A.13), se obtiene igualando a cero la ecuación (A.20c) aplicada a los ejes (v, w) . De esta forma se obtiene:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{vw}}{I_v - I_w} \quad (\text{A.22})$$

Nótese que si una sección es simétrica respecto a un eje, el sistema formado por dicho eje y otro eje baricéntrico perpendicular a éste es principal de inercia, ya que el correspondiente producto de inercia es nulo.

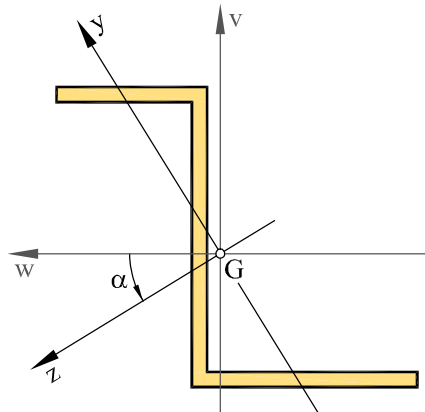


Fig. A.13: Ejes principales de una sección

Si a partir de las Ecs. (A.20a) o (A.20b), se busca el ángulo α para el que I_{v_1} e I_{w_1} son máximo o mínimo, se obtiene:

$$\frac{\partial I_{v_1}}{\partial \alpha} = -(I_v - I_w) \sin 2\alpha - 2I_{vw} \cos 2\alpha = 0 \quad (\text{A.23})$$

de donde

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{vw}}{I_v - I_w} \quad (\text{A.24})$$

Esta ecuación coincide con la (A.22). Se concluye, por tanto, que *los valores de los momentos principales de inercia corresponden al máximo y mínimo momento de inercia axiales de la sección respecto a ejes baricéntricos.*

En el caso particular de que los dos momentos de inercia principales sean iguales, $I_y = I_z$, entonces el momento de inercia vale lo mismo respecto de cualquier eje baricéntrico. Además, el producto de inercia será nulo respecto de cualquier sistema de ejes baricéntricos ortogonales y, por tanto, cualquier eje baricéntrico es eje principal de inercia de la sección. Tal es el caso, por ejemplo, de la sección circular o de la sección cuadrada.

Si se expresan los valores $\sin 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$, en función del valor $\tan 2\alpha$ y se sustituyen en las ecuaciones (A.20a)-(A.20b) se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} I_z \\ I_y \end{array} \right\} = \frac{I_v + I_w}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_v - I_w}{2}\right)^2 + (I_{vw})^2} \quad (\text{A.25})$$

expresión alternativa que permite calcular los momentos de inercia principales I_y, I_z conocidos los valores de los momentos de inercia I_v, I_w, I_{vw} con respecto a unos ejes (v, w) cualesquiera.

Los *radios de giro principales* de la sección, r_y y r_z , asociados a las direcciones principales de inercia de una sección, son:

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} \quad ; \quad r_z^2 = \frac{I_z}{A} \quad (\text{A.26})$$

Ejemplo A.1.6

Para la sección de la Figura A.14, calcular: (a) las direcciones principales de inercia y los momentos de inercia correspondientes, (b) los radios de giro asociados a las direcciones principales de inercia de la sección.

Datos: $b = 15$ cm, $h = 30$ cm, $e = 4$ cm, $A = 164$ cm².

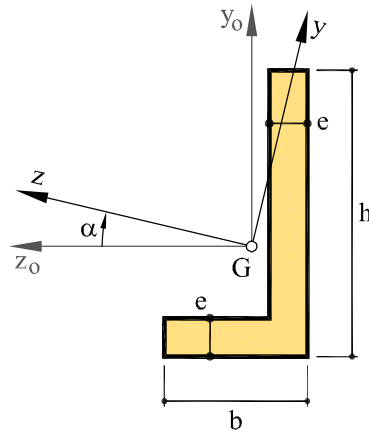


Fig. A.14: Sección del Ejemplo A.1.6

(a) El ángulo α que los ejes principales de inercia de una sección (y, z) forman con otro sistema de ejes baricéntrico (y_0, z_0) (ver Figura A.14) se obtiene igualando a cero la ecuación (A.20c) aplicada a los ejes (y_0, z_0) . De esta forma se obtiene:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{y_0z_0}}{I_{y_0} - I_{z_0}}$$

Los momentos de inercia de la sección respecto a los ejes baricéntricos (y_0, z_0) se han calculado en el Ejemplo A.1.4:

$$I_{y_0} = 2414,64 \text{ cm}^4 \quad I_{z_0} = 14499,64 \text{ cm}^4 \quad I_{y_0z_0} = -3139,03 \text{ cm}^4$$

Por tanto, el ángulo α es igual a:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2(-3139,03)}{2414,64 - 14499,64} = -0,5195 \Rightarrow \alpha = -13^\circ 43' 32''$$

Los ejes principales de inercia de la sección, (y, z) forman con los ejes baricéntricos (y_0, z_0) un ángulo $\alpha = -13^\circ 43' 32''$ (Figura A.14). El signo negativo indica que el ángulo α es horario. Los momentos de inercia principales pueden calcularse aplicando

la Ec.(A.25):

$$\left. \begin{array}{l} I_z \\ I_y \end{array} \right\} = \frac{I_{y_o} + I_{z_o}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_o} - I_{z_o}}{2}\right)^2 + (I_{y_o z_o})^2}$$

$$= \frac{2414,64 + 14499,64}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2414,64 - 14499,64}{2}\right)^2 + (-3139,03)^2}$$

$$= \begin{cases} 15266,35 \text{ cm}^4 \\ 1647,93 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

(b) Los radios de giro asociados a las direcciones principales son:

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{1647,93}{164} = 10,05 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad r_y = 3,17 \text{ cm}$$

$$r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{15266,35}{164} = 93,09 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad r_z = 9,65 \text{ cm}$$

A.6 Secciones de pequeño espesor

En la práctica se utilizan frecuentemente secciones en las que el espesor es muy pequeño en relación con las restantes dimensiones de la sección. Un ejemplo de ello son los perfiles metálicos. En esos casos, las características geométricas pueden calcularse de forma más simplificada, como puede verse en el ejemplo siguiente.

Ejemplo A.1.7

Para la sección de la Figura A.15a calcular: (a) la posición del centro de gravedad y (b) los momentos de inercia de la sección respecto a los ejes principales de la sección. Datos: $a = 20 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $h = 30 \text{ cm}$, $e = 1,2 \text{ cm}$.

(a) La sección es de pequeño espesor y para el cálculo de las características geométricas se utiliza la simplificación que se muestra en la Figura A.15b. El eje vertical que coincide con el eje del alma es un eje de simetría de la sección. Por tanto, el centro de gravedad estará situado sobre él. La coordenada y'_G respecto a la línea media del ala inferior de la sección nos permitirá situarlo (Figura A.15c).

El área de la sección es:

$$A = (20 + 10 + 30) \cdot 1,2 = 72 \text{ cm}^2$$

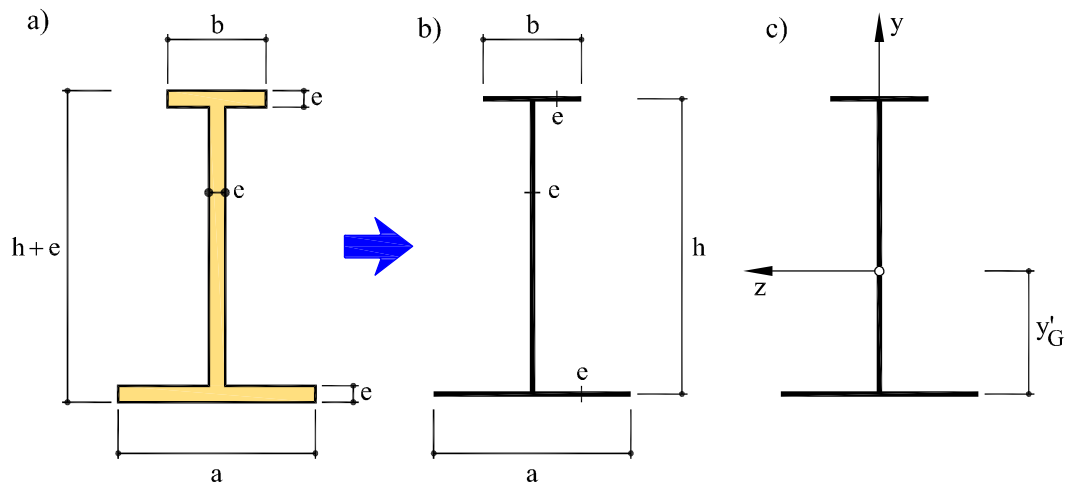


Fig. A.15: Sección de pequeño espesor

El momento estático de la sección respecto a la línea media del ala inferior de la sección es:

$$m_{z'}^e = 10 \cdot 1,2 \cdot 30 + 30 \cdot 1,2 \cdot 15 = 750 \text{ cm}^3$$

y la coordenada y'_G es:

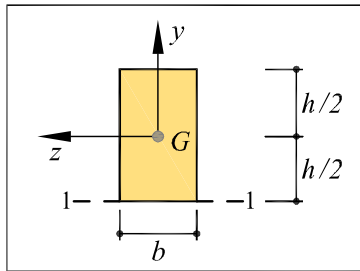
$$y'_G = \frac{m_{z'}^e}{A} = \frac{900}{72} = 12,5 \text{ cm}$$

(b) Los ejes baricéntricos y, z son los ejes principales de la sección, ya que el eje y es un eje de simetría de la sección. Los momentos de inercia principales de la sección son:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{1,2 \cdot 20^3}{12} + \frac{30 \cdot 1,2^3}{12} + \frac{1,2 \cdot 10^3}{12} \\ &= 904,32 \text{ cm}^4 \\ I_z &= 20 \cdot 1,2 \cdot 12,5^2 + \frac{1,2 \cdot 30^3}{12} + 30 \cdot 1,2 \cdot 2,5^2 + 10 \cdot 1,2 \cdot 17,5^2 \\ &= 10350 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Nótese que en el cálculo del momento de inercia I_z se han despreciado los términos correspondientes a los momentos de inercia baricéntricos de las alas inferior y superior por ser despreciables frente a los términos restantes.

A.7 Características geométricas de algunas secciones planas

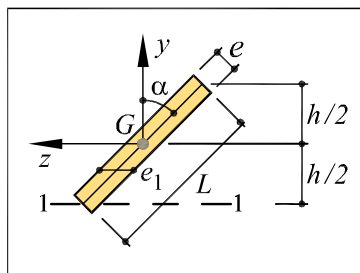


Rectángulo

$$A = bh$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_1 = \frac{bh^3}{3}$$

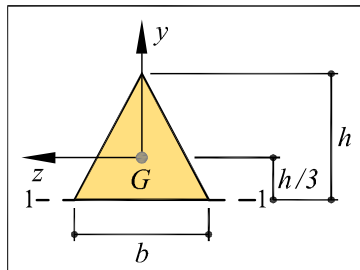


Rectángulo delgado $L \gg e$

$$A = eL = e_1h \quad e_1 = \frac{e}{\cos \alpha}$$

$$I_z = \frac{eL^3}{12} \cos^2 \alpha = \frac{e_1h^3}{12}$$

$$I_1 = \frac{eL^3}{3} \cos^2 \alpha = \frac{e_1h^3}{3}$$

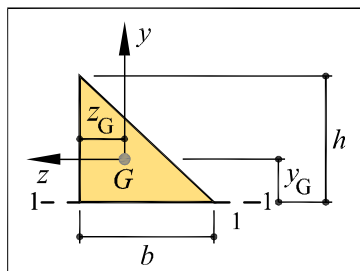


Triángulo isósceles

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{48} \quad I_z = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_1 = \frac{bh^3}{12}$$

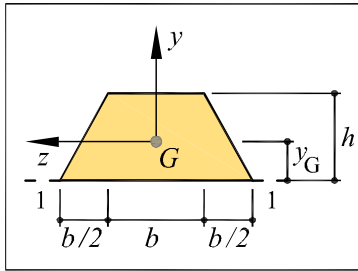


Triángulo rectángulo

$$A = \frac{bh}{2} \quad y_G = \frac{h}{3} \quad z_G = \frac{b}{3}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{36} \quad I_z = \frac{bh^3}{36}$$

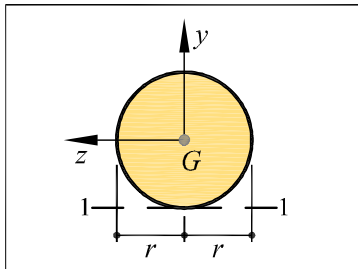
$$I_1 = \frac{bh^3}{12}$$

**Trapezio**

$$A = \frac{(a+b)h}{2} \quad y_G = \frac{(2a+b)h}{3(a+b)}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad I_z = \frac{bh^3}{12}$$

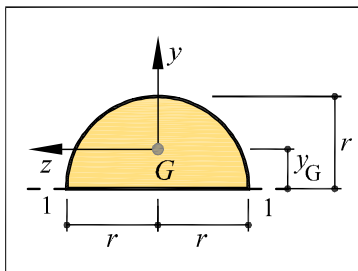
$$I_1 = \frac{bh^3}{3}$$

**Círculo**

$$A = \pi r^2$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{4}$$

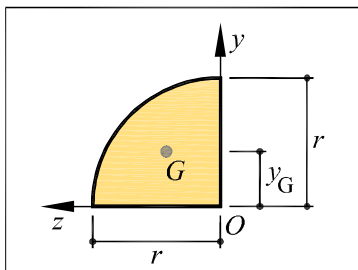
$$I_1 = \frac{5}{4}\pi r^4$$

**Semicírculo**

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \quad y_G = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_y = \frac{\pi r^4}{8} \quad I_z = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4$$

$$I_1 = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{8}{9\pi}\right) r^4$$

**Cuadrante (ejes y, z con origen en O)**

$$A = \frac{\pi r^2}{4} \quad y_G = z_G = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{16}$$

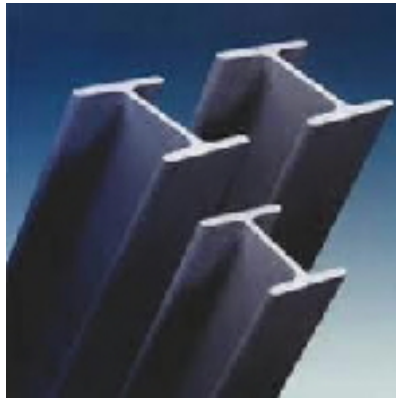
$$I_{z_G} = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{144\pi} \simeq 0.0549r^4$$

B Perfiles Estructurales de Acero

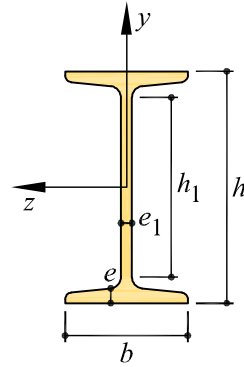
Se presentan de forma resumida las propiedades mecánicas de algunos perfiles estructurales de acero utilizados en los problemas de este Libro. Una información más completa puede obtenerse en los prontuarios de perfiles estructurales de acero.

Los ejes y, z son los ejes principales de los perfiles, siguiendo la notación utilizada en este Libro. Para las propiedades mecánicas restantes se adopta la notación siguiente:

- A: área de la sección transversal (cm^2)
- p: peso por metro lineal del perfil (N/m)
- I_y : momento de inercia de la sección respecto al eje principal y (cm^4)
- I_z : momento de inercia de la sección respecto al eje principal z (cm^4)
- W_i : módulo resistente respecto al eje i (cm^3)
- I_t : módulo de torsión de la sección (cm^4)
- I_w : módulo de alabeo de la sección (cm^6)

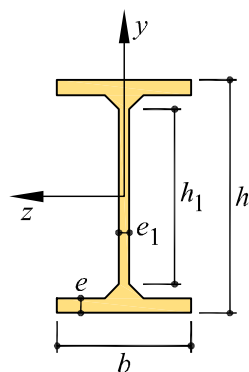


PERFIL IPN



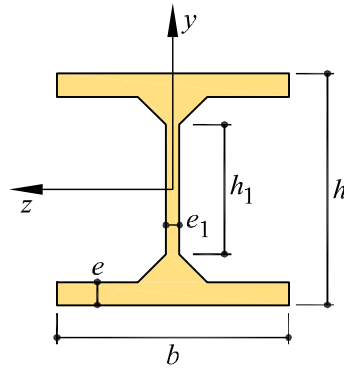
IPN	Dimensiones mm					A cm ²	P N/m	I _y cm ⁴	W _y cm ³	I _z cm ⁴	W _z cm ³	I _t cm ⁴	I _w x10 ³ cm ⁶
	h	b	e	e ₁	h ₁								
80	80	42	5,9	3,9	59	7,58	59,5	6,29	3,00	77,8	19,5	0,93	0,087
100	100	50	6,8	4,5	75	10,6	83,2	12,2	4,88	171	34,2	1,72	0,27
120	120	58	7,7	5,1	92	14,2	111	21,5	7,41	328	54,7	2,92	0,69
140	140	66	8,6	5,7	109	18,3	144	35,2	10,7	573	81,9	4,66	1,54
160	160	74	9,5	6,3	125	22,8	179	54,7	14,8	935	117	7,08	3,14
180	180	82	10,4	6,9	142	27,9	219	81,3	19,8	1450	161	10,3	5,92
200	200	90	11,3	7,5	159	33,5	263	117	26,0	2140	214	14,6	10,5
220	220	98	12,2	8,1	175	39,6	311	162	33,1	3060	278	20,1	17,8
240	240	106	13,1	8,7	192	46,1	362	221	41,7	4250	354	27,0	28,7
260	260	113	14,1	9,4	208	53,4	419	288	51,0	5740	442	36,1	44,1
280	280	119	15,2	10,1	225	61,1	480	364	61,2	7590	542	47,8	64,6
300	300	125	16,2	10,8	241	69,1	542	451	72,2	9800	653	61,2	91,9
320	320	131	17,3	11,5	257	77,8	611	555	84,7	12510	782	78,2	12,8
340	340	137	18,3	12,2	274	86,8	681	674	98,4	15700	923	97,5	176
360	360	143	19,5	13,0	290	97,1	762	818	114	19610	1090	123	240
380	380	149	20,5	13,7	306	107	840	975	131	24010	1260	150	319
400	400	155	21,6	14,4	323	118	926	1160	149	29210	1460	183	420
450	450	170	24,3	16,2	363	147	1150	1730	203	45850	2040	288	791
500	500	185	27,0	18,0	404	180	1410	2480	268	68740	2750	449	1403
550	550	200	30,0	19,0	444	213	1670	3490	349	99180	3610	618	2389
600	600	215	32,4	21,6	485	254	1990	4670	434	139000	4630	875	3821

PERFIL IPE



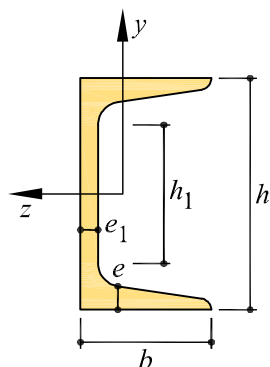
IPE	Dimensiones mm					A cm ²	p N/m	I _y cm ⁴	W _y cm ³	I _z cm ⁴	W _z cm ³	I _t cm ⁴	I _w x10 ³ cm ⁶
	h	b	e	e ₁	h ₁								
80	80	46	5,2	3,8	59	7,64	60,0	8,49	3,69	80,1	20,0	0,70	0,12
100	100	55	5,7	4,1	74	10,3	81,0	15,9	5,79	171	34,2	1,20	0,35
120	120	64	6,3	4,4	93	13,2	104	27,7	8,65	318	53,0	1,74	0,89
140	140	73	6,9	4,7	112	16,4	129	44,9	12,3	541	77,3	2,45	1,98
160	160	82	7,4	5,0	127	20,1	158	68,3	16,7	869	109	3,60	3,96
180	180	91	8,0	5,3	146	23,9	188	101	22,2	1320	146	4,79	7,43
200	200	100	8,5	5,6	159	28,5	224	142	28,5	1940	194	6,98	13,0
220	220	110	9,2	5,9	177	33,4	262	205	37,3	2770	252	9,07	22,7
240	240	120	9,8	6,2	190	39,1	307	284	47,3	3890	324	12,9	37,4
270	270	135	10,2	6,6	219	45,9	361	420	62,2	5790	429	15,9	70,6
300	300	150	10,7	7,1	248	53,8	422	604	80,5	8360	557	20,1	126
330	330	160	11,5	7,5	271	62,6	491	788	98,5	11770	713	28,2	199
360	360	170	12,7	8,0	298	72,7	571	1040	123	16270	904	37,3	314
400	400	180	13,5	8,6	331	84,5	663	1320	146	23130	1160	51,1	490
450	450	190	14,6	9,4	378	98,8	776	1680	176	33740	1500	66,9	791
500	500	200	16,0	10,2	426	116	907	2140	214	48200	1930	89,3	1249
550	550	210	17,2	11,1	467	134	1060	2670	254	67120	2440	123	1884
600	600	220	19,0	12,0	514	156	1220	3390	308	92080	3070	165	2855

PERFIL HEB



HEB	Dimensiones mm					A cm ²	p N/m	I _y cm ⁴	W _y cm ³	I _z cm ⁴	W _z cm ³	I _t cm ⁴	I _w x10 ³ cm ⁶
	h	b	e	e ₁	h ₁								
100	100	100	10	6,0	56	26,0	204	167	33,5	450	89,9	9,25	3,38
120	120	120	11	6,5	74	34,0	267	318	52,9	864	144	13,8	9,41
140	140	140	12	7,0	92	43,0	337	550	78,5	1510	216	20,1	22,5
160	160	160	13	8,0	104	54,3	426	889	111	2490	311	31,2	47,9
180	180	180	14	8,5	122	65,3	512	1360	151	3830	426	42,2	93,8
200	200	200	15	9,0	134	78,1	613	2000	200	5700	570	59,3	171
220	220	220	16	9,5	152	91,0	715	2840	258	8090	736	76,6	295
240	240	240	17	10,0	164	106	832	3920	327	11260	938	103	487
260	260	260	17,5	10,0	177	118	930	5130	395	14920	1150	124	754
280	280	280	18	10,5	196	131	1030	6590	471	19270	1380	144	1130
300	300	300	19	11,0	208	149	1170	8560	571	25170	1680	185	1688
320	320	300	20,5	11,5	225	161	1270	9240	616	30820	1930	225	2069
340	340	300	21,5	12,0	243	171	1340	9690	646	36660	2160	257	2454
360	360	300	22,5	12,5	261	181	1420	10140	676	43190	2400	292	2883
400	400	300	24	13,5	298	198	1550	10820	721	57680	2880	356	3817
450	450	300	26	14,0	344	218	1710	11720	781	78890	3550	440	5259
500	500	300	28	14,5	390	239	1870	12620	842	107200	4290	538	7018
550	550	300	29	15,0	438	254	1990	13080	872	136700	4970	600	8856
600	600	300	30	15,5	486	270	2120	13530	902	171000	5700	667	10965

PERFIL UPN



UPN	Dimensiones mm					A cm ²	p N/m	I _y cm ⁴	W _y cm ³	I _z cm ⁴	W _z cm ³	I _t cm ⁴	I _w x10 ³ cm ⁶
	h	b	e	e ₁	h ₁								
80	80	45	8,0	6,0	46	11,0	86,4	19,4	6,36	106	26,5	2,20	0,18
100	100	50	8,5	6,0	64	13,5	106	29,3	8,49	206	41,2	2,81	0,41
120	120	55	9,0	7,0	82	17,0	134	43,2	11,1	364	60,7	4,15	0,90
140	140	60	10,0	7,0	98	20,4	160	62,7	14,8	605	86,4	5,68	1,80
160	160	65	10,5	7,5	115	24,0	188	85,3	18,3	925	116	7,39	3,26
180	180	70	11,0	8,0	133	28,0	220	114	22,4	1350	150	9,55	5,57
200	200	75	11,5	8,5	151	32,2	253	148	27,0	1910	191	11,9	9,07
220	220	80	12,5	9,0	167	37,4	294	197	33,6	2690	245	16,0	14,6
240	240	85	13,0	9,5	184	42,3	332	248	39,6	3600	300	19,7	22,1
260	260	90	14,0	10,0	200	48,3	379	317	47,7	4820	371	25,5	33,3
280	280	95	15,0	10,0	216	53,3	418	399	57,2	6280	448	31,0	48,5
300	300	100	16,0	10,0	232	58,8	462	495	67,8	8030	535	37,4	69,1
320	320	100	17,5	14,0	246	75,8	595	597	80,6	10870	679	66,7	96,1
350	340	100	16,0	14,0	282	77,3	606	570	75,0	12840	734	61,2	114
380	380	102	16,0	13,5	313	80,4	631	615	78,7	15760	829	59,1	146
400	400	110	18,0	14,0	324	91,5	718	846	102	20350	1020	81,6	221

C Tablas

C.1 Magnitudes y Unidades de la Mecánica

Se denominan *magnitudes fundamentales* o *unidades básicas* de la Mecánica a aquellas magnitudes físicas a partir de las cuales pueden expresarse todas las demás que intervienen en un problema mecánico, que a su vez se llaman *magnitudes derivadas* o *unidades derivadas*.

El Sistema Internacional de Unidades (SI) es un sistema adoptado oficialmente en 1960. Se eligen como unidades básicas, el metro (m) para la longitud, el segundo (s) para el tiempo y el kilogramo (kg) para la masa; las magnitudes restantes se derivan de ellas.

El número de unidades básicas varía según el problema a analizar. Así, por ejemplo, en un problema dado puede intervenir o no el tiempo, o la masa.

Hasta el año 1983, *el metro* se definía como la diezmillonésima parte de la distancia del polo norte al ecuador. Existía una barra de platino-iridio con dos marcas que materializaban esta definición. En 1983, para evitar los errores que pudieran producirse al usar como patrón una barra física, dicha definición se cambió. En la actualidad, se utiliza como patrón del *metro* a la longitud de la trayectoria que recorre la luz en el vacío durante un intervalo de $1/299792458$ de segundo.

El *segundo* se define como la duración de 9192631770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio-133.

Magnitud	Sistema Internacional (SI)		
	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración (lineal)	metro por seg. cuadrado		m/s^2
Ángulo	radián		rad
Área	metro cuadrado		m^2
Densidad	kilog. por metro cúbico		kg/m^3
Peso específico	newton por metro cúbico		N/m^3
Energía; trabajo	joule	J	$\text{N}\cdot\text{m}$
Fuerza	newton	N	$\text{kg}\cdot\text{m/s}$
Fuerza por unidad de longitud	newton por metro		N/m
Longitud	metro	m	unidad básica
Masa	kilogramo	kg	unidad básica
Momento de una fuerza	newton metro		$\text{N}\cdot\text{m}$
Momento de inercia (sección)	metro a la cuarta		m^4
Módulo resistente (sección)	metro cúbico		m^3
Potencia	watt	W	$\text{J/s} = \text{N}\cdot\text{m/s}$
Presión	pascal	Pa	N/m^2
Tensión	pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	segundo	s	unidad básica
Velocidad (lineal)	metro por segundo		m/s
Volumen	metro cúbico		m^3

Tabla C.1: Unidades usadas en Mecánica

El *kilogramo* masa es la única unidad básica del SI que todavía se define por medio de un objeto físico. El patrón en este caso es un cilindro de un kilogramo de platino iridio que se llama *kilogramo prototipo internacional* y se encuentra depositado en el International Bureau of Weights and Measures en Sevres, Paris.

Las *unidades derivadas* utilizadas en mecánica, se expresan en función de las unidades básicas: metro, segundo y kilogramo. Así, por ejemplo, la unidad de *fuerza* que es el *newton*, teniendo en cuenta la segunda ley de Newton ($F = ma$), se define como la fuerza necesaria para producir a una masa de un kilogramo una aceleración de un metro por segundo al cuadrado.

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

C.2 Propiedades mecánicas de los materiales

En la tabla siguiente se presenta un resumen de las propiedades mecánicas de los materiales más utilizados en mecánica de estructuras. La notación que se adopta es:

E: módulo de elasticidad (GPa) ν : coeficiente de Poisson (adimensional)
 G: módulo de rigidez a cortante (GPa) α : coeficiente de dilatación térmica ($/^{\circ}\text{C}$)

Material	Peso específico	E	G	ν	α
	kN/m^3	GPa	GPa		$10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
Acero estructural	77	210	80	0,27-0,30	10-18
Aleaciones de Aluminio	28	70	28	0,33	23
Bronce	86	120	44	0,34	18-21
Caucho	13	0,004	0,001	0,50	130-200
Cobre	87	120	44	0,36	16,9
Hierro fundido gris	72	97	39	0,25	10,8
Hormigón (C)	23	30		0,1-0,2	7-14
Latón	85	110	41	0,34	19-21
Madera (pino) (F)	5,5	10			5,4
Níquel	87	210	80	0,31	13
Piedra: granito,mármol (C)	28	70-55	4-3	0,2-0,3	7,2-10,8
Piedra: caliza, arenisca (C)	20-28	20-70	2		5-9
Plásticos (nylon)	11	2,8		0,4	70-140
Plásticos (polietileno)	14	1,4		0,4	140-190
Aleaciones de Titanio	44	120	44	0,33	8-11
Tungsteno	190	380	160	0,2	4,3
Vidrio	28	65	4,1	0,2	5-11

Tabla C.2: Propiedades mecánicas de los materiales

El módulo de elasticidad corresponde a ensayos en tracción, salvo los casos de compresión (C) y flexión (F) indicados. Las propiedades de los materiales varían notablemente dependiendo de su composición química, de los defectos internos, de los procesos de fabricación (tratamiento térmico, mecanización, etc), de las dimensiones y forma de la probeta utilizada en el ensayo, etc. Los valores de la Tabla son ilustrativos; para proyectos de ingeniería deben obtenerse mediante ensayos adecuados o seguir las indicaciones de los fabricantes.

C.3 Múltiplos y Submúltiplos

Múltiplos y submúltiplos en el SI		
Prefijo	Símbolo	Factor multiplicativo
tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
giga	G	10^9 = 1 000 000 000
mega	M	10^6 = 1 000 000
kilo	k	10^3 = 1 000
hecto	h	10^2 = 100
deca	da	10^1 = 10
deci	d	10^{-1} = 0,1
centi	c	10^{-2} = 0,01
mili	m	10^{-3} = 0,001
micro	μ	10^{-6} = 0,000 001
nano	n	10^{-9} = 0,000 000 001
pico	p	10^{-12} = 0,000 000 000 001

Tabla C.3: Múltiplos y submúltiplos en el SI

C.4 Alfabeto griego

A	α	Alpha	I	ι	Iota	P	ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	Mu	Υ	υ	Upsilon
E	ϵ	Epsilon	N	ν	Nu	Φ	ϕ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	o	Omicron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

Tabla C.4: Alfabeto griego

Bibliografía

- Beer, F. P. & Johnston, E. R. & De Wolf, J. T. & Mazurek, D. F. (2011). *Mechanics of Materials*. McGraw-Hill.
- Bickford, W. B. (1995). *Mecánica de Sólidos. Conceptos y aplicaciones*. Times Mirror de España–Irwin.
- Cervera Ruiz, M. y Blanco Díaz, E. (2012). *Mecánica y Resistencia de Materiales*. CIMNE.
- Cook, R. D. & Young, W. C. (1999). *Advanced Mechanics of Materials*. Prentice Hall.
- Craig, R. R. (2011). *Mechanics of Materials*. Wiley.
- ENSIDESA (1993). *Manuales sobre la construcción con acero*. Publicaciones de Ensidesa.
- Garrido García, J. A. & Foces Mediavilla, A. (1999). *Resistencia de Materiales*. Secretariado de Publicaciones, Universidad de Valladolid.
- Gere, J. M. & Goodno, B. J. (2011). *Mechanics of Materials*. Cengage Learning.
- Gere, J. M. & Goodno, B. J. (2009). *Mecánica de Materiales*. Cengage Learning.
- Gere, J. M. (2002). *Timoshenko Resistencia de Materiales*. International Thomson Editores.
- Hibbeler, R. C. (2010). *Mechanics of Materials*. Prentice Hall.
- Lardner, T. J. & Archer, R. R. (1996). *Mecánica de Sólidos*. McGraw-Hill.
- Massonnet, Ch. (1968). *Résistance des matériaux*. Dunod.
- Miquel Canet, J. (2012). *Resistencia de materiales y estructuras*. CIMNE.

Ortiz Berrocal, L. (2007). *Elasticidad*. McGraw Hill.

Ortiz Berrocal, L. (2007). *Resistencia de materiales*. McGraw Hill.

Popov, E. P. (1999). *Engineering Mechanics of Solids*. Prentice Hall.

Riley, W. F. & Sturges, L. D. & Morris, D. H. (2006). *Mechanics of Materials*. Wiley.

Rodríguez Avial Azcunaga, F. (1992). *Resistencia de materiales*. Bellisco.

Samartín Quiroga, A. (1990). *Curso de Elasticidad*. Bellisco.

Samartín Quiroga, A. (1995). *Resistencia de Materiales*. Colegio de Ing.de Caminos Canales y Puertos.

Timoshenko, S. P. (1983). *History of Strength of Materials*. Dover.

Vázquez Fernández, M. (1991). *Resistencia de Materiales*. Noela.

Ugural, A. C.& Fenster, S. K. (2012). *Advanced Mechanics of Materials*. Prentice Hall.

AUTORES

MIGUEL CERVERA RUIZ



Doctor Ingeniero de Caminos Canales y Puertos por la ETS de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona. Doctor of Philosophy in Civil Engineering por la Universidad de Gales. Catedrático en Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras del Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la UPC. En el 2012 recibió el “Premio a la Trayectoria Docente” del Consejo Social de la Universidad Politécnica de Cataluña y la “Distinción Jaume Vicens Vives a la Calidad Docente Universitaria” del Departamento de Economía y Conocimiento de la Generalitat de Catalunya.

ELENA BLANCO DÍAZ



Doctora Ingeniera de Caminos, Canales y Puertos por la ETS de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona. Catedrática de Escuela Universitaria en Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Profesora del Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería de la UPC, responsable de asignaturas relacionadas con el cálculo de estructuras. Ha desarrollado su actividad profesional en la empresa privada durante más de dos décadas, participando en numerosos proyectos de Ingeniería Civil.

“Resistencia de Materiales” tiene el objetivo de proporcionar a los estudiantes de grado de ingeniería y arquitectura una clara visión de conjunto de los fundamentos de esta disciplina y un manejo de sus herramientas de cara a su aplicación práctica.

La comprensión de los diferentes temas se ve favorecida por la inclusión de numerosos ejemplos resueltos paso a paso.

