Teoria y ejercicios resueltos de calculo integral

PROBLEMAS RESUELTOS DE

# CÁLCULO INTEGRAL

PARA INGENIEROS CIVILES

**Ph.D. Genner Villarreal Castro**

**PREMIO NACIONAL ANR 2006, 2007, 2008**

Lima – Perú

2017

**Problemas Resueltos de CÁLCULO INTEGRAL para Ingenieros Civiles**

**Primera Edición Setiembre**

Tiraje: 1000 ejemplares

Diagramación: Víctor Dionicio Torres
Carátula: Sheraton Huzhou Hot Spring Resort, Huzhou - China
Estilo: Brenda de Jesús Crisanto Panta

Autor - Editor:
© Ph.D. Genner Villarreal Castro
Calle Pablo Picasso 567 Urb. El Bosque
Trujillo - Perú
Teléfono: 278584 / 950907260
www.gennervillarrealcastro.blogspot.com

Impresión:
Editora & Imprenta Gráfica Norte S.R.L.
Calle Oswaldo Hercelles 401 Urb. Los Granados
Trujillo - Perú
Teléfono: 402705 / 969960030
graficanorte@hotmail.com

Setiembre, 2017

©Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2017-12397
ISBN: 978-612-00-2894-0

## PRÓLOGO

El Cálculo Integral es parte del Análisis Matemático, en la cual se estudian la Integral Indefinida y la Integral Definida, así como su aplicación al cálculo de áreas de figuras planas, longitud de curvatura, volumen y áreas de superficies de cuerpos de revolución, tanto en su forma de integral simple como en su forma de integral múltiple. Especial interés es su aplicación a la Ingeniería Civil, en especial a la Ingeniería Estructural, abordándose temas muy importantes y necesarios para un mejor entendimiento del curso, así como su aplicación práctica en su formación profesional.

Por lo general, el dictado del curso de Cálculo Integral, se centra en la descripción teórica y en la resolución de un escaso número de problemas, lo cual dificulta el proceso de aprendizaje, más aún, tratándose de un curso eminentemente práctico y con una diversidad de problemas.

El presente libro nació, después de comprobar las grandes dificultades mostradas por los alumnos de pregrado en la aplicación directa del cálculo integral a la ingeniería estructural, como ocurre en los cursos de estática, resistencia de materiales y análisis estructural. Es por ello, que tomé el reto de escribir un libro, que haga más didáctico el proceso de estudio individual, resolviendo en forma seria y con el rigor científico 106 problemas tipo, propiciando, de esta manera, una forma más amena de convivencia con el Cálculo Integral y conducente a un mejor dominio de la materia.

En el presente libro, se tratan temas que en la mayoría de universidades se estudian, excepto su aplicación a la ingeniería estructural, que es muy importante en su formación profesional.

Como base se tomó la experiencia adquirida en el dictado de cursos de estructuras a nivel de pregrado en la Universidad de San Martín de Porres, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Universidad Privada Antenor Orrego y Universidad Privada del Norte.

En mi modesta opinión, el presente libro es único en su género, tanto en la forma de resolución de problemas; así como en su contenido, que no es una repetición de otros textos, editados anteriormente.

El presente libro consta de 4 capítulos, anexo y bibliografía.

En el primer capítulo se resuelven problemas de la Integral Indefinida, abordándose el método de la descomposición, método de la introducción de variable en la diferencial, método de la sustitución de variable, método de la integración por partes, integral de fracción racional, integral de fracción irracional e integral de una función trigonométrica.

En el segundo capítulo se resuelven problemas de la Integral Definida, abordándose el método de integración directa, método de la sustitución de variable, método de la integración por partes, convergencia de integral definida, áreas de figuras planas, longitud de curvatura plana, volumen y áreas de superficies de cuerpos de revolución.

En el tercer capítulo se resuelven problemas de la Integral Múltiple, abordándose la integral doble, la integral triple, áreas de figuras planas por la integral doble, volumen de cuerpos por la integral doble y volumen de cuerpos por la integral triple.

En el cuarto capítulo se resuelven problemas de Cálculo de la Integral aplicado a la Ingeniería Estructural, abordándose el momento estático y momento de inercia, reacciones y diagramas en vigas, deflexiones de miembros cargados axialmente, ángulo de giro en torsión, pendiente y deflexión en vigas, pendiente y desplazamiento en arcos y carga crítica de barras en flexión longitudinal.

En el anexo se da la tabla de integrales simples, con la finalidad de una correcta aplicación en la resolución de problemas.

El presente texto está dirigido a estudiantes de Ingeniería Civil y docentes que imparten el curso de Cálculo Integral; así como, a ingenieros civiles e investigadores en el área de estructuras.

Este libro se lo dedico a mis profesores de Matemática Superior de la Universidad Nacional de Ingeniería Civil y Arquitectura de Kiev, quienes tuvieron la responsabilidad de prepararme para la Olimpiada de Matemática Superior en el año 1987, teniendo el gran honor de haberlo ganado y ser parte de la historia de mi Alma Mater.

Ph.D. Genner Villarreal Castro
genner_vc@hotmail.com
Lima, Setiembre

# CAPÍTULO 1
# INTEGRAL INDEFINIDA

## 1.1 MÉTODO DE LA DESCOMPOSICIÓN

**PROBLEMA 1.1** Resolver el siguiente integral

$$\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5)dx$$

**Solución:**

Descomponemos cada parte en forma separada, obteniendo:

$$\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5)dx = \int x^5 dx - 3\int x^4 dx - 7\int x dx + 5\int dx = \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + 5x + C$$

**PROBLEMA 1.2** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$$

**Solución:**

Resolvemos en forma análoga al problema anterior

$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx = 2\int x^{-3/2}dx + 3\int x^{-5/6}dx + 5\int \frac{dx}{x} = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5\ln|x| + C$$

**PROBLEMA 1.3** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{xe^x - x}{x}dx$$

**Solución:**

Efectuamos la división y obtenemos:

$$\int \frac{xe^x - x}{x}dx = \int (e^x - 1)dx = \int e^x dx - \int dx = e^x - x + C$$

**PROBLEMA 1.4** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente artificio

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx - \int \frac{x^2}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \int x^{-2}dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1^2} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C$$

**PROBLEMA 1.5** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{1}{(\text{sen}^2 x)(\cos^2 x)} dx$$

**Solución:**

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, reemplazamos esta igualdad en el numerador

$$\int \frac{1}{(\text{sen}^2 x)(\cos^2 x)} dx = \int \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{(\text{sen}^2 x)(\cos^2 x)} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = \text{tg}x - \text{ctg}x + C$$

**PROBLEMA 1.6** Resolver el siguiente integral

$$\int \cos^2 (x/2) dx$$

**Solución:**

Sabemos que:

$$1 + \cos x = 2\cos^2 (x/2) \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2 (x/2) = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Reemplazamos en el integral y obtenemos:

$$\int \cos^2 (x/2) dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \text{sen}x + C$$

**PROBLEMA 1.7** Resolver el siguiente integral

$$\int \text{tg}^2 x dx$$

**Solución:**

Sabemos que:

$$1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \Rightarrow \qquad \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

Reemplazamos en el integral y obtenemos:

$$\int \text{tg}^2 x dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \text{tg}x - x + C$$

## 1.2 MÉTODO DE LA INTRODUCCIÓN DE VARIABLE EN LA DIFERENCIAL

**PROBLEMA 1.8** Resolver el siguiente integral

$$\int e^{x/2} dx$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente proceso:

$$\int e^{x/2} dx = \int e^{x/2} 2d(x/2) = 2\int e^{x/2} d(x/2) = 2e^{x/2} + C$$

**PROBLEMA 1.9** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{dx}{(5x-1)^4}$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente proceso:

$$\int \frac{dx}{(5x-1)^4} = \frac{1}{5}\int (5x-1)^{-4} 5dx = \frac{1}{5}\int (5x-1)^{-4} d(5x-1) = -\frac{1}{15(5x-1)^3} + C$$

**PROBLEMA 1.10** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{2xdx}{x^4+9}$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente proceso:

$$\int \frac{2xdx}{x^4+9} = \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{3} + C$$

**PROBLEMA 1.11** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$$

**Solución:**

Descomponemos el denominador:

$$x^2+6x+10 = (x^2+6x+9)+1 = (x+3)^2+1$$

Reemplazamos en el integral:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1^2} = \operatorname{arctg}(x+3) + C$$

## 1.3 MÉTODO DE LA SUSTITUCIÓN DE VARIABLE

**PROBLEMA 1.12** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$t = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad dt = \frac{1}{x}dx$$

De esta manera, tenemos:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int (\ln^2 x) d(\ln x) = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

**PROBLEMA 1.13** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$t = \operatorname{arctg} x \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{1+x^2}dx$$

De esta manera, tenemos:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx = \int (\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x})d(\operatorname{arctg} x) = \int \sqrt[3]{t}dt = \int t^{1/3}dt = \frac{3}{4}(\operatorname{arctg} x)^{4/3} + C$$

**PROBLEMA 1.14** Resolver el siguiente integral

$$\int (\sqrt{\cos 5x + 1})\operatorname{sen} 5x dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$t = \cos 5x + 1 \quad \Rightarrow \quad dt = -5\operatorname{sen} 5x dx \quad \therefore \quad \operatorname{sen} 5x dx = -\frac{1}{5}dt$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int (\sqrt{\cos 5x + 1})\operatorname{sen} 5x dx = \int t^{1/2}\left(-\frac{1}{5}dt\right) = -\frac{1}{5}\int t^{1/2}dt = -\frac{2}{15}t^{3/2} + C = -\frac{2}{15}\sqrt{(\cos 5x + 1)^3} + C$$

**PROBLEMA 1.15** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{\cos \ln x}{x}dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$t = \ln x \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{x}dx$$

De esta manera, tenemos:

$$\int \frac{\cos \ln x}{x}dx = \int (\cos \ln x)d(\ln x) = \int \cos t dt = \operatorname{sen} t + C = \operatorname{sen} \ln x + C$$

**PROBLEMA 1.16** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$x = at \quad \Rightarrow \quad dx = adt$$

De esta manera, tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2 - a^2t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{arcsent} + C = \text{arcsen}\frac{x}{a} + C$$

**PROBLEMA 1.17** Resolver el siguiente integral

$$\int tgxdx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$t = \cos x \quad \Rightarrow \quad dt = -\text{senx}dx$

De esta manera, tenemos:

$$\int tgxdx = \int \frac{\text{senx}}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

**PROBLEMA 1.18** Resolver el siguiente integral

$$\int e^{-x^2}xdx$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente proceso:

$$\int e^{-x^2}xdx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

**PROBLEMA 1.19** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente proceso:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3}\text{arcsen}(x^3) + C$$

**PROBLEMA 1.20** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{xdx}{5+7x^4}$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente proceso:

$$\int \frac{xdx}{5+7x^4} = \frac{1}{14}\int \frac{d(x^2)}{(\sqrt{5/7})^2 + (x^2)^2} = \frac{1}{14}.\sqrt{\frac{7}{5}}\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{5}}x^2\right) + C$$

**PROBLEMA 1.21** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{dx}{e^x + 1}$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente artificio:

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x + 1}{e^x + 1} dx - \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int dx - \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = x - \ln\left|e^x + 1\right| + C$$

**PROBLEMA 1.22** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente artificio:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} dx = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \int \frac{d(x-a)}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{d(x+a)}{x+a}$$

$$= \frac{1}{2a} \left( \ln|x-a| - \ln|x+a| \right) + C = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

**PROBLEMA 1.23** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$$

**Solución:**

Efectuamos las siguientes operaciones:

$$\frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \frac{dx}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = d\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

De esta manera, tenemos:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int d\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

## 1.4 MÉTODO DE LA INTEGRACIÓN POR PARTES

**PROBLEMA 1.24** Resolver el siguiente integral

$$\int x^2 \ln x dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x^2dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

Sabemos que:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int x^2 \ln xdx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

**PROBLEMA 1.25** Resolver el siguiente integral

$$\int xe^x dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$dv = e^x dx \qquad \Rightarrow \qquad v = e^x$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

**PROBLEMA 1.26** Resolver el siguiente integral

$$\int xsenxdx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$dv = senxdx \qquad \Rightarrow \qquad v = -\cos x$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int xsenxdx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + senx + C$$

**PROBLEMA 1.27** Resolver el siguiente integral

$$\int (2x+3)sen3xdx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = 2x+3 \qquad \Rightarrow \qquad du = 2dx$$

$$dv = sen3xdx \qquad \Rightarrow \qquad v = \int sen3xdx = \frac{1}{3}\int (sen3x)d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int (2x+3)sen3xdx = -\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x + \frac{2}{3}\int \cos 3xdx = -\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x + \frac{2}{9}sen3x + C$$

**PROBLEMA 1.28** Resolver el siguiente integral

$$\int x \ln^2 x dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = \ln^2 x \qquad \Rightarrow \qquad du = 2\ln x.\frac{1}{x}dx$$

$$dv = xdx \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int x \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x \ln x dx$$

Aplicamos una vez más integración por partes para resolver la integral $\int x \ln x dx$

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = xdx \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

En consecuencia:

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

De esta manera, reemplazamos en la integral inicial y obtenemos:

$$\int x \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$$

**PROBLEMA 1.29** Resolver el siguiente integral

$$\int x^2 \cos x dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad du = 2xdx$$

$$dv = \cos x dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \text{sen}x$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \text{sen}x - 2\int x\text{sen}x dx$$

Aplicamos una vez más integración por partes para resolver la integral $\int x\text{sen}x dx$

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$dv = \text{sen}x dx \qquad \Rightarrow \qquad v = -\cos x$$

En consecuencia:

$$\int x\,\mathrm{sen}x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \mathrm{sen}x + C$$

De esta manera, reemplazamos en la integral inicial y obtenemos:

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \mathrm{sen}x + 2x\cos x - 2\mathrm{sen}x + C$$

**PROBLEMA 1.30** Resolver el siguiente integral

$$\int e^x \cos x\,dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad du = -\mathrm{sen}x\,dx$$

$$dv = e^x dx \qquad \Rightarrow \qquad v = e^x$$

Denotamos el integral inicial como $I$, reemplazamos y obtenemos:

$$I = \int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \mathrm{sen}x\,dx$$

Aplicamos una vez más integración por partes para resolver la integral $\int e^x \mathrm{sen}x\,dx$

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = \mathrm{sen}x \qquad \Rightarrow \qquad du = \cos x\,dx$$

$$dv = e^x dx \qquad \Rightarrow \qquad v = e^x$$

En consecuencia:

$$\int e^x \mathrm{sen}x\,dx = e^x \mathrm{sen}x - \int e^x \cos x\,dx$$

De esta manera, reemplazamos en la integral inicial y obtenemos:

$$I = \int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \mathrm{sen}x\,dx = e^x \cos x + e^x \mathrm{sen}x - \int e^x \cos x\,dx = e^x(\mathrm{sen}x + \cos x) - I$$

Trasladamos $I$ de la parte derecha a la izquierda, obteniendo:

$$I = \frac{1}{2} e^x(\mathrm{sen}x + \cos x) + C$$

## 1.5 INTEGRAL DE FRACCIÓN RACIONAL

**PROBLEMA 1.31** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 16}$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente artificio:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 16} = \int \frac{dx}{(x^2 - 10x + 25) + (16 - 25)} = \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2 - 3^2} = \frac{1}{2.3} \ln\left|\frac{(x-5)-3}{(x-5)+3}\right| + C$$

$$= \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right| + C$$

**PROBLEMA 1.32** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{3x+5}{x^2+4x+13}dx$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente artificio:

$$\int \frac{3x+5}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{3x+5}{(x+2)^2+9}dx = \int \frac{3t-1}{t^2+9}dt = 3\int \frac{t}{t^2+9}dt - \int \frac{dt}{t^2+9}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} - \int \frac{dt}{t^2+3^2} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C$$

Siendo:

$$x+2=t \quad \Rightarrow \quad x=t-2 \quad \therefore \quad dx=dt$$

**PROBLEMA 1.33** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$$

**Solución:**

Analizamos el denominador:

$$x^2+x+1 = x^2+2x.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Reemplazamos en el integral:

$$\int \frac{xdx}{x^2+x+1} = \int \frac{xdx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right| - \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Siendo:

$$x+\frac{1}{2}=t \quad \Rightarrow \quad x=t-\frac{1}{2} \quad \therefore \quad dx=dt$$

**PROBLEMA 1.34** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$$

**Solución:**

Analizamos el integral de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^4dx}{x^2+1} = \int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int x^2dx - \int dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg}x + C$$

**PROBLEMA 1.35** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}dx$$

**Solución:**

Si factorizamos el denominador obtenemos:

$$x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$$

Ahora, analizamos la fracción de la siguiente manera:

$$\frac{x+2}{x^2+5x-6}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6}=\frac{A(x+6)+B(x-1)}{(x-1)(x+6)}$$

Igualamos el numerador:

$$x+2=A(x+6)+B(x-1)=(A+B)x+(6A-B)$$

De donde obtenemos 2 ecuaciones:

$$A+B=1$$

$$6A-B=2$$

Resolvemos y obtenemos:

$$A=\frac{3}{7}$$

$$B=\frac{4}{7}$$

Reemplazamos en el integral:

$$\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}dx=\frac{3}{7}\int \frac{dx}{x-1}+\frac{4}{7}\int \frac{dx}{x+6}=\frac{3}{7}\int \frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{4}{7}\int \frac{d(x+6)}{x+6}=\frac{3}{7}\ln|x-1|+\frac{4}{7}\ln|x+6|+C$$

**PROBLEMA 1.36** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$$

**Solución:**

Analizamos la fracción de la siguiente manera:

$$\frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{D}{x-3}=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+D(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Igualamos el numerador:

$$9-5x=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+D(x-1)(x-2)$$

Efectuamos operaciones y agrupamos, obteniendo:

$$9-5x=(A+B+D)x^2-(5A+4B+3D)x+(6A+3B+2D)$$

De donde obtenemos 3 ecuaciones:

$$A+B+D=0$$

$$5A+4B+3D=5$$

$$6A+3B+2D=9$$

Resolvemos y obtenemos:

$$A = 2$$

$$B = 1$$

$$D = -3$$

Reemplazamos en el integral:

$$\int \frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx = \int\left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x-3}\right)dx = 2\int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int \frac{d(x-2)}{x-2} - 3\int \frac{d(x-3)}{x-3}$$

$$= 2\ln|x-1| + \ln|x-2| - 3\ln|x-3| + C$$

**PROBLEMA 1.37** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$$

**Solución:**

Analizamos la fracción de la siguiente manera:

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Dx+E)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

Igualamos el numerador:

$$3x^2+2x+1 = A(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Dx+E)(x+1)^2$$

Efectuamos operaciones y agrupamos, obteniendo:

$$3x^2+2x+1 = (B+D)x^3 + (A+B+2D+E)x^2 + (B+D+2E)x + (A+B+E)$$

De donde obtenemos 4 ecuaciones:

$$B + D = 0$$

$$A + B + 2D + E = 3$$

$$B + D + 2E = 2$$

$$A + B + E = 1$$

Resolvemos y obtenemos:

$$A = 1$$

$$B = -1$$

$$D = 1$$

$$E = 1$$

Reemplazamos en el integral:

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} - \int \frac{d(x+1)}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + C$$

## 1.6 INTEGRAL DE FRACCIÓN IRRACIONAL

**PROBLEMA 1.38** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

**Solución:**

Asumimos:

$$x+1=t^6 \quad \Rightarrow \quad dx=6t^5dt$$

Reemplazamos en el integral y obtenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = 6\int \frac{t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt = 6\int (t^2-t+1)dt - 6\int \frac{d(t+1)}{t+1}$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right) - 6\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right| + C$$

Siendo:

$$t=\sqrt[6]{x+1}$$

**PROBLEMA 1.39** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$$

**Solución:**

Asumimos:

$$x^2+2=t^2 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{t^2-2} \quad \therefore \quad dx=\frac{tdt}{\sqrt{t^2-2}}$$

Reemplazamos en el integral y obtenemos:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{\sqrt{(t^2-2)^3}\,tdt}{t\sqrt{t^2-2}} = \int (t^2-2)dt = \frac{t^3}{3} - 2t + C = \frac{\sqrt{(x^2+2)^3}}{3} - 2\sqrt{x^2+2} + C$$

**PROBLEMA 1.40** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

**Solución:**

Asumimos:

$$x = \operatorname{sen} t \quad \Rightarrow \quad dx = \cos t dt$$

Reemplazamos en el integral y obtenemos:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int \frac{\operatorname{sen}^3 t \cos t dt}{\cos^3 t} = \int \frac{\operatorname{sen}^3 t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{\operatorname{sen}^2 t . \operatorname{sen} t}{\cos^2 t}dt = -\int \frac{(1-\cos^2 t)d\cos t}{\cos^2 t}$$

$$= -\int \frac{d\cos t}{\cos^2 t} + \int d\cos t = \frac{1}{\cos t} + \cos t + C = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + C$$

Habiendo considerado que:

$$x = \operatorname{sen} t \qquad \Rightarrow \qquad \cos t = \sqrt{1-x^2}$$

**PROBLEMA 1.41** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente descomposición de la raíz cuadrada del denominador:

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$

Asumimos:

$$x+2=t \qquad \Rightarrow \qquad x=t-2 \qquad \therefore \qquad dx=dt$$

Reemplazamos en el integral y obtenemos:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx=\int \frac{x+3}{\sqrt{(x+2)^2+1}}dx=\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}+\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}}+\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\sqrt{t^2+1}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=\sqrt{x^2+4x+5}+\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$$

## 1.7 INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

**PROBLEMA 1.42** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{dx}{4\cos x+3\operatorname{sen}x+5}$$

**Solución:**

Asumimos:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sen}x=\frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}; \qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Reemplazamos en el integral y obtenemos:

$$\int \frac{dx}{4\cos x+3\operatorname{sen}x+5}=2\int \frac{dt}{\left(4\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\frac{2t}{1+t^2}+5\right)(1+t^2)}=2\int \frac{dt}{t^2+6t+9}=2\int \frac{d(t+3)}{(t+3)^2}$$

$$=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}+C$$

**PROBLEMA 1.43** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}dx$$

**Solución:**

Asumimos:

$\cos x = t \qquad \Rightarrow \qquad -\text{senx}dx = dt$

Reemplazamos en el integral:

$$\int \frac{\text{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{\text{sen}^2 x\,\text{senx}}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\text{senx}}{1+\cos^2 x}dx = -\int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt$$

$$= \int \frac{(t^2+1)-2}{t^2+1}dt = \int \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = t - 2\text{arctg}t + C = \cos x - 2\text{arctg}(\cos x) + C$$

**PROBLEMA 1.44** Resolver el siguiente integral

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x - 4\text{senx}\cos x + 5\cos^2 x}$$

**Solución:**

Asumimos:

$$\text{tgx} = t \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Reemplazamos en el integral:

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x - 4\text{senx}\cos x + 5\cos^2 x} = \int \frac{dt}{\left(\frac{t^2}{1+t^2} - 4\frac{t}{1+t} + 5\frac{1}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t^2-4t+5}$$

$$= \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2+1} = \text{arctg}(t-2) + C = \text{arctg}(\text{tgx}-2) + C$$

**PROBLEMA 1.45** Resolver el siguiente integral

$$\int \text{sen}^3 x dx$$

**Solución:**

Descomponemos el integral de la siguiente manera:

$$\int \text{sen}^3 x dx = \int \text{sen}^2 x\,\text{senx}dx = -\int (1-\cos^2 x)d(\cos x) = -\int d(\cos x) + \int (\cos^2 x)d(\cos x)$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

**PROBLEMA 1.46** Resolver el siguiente integral

$$\int \text{sen}^2 x \cos^4 x dx$$

**Solución:**

Sabemos que:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\text{sen}x \cos x = \frac{1}{2}\text{sen}2x$$

Descomponemos el integral de la siguiente manera:

$$\int \text{sen}^2 x \cos^4 x dx = \int (\text{sen}x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \frac{\text{sen}^2 2x}{4} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (\text{sen}^2 2x)dx + \frac{1}{8}\int (\text{sen}^2 2x)(\cos 2x)dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int (\text{sen}^2 2x)d(\text{sen}2x)$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\text{sen}4x + \frac{1}{48}\text{sen}^3 2x + C$$

**PROBLEMA 1.47** Resolver el siguiente integral

$$\int \text{sen}5x \cos 3x dx$$

**Solución:**

Sabemos que:

$$\text{sen}\alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(\alpha+\beta)x + \text{sen}(\alpha-\beta)x\right]$$

$$\text{sen}\alpha x \text{sen}\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right]$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right]$$

Aplicamos la primera fórmula y obtenemos:

$$\int \text{sen}5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\text{sen}8x + \text{sen}2x)dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

# CAPÍTULO 2
# INTEGRAL DEFINIDA

## 2.1 MÉTODO DE LA INTEGRACIÓN DIRECTA

**PROBLEMA 2.1** Resolver el siguiente integral

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx$$

**Solución:**

Integramos y reemplazamos los valores extremos:

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$$

**PROBLEMA 2.2** Resolver el siguiente integral

$$\int_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

**Solución:**

Integramos y reemplazamos los valores extremos:

$$\int_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left.\text{arcsen}x\right|_{0}^{0,5} = \text{arcsen}0,5 - \text{arcsen}0 = \frac{\pi}{6}$$

**PROBLEMA 2.3** Resolver el siguiente integral

$$\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente proceso:

$$\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{d\ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \left.\text{arcsen}\ln x\right|_{1}^{\sqrt{e}} = \text{arcsen}\ln\sqrt{e} - \text{arcsen}\ln 1 = \text{arcsen}0,5 - \text{arcsen}0 = \frac{\pi}{6}$$

**PROBLEMA 2.4** Resolver el siguiente integral

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1}$$

**Solución:**

Efectuamos el siguiente proceso:

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int_{1}^{2} \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_{1}^{2} = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3$$

## 2.2 MÉTODO DE LA SUSTITUCIÓN DE VARIABLE

**PROBLEMA 2.5** Resolver el siguiente integral

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$$

**Solución:**

Asumimos:

$$\sqrt{x+1} = t \quad \Rightarrow \quad x = t^2 - 1 \quad \therefore \quad dx = 2tdt$$

Analizamos los límites del integral:

Si x=3 $\Rightarrow$ $t = \sqrt{3+1} = 2$

Si x=8 $\Rightarrow$ $t = \sqrt{8+1} = 3$

Al cambiar de variable, estos serán los nuevos límites del integral.

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{t^2-1}{t} 2tdt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2\left[\left(\frac{3^3}{3} - 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2\right)\right] = \frac{32}{3}$$

**PROBLEMA 2.6** Resolver el siguiente integral

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

**Solución:**

Asumimos:

$$x = a\text{sen}t \quad \Rightarrow \quad dx = a(\cos t)dt$$

Analizamos los límites del integral:

Si x=0 $\Rightarrow$ $\text{sen}t = 0 \ \therefore \ t = 0$

Si x=a $\Rightarrow$ $\text{sen}t = 1 \ \therefore \ t = \frac{\pi}{2}$

Al cambiar de variable, estos serán los nuevos límites del integral.

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\text{sen}^2 t}.(a\cos t)dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\text{sen}2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

**PROBLEMA 2.7** Resolver el siguiente integral

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$$

**Solución:**

Asumimos:

$x = t^2 \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2tdt$

Analizamos los límites del integral:

Si x=0 $\Rightarrow\ t = 0$

Si x=4 $\Rightarrow\ t = 2$

Al cambiar de variable, estos serán los nuevos límites del integral.

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{(1+t)-1}{1+t}dt = 2\left[\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{d(1+t)}{1+t}\right] = 2\left(t - \ln|1+t|\right)\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3$$

**PROBLEMA 2.8** Resolver el siguiente integral

$$\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

**Solución:**

Asumimos:

$\sqrt{e^x - 1} = t \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{2tdt}{1+t^2}$

Analizamos los límites del integral:

Si $x = \ln 2 \quad \Rightarrow\ t = 1$

Si $x = 2\ln 2 \ \Rightarrow\ t = \sqrt{3}$

Al cambiar de variable, estos serán los nuevos límites del integral.

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2tdt}{t(1+t^2)} = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = 2(\operatorname{arctg} t)\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$$

**PROBLEMA 2.9** Resolver el siguiente integral

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

**Solución:**

Asumimos:

$x = 2\operatorname{sen} t \quad \Rightarrow \qquad dx = 2\cos t dt$

Analizamos los límites del integral:

Si $x = 0 \quad \Rightarrow\ t = 0$

Si $x = 1 \quad \Rightarrow\ t = \dfrac{\pi}{6}$

Al cambiar de variable, estos serán los nuevos límites del integral.

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4sen^2 t}{\sqrt{4-4sen^2 t}} 2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen^2 t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2t)dt = 2\left( \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t)d(2t) \right)$$

$$= 2\left( t - \frac{sen2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## 2.3 MÉTODO DE LA INTEGRACIÓN POR PARTES

**PROBLEMA 2.10** Resolver el siguiente integral

$$\int_0^1 xe^x dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$dv = e^x dx \qquad \Rightarrow \qquad v = e^x$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e + 1 = 1$$

**PROBLEMA 2.11** Resolver el siguiente integral

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = \frac{dx}{x^5} \qquad \Rightarrow \qquad v = -\frac{1}{4x^4}$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx = -\frac{\ln x}{4x^4}\Bigg|_1^2 + \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16x^4}\Bigg|_1^2 = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}$$

**PROBLEMA 2.12** Resolver el siguiente integral

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$dv = \cos x dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \operatorname{sen} x$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = x\operatorname{sen}x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\operatorname{sen}x dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2$$

**PROBLEMA 2.13** Resolver el siguiente integral

$$\int_0^3 x(\operatorname{arctg}x)dx$$

**Solución:**

Efectuamos la siguiente sustitución:

$$u = \operatorname{arctg}x \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = xdx \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\int_0^3 x(\operatorname{arctg}x)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3\frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{9}{2}\operatorname{arctg}3 - \frac{1}{2}\int_0^3\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{arctg}3 - \frac{1}{2}\int_0^3\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{9}{2}\operatorname{arctg}3 - \frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg}x)\Big|_0^3 = 5\operatorname{arctg}3 - \frac{3}{2}$$

## 2.4 CONVERGENCIA DE INTEGRAL DEFINIDA

**PROBLEMA 2.14** Resolver el siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$$

**Solución:**

En este problema ambos límites de integración son infinitos, es por ello, que dividimos este integral en dos.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+3)^2+2} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)^2+2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+3)^2+2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+3)^2+2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+(\sqrt{2})^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+(\sqrt{2})^2} = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{2}}\Bigg|_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{2}} - \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{a+3}{\sqrt{2}} + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{b+3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

**PROBLEMA 2.15** Resolver el siguiente integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

**Solución:**

Dividimos el integral en dos:

$$\int_{-1}^{1} \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3\int_{-1}^{1} x^{\frac{4}{3}} dx + 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3I_1 + 2I_2 = 3\left(\frac{6}{7}\right) + 2(6) = \frac{102}{7}$$

Siendo:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} \Big|_{-1}^{1} = \frac{6}{7}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} x^{-\frac{2}{3}} dx + \int_{0}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} x^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{0+\varepsilon_2}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$I_2 = -3 \lim_{\varepsilon_1 \to 0} (\varepsilon_1)^{1/3} + 3 + 3 - 3 \lim_{\varepsilon_2 \to 0} (\varepsilon_2)^{1/3} = 6$$

**PROBLEMA 2.16** Resolver el siguiente integral

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

**Solución:**

Integramos y reemplazamos valores.

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int_{1}^{2} (x-1)^{-\frac{2}{3}} d(x-1) = 3(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_{1}^{2} = 3$$

## 2.5 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

**PROBLEMA 2.17** Determinar el área que forma la parábola $y = x^2$ con las líneas $x = -1$, $x = 2$ y con el eje de la abscisa.

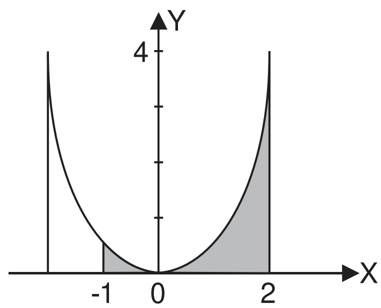


Fig. 2.1

**Solución:**

Utilizamos la siguiente fórmula:

$$A = \int_a^b |f(x)|dx = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = 3$$

**PROBLEMA 2.18** Determinar el área que forman las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$

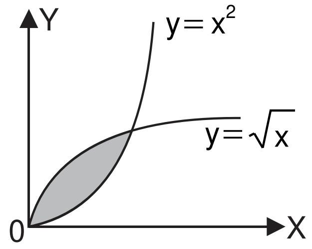


Fig. 2.2

**Solución:**

Determinamos los puntos de intersección

$$x^2 - \sqrt{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

Utilizamos la siguiente fórmula:

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]dx = \left.\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

**PROBLEMA 2.19** Determinar el área que forma la parábola $x = y^2$ con la línea recta $x = 2 - y$

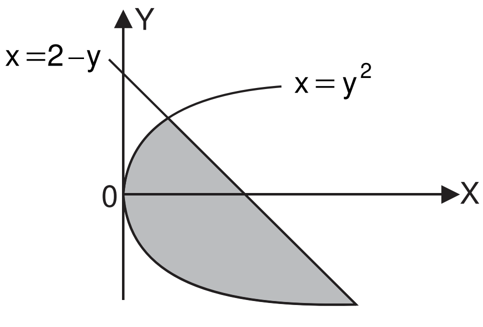


Fig. 2.3

**Solución:**

Determinamos los puntos de intersección

$$y^2 - (2 - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y_1 = 1 \\ y_2 = -2 \end{matrix}$$

Utilizamos la misma fórmula anterior:

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_{-2}^{1} \left[2 - y - y^2\right]dy = \left.\left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\right|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

**PROBLEMA 2.20** Determinar el área de la elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$

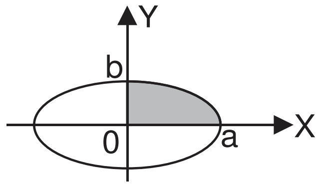


Fig. 2.4

**Solución:**

Podemos indicar, que el área total de la elipse es igual a la suma de cuatro veces el área sombreada, denotada como $A_1$

$$A = 4A_1 \quad \Rightarrow \quad A = 4\int_0^a y\,dx$$

Por condición del problema:

$$y = b\,\text{sen}\,t$$

$$dx = -a\,\text{sen}\,t\,dt$$

Determinamos los límites de integración, analizando $x = a\cos t$

| x | t |
|---|---|
| 0 | π/2 |
| a | 0 |

Reemplazamos en el integral y obtenemos:

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\,\text{sen}\,t(-a\,\text{sen}\,t)dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 t\,dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\text{sen}\,2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

**PROBLEMA 2.21** Determinar el área formada por la curva $\rho = a\,\text{sen}\,3\varphi$

**Solución:**

Graficamos el esquema de la curva, para ello, determinamos el período de la función $\rho = a\,\text{sen}\,3\varphi$, a través del período T, siendo:

$$a\,\text{sen}\,3(\varphi + T) \equiv a\,\text{sen}\,3\varphi \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,3(\varphi + T) \equiv \text{sen}\,3\varphi$$

Efectuando operaciones obtenemos:

$$\text{sen}\,3\varphi\cos 3T + \cos 3\varphi\,\text{sen}\,3T \equiv \text{sen}\,3\varphi$$

De donde:

$$\text{sen}\,3T = 0$$

$$\cos 3T = 1$$

De esta manera:

$$3T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{3}$$

Siendo suficiente graficar la curva en el sector $0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$

Como el radio polar $\rho$ debe ser positivo, entonces el intervalo de variación del ángulo $\varphi$ debe estar en el tramo $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. En el tramo restante $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$ se tendrá que $\rho < 0$ y los puntos en este tramo no existen.

Para el tramo $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ la función $\operatorname{sen}3\varphi$ crece de 0 a 1 y para el tramo $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ desciende de 1 a 0.

Considerando lo indicado anteriormente, graficamos la función $\rho = a\operatorname{sen}3\varphi$ para el tramo $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ en el sistema de coordenadas polar. Como el periodo de la función $\rho = a\operatorname{sen}3\varphi$ es $\frac{2\pi}{3}$, entonces hasta el ángulo $2\pi$ se desarrollan 3 lazos, estando el segundo lazo en el tramo $\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le \pi$ y el tercer lazo en el tramo $\frac{4\pi}{3} \le \varphi \le \frac{5\pi}{3}$, tal como se muestra en la figura 2.5

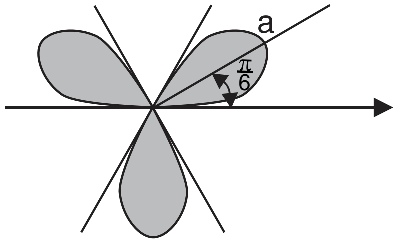


Fig. 2.5

Para determinar el área de cada lazo, se aplicará la siguiente fórmula:

$$A_{lazo} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [\rho(\varphi)]^2 d\varphi$$

Como son 3 lazos, el área total de la curva formada será:

$$A = 3.\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} a^2 \operatorname{sen}^2 3\varphi d\varphi = \frac{3a^2}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 6\varphi)d\varphi = \frac{3a^2}{4}\left[\varphi - \frac{1}{6}\operatorname{sen}6\varphi\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{a^2\pi}{4}$$

## 2.6 LONGITUD DE CURVATURA PLANA

**PROBLEMA 2.22** Determinar la longitud de la curva de un cardioide $\rho = a(1+\cos\varphi)$, siendo $a > 0$

**Solución:**

Construimos la curva del cardioide, considerando que $\rho \ge 0$ y $0 \le \varphi \le 2\pi$

| $\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | 2a | $a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\frac{3}{2}a$ | a | $\frac{1}{2}a$ | $a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | 0 |

| $\varphi$ | $\pi+\frac{\pi}{6}$ | $\pi+\frac{\pi}{4}$ | $\pi+\frac{\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | $a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\frac{1}{2}a$ | a | $\frac{3}{2}a$ | $a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | 2a |

De esta manera, la curva del cardioide se muestra en la figura 2.6

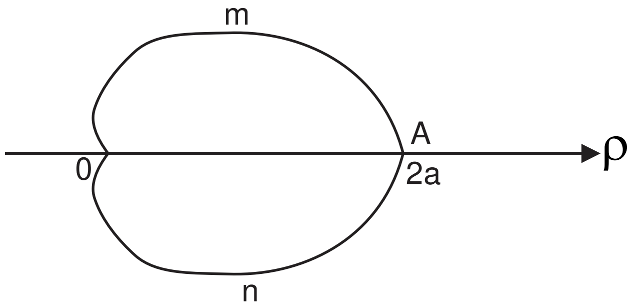


Fig. 2.6

De la figura 2.6 se puede observar que el cardioide está formado por 2 partes simétricas, la primera es Am0 para el intervalo $0 \le \varphi \le \pi$ y la segunda 0nA para el intervalo $\pi \le \varphi \le 2\pi$. Es por ello, que es suficiente con determinar la longitud de la mitad de la curvatura y multiplicarlo por dos para obtener el total.

Para calcular la longitud de la curva aplicamos la fórmula:

$$L_{curva} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

Aplicamos al tramo Am0, obteniendo:

$$L_{(Am0)} = \int_{0}^{\pi} \sqrt{[a(1+\cos\varphi)]^2 + [-a\,\text{sen}\varphi]^2}\, d\varphi = a\int_{0}^{\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi = 2a\int_{0}^{\pi} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi$$

$$L_{(Am0)} = 2a\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 4a\,\text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = 4a$$

Luego:

$$L = 2L_{(Am0)} = 8a$$

**PROBLEMA 2.23** Determinar la longitud de la parte que se intersecta la semiparábola cúbica $y^2 = (x-p)^3$ con la parábola $y^2 = \frac{1}{2}p^2x$

**Solución:**

Esquematizamos los gráficos (figura 2.7), entendiéndose, que para este problema la longitud que nos piden es BAB', formada por 2 partes simétricas, por ello, es suficiente calcular la longitud de la curva AB y duplicamos su valor.

Para determinar los límites es suficiente con determinar la abscisa del punto B, porque la abscisa del punto A es conocido e igual a $p$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones de las dos parábolas:

$$\begin{aligned} y^2 &= (x-p)^3 \\ y^2 &= \frac{1}{2}p^2x \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad (x-p)^3 = \frac{1}{2}p^2x$$

Resolvemos la ecuación cúbica y obtenemos $x = 2p$

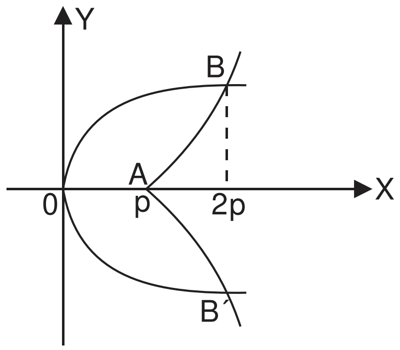


Fig. 2.7

Como la función se puede expresar por la ecuación $y = f(x)$, entonces para su resolución aplicamos la siguiente fórmula:

$$L_{curva} = \int_a^b \sqrt{1+\left[f^{'}(x)\right]^2}\,dx$$

Siendo para este caso los límites de integración $a = p$ y $b = 2p$

Además:

$$f(x) = \sqrt{(x-p)^3}$$

$$f^{'}(x) = \frac{3}{2}(x-p)^{\frac{1}{2}}$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$L = 2\int_p^{2p} \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}(x-p)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\,dx = 2\int_p^{2p} \sqrt{1+\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}p}\,dx = 2.\frac{2}{3}.\frac{4}{9}\left(1-\frac{9}{4}p+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_p^{2p}$$

$$L = \frac{16}{27}\left[\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}p\right)^3} - 1\right]$$

## 2.7 VOLUMEN Y ÁREAS DE SUPERFICIES DE CUERPOS DE REVOLUCIÓN

**PROBLEMA 2.24** Determinar el volumen del cuerpo que se genera por el giro respecto al eje OX, del sector de intersección de la semielipse $y = 3\sqrt{1-x^2}$ con la semiparábola $x = \sqrt{1-y}$ con el eje OY

**Solución:**

La ecuación $y = 3\sqrt{1-x^2}$ corresponde a la parte superior de la elipse $\frac{y^2}{9} + x^2 = 1$

La ecuación $x = \sqrt{1-y}$ corresponde al lazo derecho de la parábola $x^2 = 1 - y$ con intersección con el eje OY en el punto (0,1) y con el eje OX en los puntos (1,0) y (-1,0).

Alrededor del eje OX gira la figura sombreada ABC. El volumen de dicho cuerpo de revolución lo obtenemos como la diferencia de los cuerpos de revolución OBC y OAC, tal como se muestra en la figura 2.8

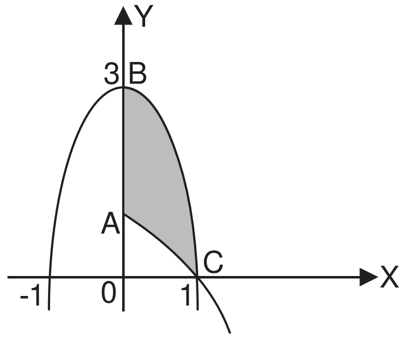


Fig. 2.8

Para dicho cálculo, aplicamos la siguiente fórmula:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$V = \pi \int_0^1 9(1-x^2)dx - \pi \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \pi \left[ \left(9x - 3x^3\right)\Big|_0^1 - \left( x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right)\Big|_0^1 \right] = \frac{82}{15}\pi$$

**PROBLEMA 2.25** Determinar el área de la superficie formada por el giro del astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ alrededor del eje OX

**Solución:**

Esquematizamos el astroide, para ello, escribimos la ecuación del mismo en forma paramétrica:

$$x = a\cos^3 t$$

$$y = a\mathrm{sen}^3 t$$

El astroide es simétrico respecto a los ejes de coordenadas, por ello, es suficiente con determinar el área de la superficie del giro del tramo AB, ubicado en el 1er cuadrante y multiplicamos por dos.

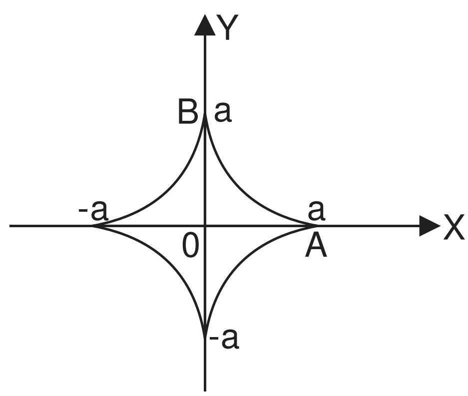


Fig. 2.9

Como el tramo AB se encuentre en el intervalo de 0 a π/2, aplicamos la siguiente fórmula para determinar el área de la superficie del giro de dicho tramo respecto al eje OX

$$A_{0X} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left[x^{'}(t)\right]^2 + \left[y^{'}(t)\right]^2}\,dt$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$A_{0X} = 2.2\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} asen^3 t \sqrt{(-3a\cos^2 t sent)^2 + (3asen^2 t\cos t)^2}\,dt = 4\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (asen^3 t)(3asent\cos t)dt$$

$$A_{0X} = 12\pi a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (sen^4 t)d(sent) = 12\pi a^2 \left.\frac{sen^5 t}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2$$

# CAPÍTULO 3
# INTEGRAL MÚLTIPLE

## 3.1 INTEGRAL DOBLE

**PROBLEMA 3.1** Resolver el siguiente integral, considerando $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2)$

$$\iint_D xy\,dxdy$$

**Solución:**

Agrupamos por variable, considerando los límites de integración y efectuamos el cálculo respectivo.

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 xdx\int_0^2 y\,dy = \int_0^1 xdx\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \int_0^1 2xdx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

**PROBLEMA 3.2** Resolver el siguiente integral, considerando $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$

$$\iint_D e^{x+y}dxdy$$

**Solución:**

Agrupamos por variable, considerando los límites de integración y efectuamos el cálculo respectivo.

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \iint_D e^x e^y dxdy = \int_0^1 e^x dx\int_0^1 e^y dy = \int_0^1 e^x dx(e^y)\Big|_0^1 = (e-1)\int_0^1 e^x dx = (e-1)(e^x)\Big|_0^1 = (e-1)^2$$

**PROBLEMA 3.3** Resolver el siguiente integral, considerando $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$

$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$$

**Solución:**

Agrupamos por variable, considerando los límites de integración y efectuamos el cálculo respectivo.

$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy = \int_0^1 x^2dx\int_0^1\frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1 x^2dx(\operatorname{arctg}y)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

**PROBLEMA 3.4** Resolver el siguiente integral, considerando $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$$

**Solución:**

Agrupamos por variable, considerando los límites de integración y efectuamos el cálculo respectivo.

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2} = \int_0^1 dx\int_0^1\frac{dy}{(x+y+1)^2} = \int_0^1 dx\left(-\frac{1}{x+y+1}\right)\Bigg|_0^1 = \int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Bigg|_0^1 = \ln\frac{4}{3}$$

**PROBLEMA 3.5** Resolver el siguiente integral, considerando $(0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le 2)$

$$\iint_D x^2 y\cos(xy^2)dxdy$$

**Solución:**

Agrupamos por variable, considerando los límites de integración y efectuamos el cálculo respectivo.

$$\iint_D x^2 y\cos(xy^2)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\int_0^2 \cos(xy^2)d(xy^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\left[\operatorname{sen}(xy^2)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen}4xdx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(-\cos 4x) = -\frac{1}{8}x\cos 4x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4xdx = -\frac{\pi}{16} + \frac{1}{32}\operatorname{sen}4x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{16}$$

En esta última parte, se aplicó el método de la integración por partes, considerando:

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$dv = d(-\cos 4x) \qquad \Rightarrow \qquad v = -\cos 4x$$

**PROBLEMA 3.6** Resolver el siguiente integral

$$\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{x}} dy$$

**Solución:**

Integramos de derecha a izquierda.

$$\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{x}} dy = \int_0^a dx(y)\Big|_0^{\sqrt{x}} = \int_0^a \sqrt{x}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^{3/2}$$

**PROBLEMA 3.7** Resolver el siguiente integral

$$\int_1^2 dy\int_0^{\ln y} e^x dx$$

**Solución:**

Integramos de derecha a izquierda.

$$\int_1^2 dy\int_0^{\ln y} e^x dx = \int_1^2 dy(e^x)\Big|_0^{\ln y} = \int_1^2 (e^{\ln y} - 1)dy = \int_1^2 e^{\ln y}dy - \int_1^2 dy = \int_1^2 ye^{\ln y}d(\ln y) - 1 = \frac{y}{2}e^{\ln y}\Big|_1^2 - 1$$

$$= e^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{\ln 1} - 1 = \frac{1}{2}$$

Para el último integral aplicamos el método de la integración por partes.

$$I = \int_1^2 e^{\ln y}dy = \int_1^2 ye^{\ln y}d(\ln y) = ye^{\ln y}\Big|_1^2 - \int_1^2 e^{\ln y}dy = ye^{\ln y}\Big|_1^2 - I \qquad \therefore \qquad I = \frac{y}{2}e^{\ln y}\Big|_1^2$$

Siendo:

$$u = y \qquad \Rightarrow \qquad du = dy$$

$$dv = e^{\ln y} d(\ln y) \quad \Rightarrow \qquad v = e^{\ln y}$$

**PROBLEMA 3.8** Resolver el siguiente integral, considerando que el sector de integración está limitado por las rectas x=2, y=x e hipérbola xy=1

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$$

**Solución:**

Cuando x=1 se cumplirá que $\frac{1}{x} = x$ , de esta manera los intervalos de integración son:

$$1 \le x \le 2$$

$$\frac{1}{x} \le y \le x$$

De esta manera, tenemos:

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 dx \left( -\frac{1}{y} \right) \Bigg|_{1/x}^{x} = \int_1^2 \left( x - \frac{1}{x} \right) x^2 dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}$$

## 3.2 INTEGRAL TRIPLE

**PROBLEMA 3.9** Resolver el siguiente integral

$$\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$$

**Solución:**

Resolvemos el integral de derecha a izquierda.

$$\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy (z)\Big|_0^3 = \int_0^1 dx \int_0^2 3dy = \int_0^1 dx (3y)\Big|_0^2 = \int_0^1 6dx = 6x\Big|_0^1 = 6$$

**PROBLEMA 3.10** Resolver el siguiente integral

$$\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x + y + z) dz$$

**Solución:**

Resolvemos el integral de derecha a izquierda.

$$\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x + y + z) dz = \int_0^a dx \int_0^b dy \left( xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^c = \int_0^a dx \int_0^b \left( xc + yc + \frac{c^2}{2} \right) dy$$

$$= \int_0^a dx \left( xcy + \frac{y^2 c}{2} + \frac{c^2 y}{2} \right) \Bigg|_0^b = \int_0^a \left( xbc + \frac{b^2 c}{2} + \frac{bc^2}{2} \right) dx = \left( \frac{bcx^2}{2} + \frac{b^2 cx}{2} + \frac{bc^2 x}{2} \right) \Bigg|_0^a = \frac{abc}{2}(a + b + c)$$

**PROBLEMA 3.11** Resolver el siguiente integral

$$\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y xyz\,dz$$

**Solución:**

Resolvemos el integral de derecha a izquierda.

$$\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y xyz\,dz = \int_0^a dx\int_0^x dy\left(\frac{xyz^2}{2}\right)\Bigg|_0^y = \int_0^a dx\int_0^x \frac{xy^3}{2}dy = \int_0^a dx\left(\frac{xy^4}{8}\right)\Bigg|_0^x = \frac{1}{8}\int_0^a x^5 dx = \frac{x^6}{48}\Bigg|_0^a = \frac{a^6}{48}$$

**PROBLEMA 3.12** Resolver el siguiente integral

$$\int_0^{e-1} dx\int_0^{e-x-1} dy\int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}dz$$

**Solución:**

Asumimos:

$$z_1 = z-x-y \qquad \Rightarrow \qquad dz_1 = dz$$

$$z_1(e) = e-x-y$$

$$z_1(x+y+e) = e$$

Cambiamos variable y límites de integración.

$$\int_0^{e-1} dx\int_0^{e-x-1} dy\int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}dz = \int_0^{e-1} dx\int_0^{e-x-1} \frac{dy}{(x-e)(x+y-e)}\int_{e-x-y}^{e}\ln z_1 dz_1$$

$$= \int_0^{e-1} dx\int_0^{e-x-1} \frac{dy}{(x-e)(x+y-e)}\left(z_1\ln z_1 - z_1\right)\Big|_{e-x-y}^{e}$$

El último integral fue resuelto mediante integración por partes.

$$u = \ln z_1 \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{dz_1}{z_1}$$

$$dv = dz_1 \qquad \Rightarrow \qquad v = z_1$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$= \int_0^{e-1} dx\int_0^{e-x-1} \frac{dy}{(x-e)(x+y-e)}\left[(e-x-y)-(e-x-y)\ln(e-x-y)\right] = \int_0^{e-1} dx\int_0^{e-x-1}\left(\frac{\ln(e-x-y)-1}{x-e}\right)dy$$

Asumimos:

$$y_1 = e-x-y \qquad \Rightarrow \qquad dy_1 = -dy$$

$$y_1(0) = e-x$$

$$y_1(e-x-1) = 1$$

Una vez más cambiamos la variable y límites de integración.

$$= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \int_{e-x}^{1} (-\ln y_1 + 1) dy_1 = \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} (2y_1 - y_1 \ln y_1)\Big|_{e-x}^{1}$$

El último integral fue resuelto mediante integración por partes.

$$u = \ln y_1 \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dy_1}{y_1}$$

$$dv = dy_1 \quad \Rightarrow \quad v = y_1$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} [(e-x)\ln(e-x) - 2(e-x) + 2] = \int_0^{e-1} \left[ -\ln(e-x) + 2 + \frac{2}{x-e} \right] dx$$

$$= \int_0^{e-1} \ln(e-x) d(e-x) + 2\int_0^{e-1} dx + 2\int_0^{e-1} \frac{d(x-e)}{x-e} = \left[(e-x)\ln(e-x) - (e-x) + 2x + 2\ln|x-e|\right]_0^{e-1} = 2e-5$$

Para resolver este último integral se aplicó una vez más la integración por partes.

$$u = \ln(e-x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{d(e-x)}{e-x}$$

$$dv = d(e-x) \quad \Rightarrow \quad v = e-x$$

**PROBLEMA 3.13** Resolver el siguiente integral, sabiendo que el sector está limitado por un cilindro $y = \sqrt{x}$ y los planos $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$

$$\iiint_D y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$$

**Solución:**

De acuerdo a los datos del problema, se asume que los intervalos son:

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le y \le \sqrt{x}$$

$$0 \le z \le \frac{\pi}{2} - x$$

Reemplazamos y resolvemos el integral.

$$\iiint_D y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y\,dy [\operatorname{sen}(z+x)]_0^{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y(1-\operatorname{sen}x)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\operatorname{sen}x)\,dx \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x\operatorname{sen}x)\,dx = \frac{x^2}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d(\cos x)$$

$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{x\cos x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

Para resolver el último integral se aplicó la integración por partes.

$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$

$dv = d(\cos x) \qquad \Rightarrow \qquad v = \cos x$

### 3.3 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS POR LA INTEGRAL DOBLE

**PROBLEMA 3.14** Determinar el área de la figura plana formada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$

**Solución:**

Como $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

Por conocimientos simples de funciones, podemos indicar, que los intervalos en los cuales se integrará son:

$$0 \le x \le 1$$

$$0 \le y \le 1$$

Ahora, determinamos el área formada por dichas rectas.

$$A = \int_0^1 dx \int_0^1 (1-x)dy = \int_0^1 dx\left(y - xy\right)\Big|_0^1 = \int_0^1 (1-x)dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

**PROBLEMA 3.15** Determinar el área de la figura plana formada por las rectas $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$

**Solución:**

Como $\left.\begin{array}{r} y = x \\ y = 5x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$

Podemos indicar, que los intervalos en los cuales se integrará son:

$$0 \le x \le 1$$

$$x \le y \le 5x$$

Ahora, determinamos el área formada por dichas rectas.

$$A = \int_0^1 dx \int_x^{5x} dy = \int_0^1 (5x - x)dx = \int_0^1 4x dx = 2x^2\Big|_0^1 = 2$$

**PROBLEMA 3.16** Determinar el área de la figura plana formada por la parábola $y^2 = \frac{b^2}{a}x$ con la recta $y = \frac{b}{a}x$

**Solución:**

Como $y^2 = \frac{b^2}{a}x \Rightarrow x = \frac{a}{b^2}y^2$

Además $y = \frac{b}{a}x \;\Rightarrow\; x = \frac{a}{b}y$

De donde:

$$\frac{a}{b^2}y^2 = \frac{a}{b}y \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y = 0 \\ y = b \end{cases}$$

Ahora, determinamos el área formada por la parábola y la recta.

$$A = \int_0^b dy \int_{\frac{a}{b^2}y^2}^{\frac{a}{b}y} dx = \int_0^b \left(\frac{a}{b}y - \frac{a}{b^2}y^2\right)dy = a\left(\frac{y^2}{2b} - \frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b = a\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{3}\right) = \frac{ab}{6}$$

### 3.4 VOLUMEN DE CUERPOS POR LA INTEGRAL DOBLE

**PROBLEMA 3.17** Determinar el volumen del cuerpo generado por la intersección de los planos $x = a$, $y = b$ con el paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$

**Solución:**

Determinamos el volumen del cuerpo generado.

$$V = \iint_D \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right)dxdy = \int_0^a dx \int_0^b \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right)dy = \int_0^a \left(\frac{x^2y}{2p} + \frac{y^3}{6q}\right)\Bigg|_0^b dx = \int_0^a \left(\frac{x^2b}{2p} + \frac{b^3}{6q}\right)dx$$

$$V = \left(\frac{x^3b}{6p} + \frac{b^3x}{6q}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3b}{6p} + \frac{ab^3}{6q} = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right)$$

**PROBLEMA 3.18** Determinar el volumen del cuerpo generado por los cilindros $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, con los planos $z = 0$, $x + z = 6$

**Solución:**

Cuando $z = 0$, los intervalos de integración son:

$$0 \le x \le 6$$

$$\sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}$$

Además, sabemos que:

$$x + z = 6 \quad \Rightarrow \quad z = 6 - x$$

De esta manera, determinamos el volumen del cuerpo generado.

$$V = \iint_D (6 - x)dxdy = \int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6 - x)dy = \int_0^6 (6 - x)\sqrt{x}dx = \int_0^6 \left(6x^{1/2} - x^{3/2}\right)dx$$

$$V = \left(\frac{6x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2}\right)\Bigg|_0^6 = \left(4x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^6 = \frac{48}{5}\sqrt{6}$$

**PROBLEMA 3.19** Determinar el volumen del cuerpo generado por el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ con los planos $z = 0$, $x = 3$

**Solución:**

Cuando $z = 0 \Rightarrow y = \pm x$

De esta manera, determinamos el volumen del cuerpo generado.

$$V = \int_0^3 dx \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)dy = \int_0^3 \left( x^2 y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{-x}^{x} dx = \int_0^3 \left( 2x^3 - \frac{2x^3}{3} \right) dx = \int_0^3 \frac{4x^3}{3} dx = \frac{x^4}{3}\Bigg|_0^3 = 27$$

**PROBLEMA 3.20** Determinar el volumen del cuerpo generado por los cilindros $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $z = e^2 - y^2$ con el plano $z = 0$

**Solución:**

Cuando $z = 0$ se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{r} y = e^x \\ y = e^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow y > 0$$

$$y^2 = e^2 \Rightarrow y = e$$

Cuando $x = 0$ se cumplirá que $e^x = e^{-x}$

Cuando $x = 1$ se cumplirá que $e^x = e$

De esta manera, el sector formado es simétrico respecto al eje OY, calculando el volumen del cuerpo generado.

$$V = 2\int_0^1 dx \int_{e^x}^{e} (e^2 - y^2)dy = 2\int_0^1 \left( e^2 y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{e^x}^{e} dx = 2\int_0^1 \left( \frac{2}{3}e^3 - e^{x+2} + \frac{1}{3}e^{3x} \right)dx$$

$$V = \left( \frac{4}{3}e^3 x - 2e^{x+2} + \frac{2}{9}e^{3x} \right)\Bigg|_0^1 = 2\left( e^2 - \frac{2e^3 + 1}{9} \right)$$

### 3.5 VOLUMEN DE CUERPOS POR LA INTEGRAL TRIPLE

**PROBLEMA 3.21** Determinar el volumen del cuerpo formado por los cilindros $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ con los planos $x = -1$, $x = 2$

**Solución:**

Por datos del problema sabemos los límites de integración en "x"

$$-1 \le x \le 2$$

Para conocer los límites de integración en "y", igualamos ambas funciones respecto a "z"

$$\left.\begin{array}{r} z = y^2 + 2 \\ z = 4 - y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 + 2 = 4 - y^2 \;\therefore\; y = \pm 1$$

De esta manera, tenemos:

$$-1 \le y \le 1$$

Para saber los límites de integración en "z", se recomienda graficar los cilindros $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, con la finalidad de saber el inicio y final de la integración, siendo, para este caso, los extremos los siguientes:

$$(y^2 + 2) \le z \le (4 - y^2)$$

De esta manera, determinamos el volumen del cuerpo formado.

$$V = \int_{-1}^{2} dx \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz = \int_{-1}^{2} dx \int_{-1}^{1} (2 - 2y^2) dy = \int_{-1}^{2} \left( 2y - \frac{2y^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{2} \left( 4 - \frac{4}{3} \right) dx = \frac{8}{3} \int_{-1}^{2} dx = 8$$

**PROBLEMA 3.22** Determinar el volumen del cuerpo formado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$ con los planos $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$

**Solución:**

Para conocer los límites de integración en "x", igualamos ambas funciones respecto a "y"

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2x \ \therefore \ x = 0$$

De esta manera, los límites de integración en "x" son:

$$0 \le x \le 1$$

Sin necesidad de graficar, podemos indicar que los límites de integración en "y" son:

$$x \le y \le 2x$$

Para saber los límites de integración en "z", se recomienda graficar los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$, aunque sin mucho esfuerzo podemos notar que los límites de integración son:

$$(x^2 + y^2) \le z \le (x^2 + 2y^2)$$

De esta manera, determinamos el volumen del cuerpo formado.

$$V = \int_{0}^{1} dx \int_{x}^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz = \int_{0}^{1} dx \int_{x}^{2x} y^2 dy = \int_{0}^{1} \frac{y^3}{3} \Bigg|_{x}^{2x} dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{3}(8x^3 - x^3) dx = \int_{0}^{1} \frac{7x^3}{3} dx = \frac{7x^4}{12} \Bigg|_{0}^{1} = \frac{7}{12}$$

**PROBLEMA 3.23** Determinar el volumen del cuerpo formado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$ con el cilindro $y = x^2$ y el plano $y = x$

**Solución:**

Para conocer los límites de integración en "x", igualamos ambas funciones respecto a "y"

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = x \ \therefore \ \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

De esta manera, los límites de integración en "x" son:

$$0 \le x \le 1$$

Al graficar, nos damos cuenta que para "y" en el sector intersectado, el límite inferior es $y = x^2$ y el límite superior $y = x$

$$x^2 \le y \le x$$

Para saber los límites de integración en "z", se recomienda graficar los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, aunque sin mucho esfuerzo podemos notar que los límites de integración son:

$$(x^2 + y^2) \le z \le (2x^2 + 2y^2)$$

De esta manera, determinamos el volumen del cuerpo formado.

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left( -\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) dx$$

$$V = \left( -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{35}$$

# CAPÍTULO 4

# CÁLCULO INTEGRAL APLICADO A LA INGENIERÍA ESTRUCTURAL

## 4.1 MOMENTO ESTÁTICO Y MOMENTO DE INERCIA

**PROBLEMA 4.1** Determinar el momento estático y el momento de inercia del triángulo respecto al eje OZ

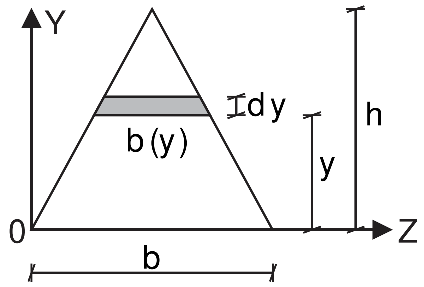


Fig. 4.1

**Solución:**

El área del elemento diferencial (sector sombreado) será:

$$dA = b(y)dy$$

Por relación de triángulos tenemos:

$$\frac{b(y)}{h-y} = \frac{b}{h} \qquad \Rightarrow \qquad b(y) = \frac{b}{h}(h-y)$$

De esta manera, el momento estático será:

$$S_Z = \int_A y\,dA = \frac{b}{h}\int_0^h y(h-y)dy = \frac{b}{h}\left(\frac{y^2 h}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \frac{bh^2}{6}$$

Ahora, determinamos el momento de inercia:

$$I_Z = \int_A y^2 dA = \frac{b}{h}\int_0^h y^2(h-y)dy = \frac{bh^3}{12}$$

**PROBLEMA 4.2** Determinar el momento de inercia del rectángulo respecto al eje OZ

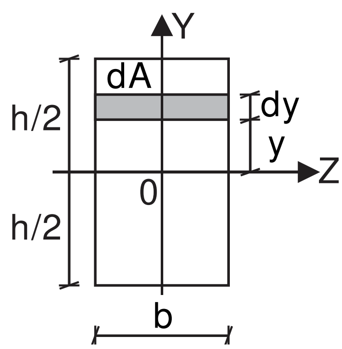


Fig. 4.2

**Solución:**

El área del elemento diferencial (sector sombreado) será:

$$dA = bdy$$

Luego, calculamos el momento de inercia

$$I_Z = \int_A y^2 dA = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

## 4.2 REACCIONES Y DIAGRAMAS EN VIGAS

**PROBLEMA 4.3** Para la viga simplemente apoyada y sometida a una carga sinoidal $w(x) = w\,\text{sen}\dfrac{\pi x}{L}$, se pide determinar las reacciones en los apoyos y graficar sus diagramas de fuerza cortante (V) y momento flector (M)

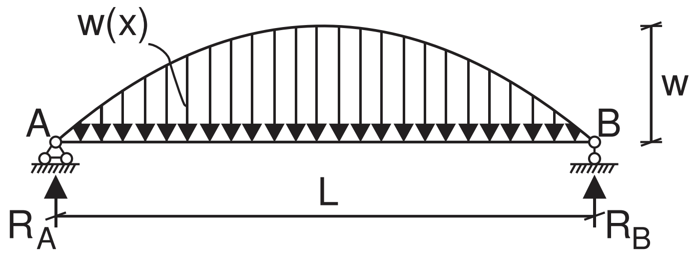


Fig. 4.3

**Solución:**

Como la carga es simétrica, las reacciones en los apoyos serán iguales, siendo sus valores igual a la mitad del área de carga, la cual la calculamos mediante integración.

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}\int_0^L w(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^L w\,\text{sen}\frac{\pi x}{L}dx = -\frac{wL}{2\pi}\cos\frac{\pi x}{L}\Big|_0^L = \frac{wL}{\pi}$$

De esta manera, la fuerza cortante por la longitud de la viga será:

$$V(x) = R_A - \int_0^x w(t)dt = \frac{wL}{\pi} - \int_0^x w\,\text{sen}\frac{\pi t}{L}dt = \frac{wL}{\pi} + \frac{wL}{\pi}\cos\frac{\pi t}{L}\Big|_0^x = \frac{wL}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L}$$

Siendo:

t – variable en los límites $0 \le t \le x$

x – parámetro y límite superior del integral

Ahora, determinamos la ecuación del momento por la longitud de la viga, para lo cual aplicamos la relación diferencial entre fuerza cortante y momento flector.

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Integramos y obtenemos:

$$M(x) = M_0 + \int_0^x V(t)dt = \int_0^x \frac{wL}{\pi}\cos\frac{\pi t}{L}dt = \frac{wL}{\pi}.\frac{L}{\pi}\text{sen}\frac{\pi t}{L}\Big|_0^x = \frac{wL^2}{\pi^2}\text{sen}\frac{\pi x}{L}$$

Siendo:

$M_0$ - momento flector al inicio de la viga, es decir, cuando x=0 y su valor es cero.

Con las ecuaciones obtenidas, determinamos los valores de la fuerza cortante y momento flector en los puntos principales, entendiéndose que para graficar una curva, tan solo es necesaria obtener tres puntos (tabla 4.1)

Tabla 4.1

| x | V | M |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{wL}{\pi}$ | 0 |
| L/2 | 0 | $\frac{wL^2}{\pi^2}$ |
| L | $-\frac{wL}{\pi}$ | 0 |

Luego, procedemos a graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura 4.4

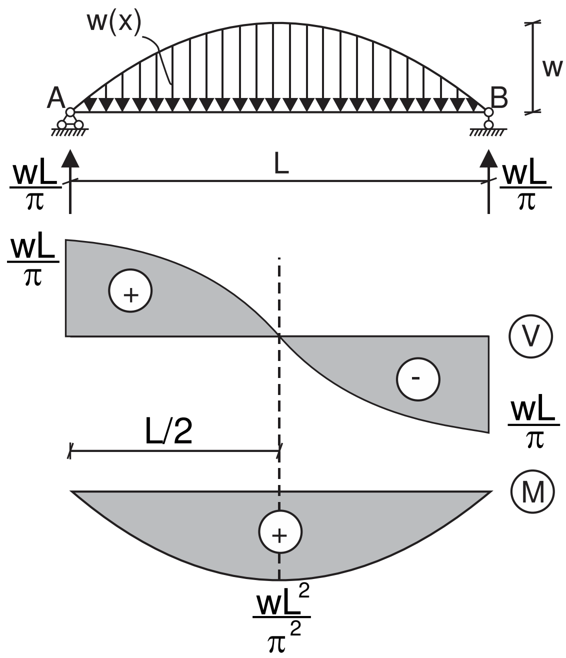


Fig. 4.4

### 4.3 DEFLEXIONES DE MIEMBROS CARGADOS AXIALMENTE

**PROBLEMA 4.4** Un resorte se alarga 0,02m debido a la acción de una fuerza de tracción de 50N. Determinar el valor del trabajo realizado para que el resorte se alargue 0,10m

**Solución:**

Para resortes sabemos que:

$$F = Kx$$

Siendo:

F – fuerza

K – rigidez del resorte

x – alargamiento

Reemplazamos valores para el caso del estiramiento de 0,02m y obtenemos el valor de la rigidez del resorte.

$$50 = K.0,02 \qquad \Rightarrow \qquad K = 2500N/m$$

En consecuencia, la fuerza en función de x será $F(x) = 2500x$

De esta manera, el trabajo necesario para lograr un alargamiento de 0,01m será:

$$W = \int_0^{0,1} 2500x dx = 1250x^2 \Big|_0^{0,1} = 12,5N.m = 12,5J$$

**PROBLEMA 4.5** Una barra de sección transversal rectangular y espesor constante "t" se somete a tracción por fuerzas P. El ancho de la barra varía linealmente desde $b_1$ en el extremo izquierdo hasta $b_2$ en el extremo derecho. Obtener una fórmula para el alargamiento de la barra y calcular su valor si $b_1 = 4p\lg$, $b_2 = 6p\lg$, $L = 60p\lg$, $t = 1p\lg$, $P = 8000lb$ y $E = 30.10^6 psi$

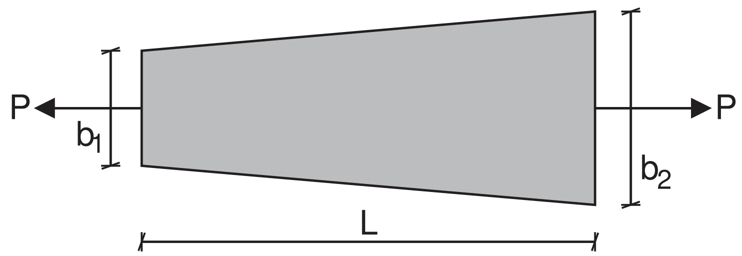


Fig. 4.5

**Solución:**

Aplicando la geometría, determinamos el valor del lado $b_x$ para la sección a una longitud "x" del extremo izquierdo

$$b_x = b_1 + \frac{(b_2 - b_1)x}{L}$$

Luego:

$$A_x = b_x t = \left[b_1 + \frac{(b_2 - b_1)x}{L}\right]t = \left[\frac{b_1 L + (b_2 - b_1)x}{L}\right]t$$

En consecuencia:

$$\delta = \int_0^L \frac{Pdx}{EA_x} = \int_0^L \frac{Pdx}{E\left[\frac{b_1 L + (b_2 - b_1)x}{L}\right]t} = \frac{PL}{Et(b_2 - b_1)} \int_0^L \frac{d[b_1 L + (b_2 - b_1)x]}{[b_1 L + (b_2 - b_1)x]}$$

$$\delta = \frac{PL}{Et(b_2 - b_1)} \ln[b_1 L + (b_2 - b_1)x]_0^L = \frac{PL}{Et(b_2 - b_1)} \ln\frac{b_2}{b_1}$$

Reemplazamos valores y obtenemos el alargamiento:

$$\delta = \frac{8000.60}{30.10^6.1.(6-4)} \ln\frac{6}{4} = 0,00324p\lg$$

### 4.4 ÁNGULO DE GIRO EN TORSIÓN

**PROBLEMA 4.6** Una barra prismática AB de sección transversal circular sólida (rigidez torsional=$GI_p$) está empotrada en su extremo izquierdo y se somete a un momento torsor distribuido de intensidad constante "t" por unidad de longitud. Obtener una fórmula para el ángulo de giro en torsión en el extremo libre B de la barra.

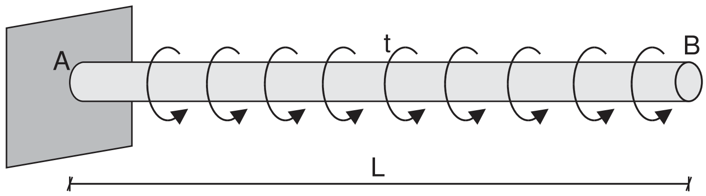


Fig. 4.6

**Solución:**

Se sabe que el ángulo de giro en torsión para un momento torsor distribuido será:

$$\phi = \int_0^L \frac{T_x dx}{GI_p} = \int_0^L \frac{t x dx}{GI_p} = \frac{tL^2}{2GIp}$$

Siendo:

$T_x$ - momento torsor puntual a una longitud x del extremo libre

G – módulo de elasticidad en cortante

$I_p$ - momento de inercia polar

**PROBLEMA 4.7** Resolver el problema anterior si la intensidad del momento torsor distribuido varía linealmente desde un valor máximo $t_o$ en el extremo A hasta cero en el extremo B

**Solución:**

La intensidad del momento torsor distribuido $t_x$ a una distancia "x" del extremo B lo determinamos por relaciones de triángulos rectángulos.

$$\frac{t_x}{x} = \frac{t_o}{L} \quad \Rightarrow \quad t_x = \frac{t_o x}{L}$$

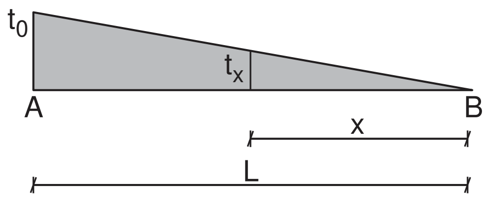


Fig. 4.7

El momento torsor puntual a una distancia "x" será:

$$T_x = \frac{1}{2}(x)(t_x) = \frac{t_o x^2}{2L}$$

Luego, determinamos el ángulo de giro en torsión.

$$\phi = \int_0^L \frac{T_x dx}{GI_p} = \int_0^L \frac{\left(\frac{t_o x^2}{2L}\right)dx}{GI_p} = \frac{t_o L^2}{6GI_p}$$

## 4.5 PENDIENTE Y DEFLEXIÓN EN VIGAS

**PROBLEMA 4.8** Determinar la pendiente y deflexión en los puntos A y B para la viga en voladizo mostrada en la figura 4.8

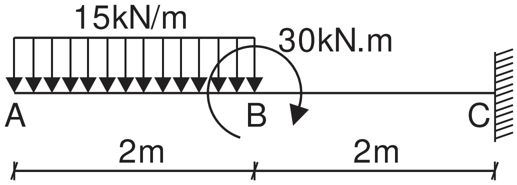


Fig. 4.8

**Solución:**

Sabemos que:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

Determinamos por la Estática las ecuaciones de momento para los tramos AB y BC e integramos una vez para determinar la pendiente y dos veces para determinar la deflexión, considerando las condiciones de extremos y principio de continuidad para determinar las constantes de integración.

TRAMO AB $(0 \le x \le 2)$

La ecuación de momento será:

$$M_{AB} = -15x\left(\frac{x}{2}\right) = -7{,}5x^2$$

Luego:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -7{,}5x^2$$

Integramos una vez y obtenemos la ecuación de la pendiente:

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\theta = -2{,}5x^3 + C_1$$

Integramos por segunda vez y obtenemos la ecuación de la deflexión:

$$EIy = -\frac{2{,}5x^4}{4} + C_1x + C_2$$

TRAMO BC $(2 \le x \le 4)$

La ecuación de momento será:

$$M_{BC} = -15.2.(x-1) + 30 = -30(x-1) + 30$$

Luego:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -30(x-1) + 30$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -15(x-1)^2 + 30x + C_3$$

$$EIy = -5(x-1)^3 + 15x^2 + C_3x + C_4$$

Determinamos las constantes de integración $C_3$ y $C_4$ aplicando las condiciones de extremo en C

a) Si x=4 $\Rightarrow$ $\theta_{x=4} = 0 \;\therefore\; C_3 = 15$

b) Si x=4 $\Rightarrow$ $y_{x=4} = 0 \;\therefore\; C_4 = -165$

Ahora, aplicamos el principio de superposición para el punto B, donde termina el tramo AB e inicia el tramo BC

c) Si x=2 $\Rightarrow$ $\theta^{AB}_{x=2} = \theta^{BC}_{x=2} \;\therefore\; C_1 = 80$

d) Si x=2 $\Rightarrow$ $y^{AB}_{x=2} = y^{BC}_{x=2} \;\therefore\; C_2 = -230$

Luego, determinamos la pendiente y deflexión en el punto A, para ello, reemplazamos x=0 en las ecuaciones del tramo AB

$$\theta_A = \theta^{AB}_{x=0} = \frac{1}{EI}\left[-2{,}5(0)^3 + 80\right] = \frac{80}{EI}$$

$$y_A = y^{AB}_{x=0} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{2{,}5(0)^4}{4} + 80(0) - 230\right] = -\frac{230}{EI}$$

Ahora, determinamos la pendiente y deflexión en el punto B, para ello, reemplazamos x=2 en las ecuaciones del tramo AB. También se puede obtener reemplazando x=2 en las ecuaciones del tramo BC, siendo los resultados los mismos.

$$\theta_B = \theta^{AB}_{x=2} = \frac{1}{EI}\left[-2{,}5(2)^3 + 80\right] = \frac{60}{EI}$$

$$y_A = y^{AB}_{x=2} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{2{,}5(2)^4}{4} + 80(2) - 230\right] = -\frac{80}{EI}$$

Para ambos puntos, la pendiente va en sentido antihorario y la deflexión verticalmente hacia abajo.

**PROBLEMA 4.9** Determinar la deflexión y pendiente en el extremo libre B de la viga en voladizo mostrada en la figura 3.9, si está sometida a una carga parabólica $w = \frac{w_o x^2}{L^2}$

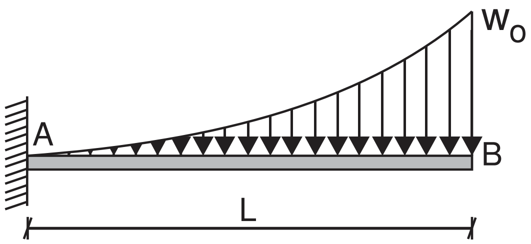


Fig. 4.9

**Solución:**

Planteamos la ecuación de la carga distribuida.

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{w_o x^2}{L^2}$$

Integramos por primera vez y obtenemos:

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{w_o x^3}{3L^2} + C_1$$

CONDICIÓN:

a) Si x=L $\Rightarrow$ $V_{x=L} = 0 \therefore C_1 = \frac{w_o L}{3}$

De esta forma, la ecuación de la fuerza cortante quedará así:

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{w_o x^3}{3L^2} + \frac{w_o L}{3}$$

Integramos por segunda vez, obteniendo:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w_o x^4}{12L^2} + \frac{w_o Lx}{3} + C_2$$

CONDICIÓN:

b) Si x=L $\Rightarrow$ $M_{x=L} = 0 \therefore C_2 = -\frac{w_o L^2}{4}$

Entonces la ecuación del momento flector quedará así:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w_o x^4}{12L^2} + \frac{w_o Lx}{3} - \frac{w_o L^2}{4}$$

Integramos por tercera vez y obtenemos:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{w_o x^5}{60L^2} + \frac{w_o Lx^2}{6} - \frac{w_o L^2 x}{4} + C_3$$

CONDICIÓN:

c) Si x=0 $\Rightarrow$ $\theta_{x=0} = 0 \therefore C_3 = 0$

De esta manera, la ecuación de la pendiente quedará así:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{w_o x^5}{60L^2} + \frac{w_o Lx^2}{6} - \frac{w_o L^2 x}{4}$$

Integramos por cuarta vez y obtenemos:

$$EIy = -\frac{w_o x^6}{360L^2} + \frac{w_o Lx^3}{18} - \frac{w_o L^2 x^2}{8} + C_4$$

CONDICIÓN:

d) Si x=0 $\Rightarrow$ $y_{x=0} = 0 \therefore C_4 = 0$

De esta manera, la ecuación de la deflexión será:

$$EIy = -\frac{w_o x^6}{360L^2} + \frac{w_o Lx^3}{18} - \frac{w_o L^2 x^2}{8}$$

Determinamos el valor de la pendiente en el extremo libre B

$$\theta_B = \theta_{x=L} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{w_o L^3}{60} + \frac{w_o L^3}{6} - \frac{w_o L^3}{4}\right] = -\frac{w_o L^3}{10EI}$$

De esta manera, se concluye que la pendiente va en sentido horario.

Ahora, calculamos la deflexión en el extremo libre B

$$y_B = y_{x=L} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{w_o L^4}{360} + \frac{w_o L^4}{18} - \frac{w_o L^4}{8}\right] = -\frac{13 w_o L^4}{180EI}$$

La deflexión en el punto va verticalmente hacia abajo y su valor es máximo.

## 4.6 PENDIENTE Y DESPLAZAMIENTO EN ARCOS

**PROBLEMA 4.10** Determinar los desplazamientos vertical y horizontal, así como la pendiente en el extremo libre B del arco mostrado en la figura 4.10

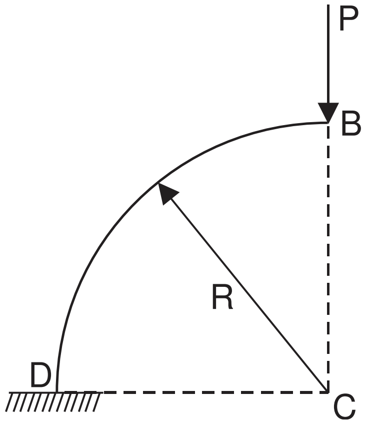


Fig. 4.10

**Solución:**

Determinamos las ecuaciones de los momentos para un punto F del arco, para los casos, cuando está sometido a la carga real P y el otro caso, cuando está sometido a la carga unitaria en el sentido vertical en el punto B, tal como se muestran en las figuras 4.11 y 4.12

<u>CASO CARGA REAL</u>:

$$M = -PR\,\text{sen}\varphi$$

$$ds = Rd\varphi$$

$$0 \le \varphi \le \pi/2$$

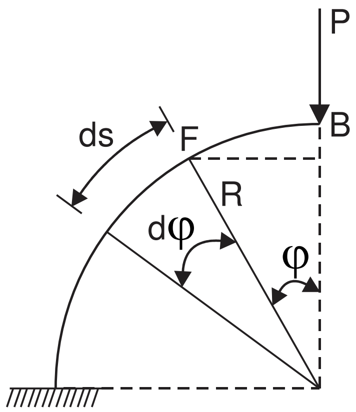


Fig. 4.11

<u>CASO CARGA UNITARIA VERTICAL</u>:

$$M_1 = -R\,\text{sen}\varphi$$

$$ds = Rd\varphi$$

$$0 \le \varphi \le \pi/2$$

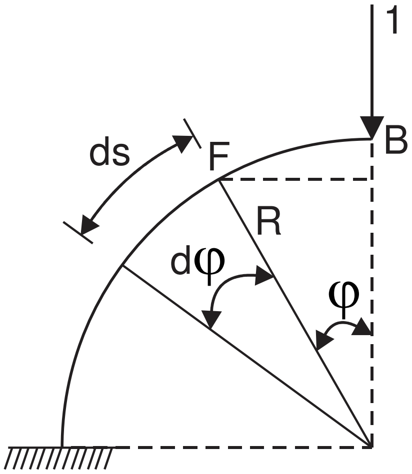


Fig. 4.12

Luego:

$$\delta_V^B = \int_S \frac{MM_1 ds}{EI} = \int_0^{\pi/2} \frac{(-PR\text{sen}\varphi)(-R\text{sen}\varphi)}{EI} Rd\varphi = \frac{\pi PR^3}{4EI}$$

Como el signo es positivo, indica que el desplazamiento es vertical hacia abajo.

Ahora, analizamos el desplazamiento horizontal en el mismo punto B, aplicando una carga unitaria en el punto y dirección requerida, tal como se muestra en la figura 4.13 y determinamos el valor de su desplazamiento, multiplicando los diagramas de las figuras 4.11 y 4.13

<u>CASO CARGA UNITARIA HORIZONTAL</u>:

$$M_1 = -R(1-\cos\varphi)$$

$$ds = Rd\varphi$$

$$0 \le \varphi \le \pi/2$$

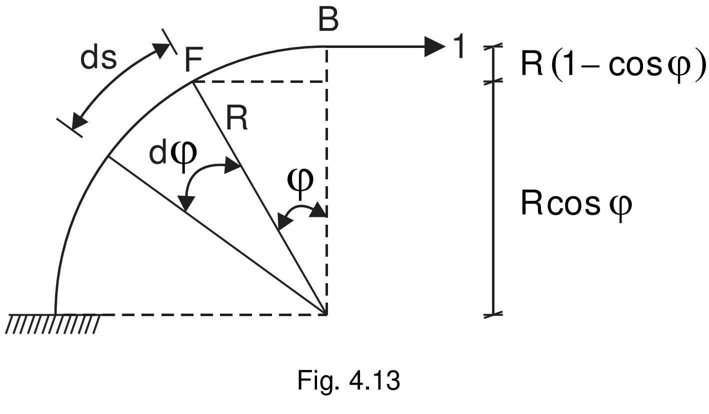


Fig. 4.13

$$\delta_H^B = \int_S \frac{MM_1 ds}{EI} = \int_0^{\pi/2} \frac{(-PR\text{sen}\varphi)\left[-R(1-\cos\varphi)\right]}{EI} Rd\varphi = \frac{PR^3}{2EI}$$

Como el signo es positivo, indica que el desplazamiento es horizontal hacia la derecha.

Ahora, analizamos la pendiente en el mismo punto B, aplicando un momento unitario en el punto, tal como se muestra en la figura 4.14 y determinamos el valor de su pendiente, multiplicando los diagramas de las figuras 4.11 y 4.14

<u>CASO MOMENTO UNITARIO</u>:

$$M_1 = -1$$

$$ds = R d\varphi$$

$$0 \le \varphi \le \pi/2$$

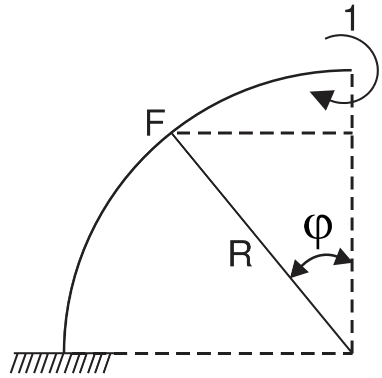


Fig. 4.14

$$\theta_B = \int_S \frac{MM_1 ds}{EI} = \int_0^{\pi/2} \frac{(-PR\operatorname{sen}\varphi)(-1)}{EI} R d\varphi = \frac{PR^2}{EI}$$

Como el signo es positivo, indica que la pendiente va en sentido horario.

## 4.7 CARGA CRÍTICA DE BARRAS EN FLEXIÓN LONGITUDINAL

**PROBLEMA 4.11** Determinar la carga crítica para la barra simplemente apoyada de sección constante y sometida a una carga P en el centro de su longitud. Considerar $y = a\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}$

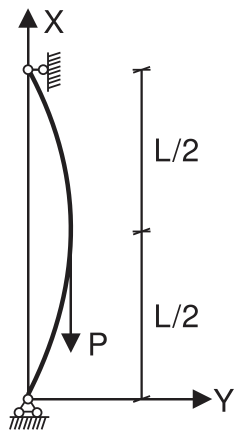


Fig. 4.15

**Solución:**

Para determinar la carga crítica aplicamos la siguiente fórmula:

$$P_{crít} = \frac{\int_0^L EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^{L_P}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}$$

Siendo:

$L_p$ - abscisa del punto de aplicación de la carga longitudinal.

De esta manera, obtenemos:

$$P_{crít} = \frac{a^2 EI \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L sen^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx}{a^2 \frac{\pi^2}{L^2} \int_0^{\frac{L}{2}} cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx} = \frac{2\pi^2 EI}{L^2} = 19{,}74 \frac{EI}{L^2}$$

# ANEXO

## TABLA DE INTEGRALES SIMPLES

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ Siendo $(n \neq -1)$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ Siendo $(a > 0, \ a \neq 1)$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$ Siendo $|x| > |a|$

16. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

17. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

18. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

# BIBLIOGRAFÍA


1. **Berman G.N.** Problemas propuestos del curso Análisis Matemático. Editorial Ciencia de Moscú. Rusia, 1985. – 384p.
2. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con zapatas aisladas. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2006. – 125p.
3. **Villarreal Castro Genner.** Análisis de estructuras con el programa LIRA 9.0. Lima, 2006. – 115p.
4. **Villarreal Castro Genner.** Interacción suelo-estructura en edificios altos. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2007. – 142p.
5. **Villarreal Castro Genner.** Análisis estructural. Lima, 2008. – 335p.
6. **Villarreal Castro Genner – Oviedo Sarmiento Ricardo.** Edificaciones con disipadores de energía. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2009. – 159p.
7. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales. Lima, 2009. – 336p.
8. **Villarreal Castro Genner.** Estática: Problemas resueltos. Lima, 2011. – 227p.
9. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales I: Prácticas y exámenes USMP. Lima, 2012. – 206p.
10. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales II: Prácticas y exámenes USMP. Lima, 2013. – 199p.
11. **Villarreal Castro Genner.** Ingeniería sismo-resistente: Prácticas y exámenes UPC. Lima, 2013. – 100p.
12. **Villarreal Castro Genner.** Mecánica de materiales: Prácticas y exámenes UPC. Lima, 2015. – 195p.
13. **Villarreal Castro Genner.** Diseño sísmico de edificaciones: Problemas resueltos. Lima, 2015. – 96p.
14. **Villarreal Castro Genner.** Estática: Prácticas y exámenes resueltos. Lima, 2016. – 118p.
15. **Villarreal Castro Genner.** Ingeniería sismorresistente: Problemas resueltos. Lima, 2016. – 80p.
16. **Villarreal Castro Genner.** Dinámica estructural: Curso breve. Lima, 2016. – 60p.
17. **Villarreal Castro Genner – Díaz La Rosa Sánchez Marco.** Edificaciones con disipadores viscosos. Lima, 2016. – 133p.
18. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con plateas de cimentación. Lima, 2017. – 60p.
19. **Villarreal Castro Genner.** Dinámica: Problemas resueltos. Lima, 2017. – 83p.

# ÍNDICE