

CUADERNO DE EJERCICIOS DE RESISTENCIA DE MATERIALES Y ELASTICIDAD



GRADO EN INGENIERÍA AEROESPACIAL
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

CURSO 2021/2022

LAURA MORENO CORRALES
ISMAEL BEN-YELUN INSENER
KHANH NGUYEN GIA
VICENTE FRANCISCO GONZÁLEZ ALBUIXECH
VÍCTOR JESÚS AMORES MEDIANERO
LUIS SAUCEDO MORA

Cuaderno de Ejercicios.

CURSO: 2021-2022

ASIGNATURA: Resistencia de Materiales y Elasticidad

DEPARTAMENTO: Aeronaves y Vehículos Espaciales

CENTRO: Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica

Universidad Politécnica de Madrid

Índice general

1	Introducción	9
1.1	Prólogo	10
	I Álgebra Tensorial y MATLAB	11
2	Álgebra Tensorial	12
2.1	Enunciados de problemas de Álgebra Tensorial	13
2.2	Solución de problemas de Álgebra Tensorial	15
3	MATLAB	21
3.1	Enunciados de problemas de iniciación en MATLAB	22
3.2	Solución de problemas de iniciación en MATLAB	25
	II Elasticidad Lineal	40
4	Tensiones	41
4.1	Enunciados de ejercicios de Tensor de Tensiones	42
4.2	Solución de ejercicios de Tensor de Tensiones	51
5	Deformaciones	89
5.1	Enunciados de ejercicios del Tensor de Deformaciones	90
5.2	Solución de ejercicios del Tensor de Deformaciones	97

6	Desplazamientos	128
6.1	Enunciados de ejercicios de Campo de Desplazamientos	129
6.2	Solución de ejercicios de Campo de Desplazamientos	134
	III Flexión Compuesta y Desviada	156
7	Flexión Compuesta	157
7.1	Enunciados de ejercicios de Flexión Compuesta	158
7.2	Solución de ejercicios de Flexión Compuesta	159
8	Flexión Desviada	165
8.1	Enunciados de ejercicios de Flexión Desviada	166
8.2	Solución de ejercicios de Flexión Desviada	172
	IV Cortante	194
9	Cortante	195
9.1	Enunciados de ejercicios de Cortante	196
9.2	Solución de ejercicios de Cortante	198
	V Torsión	211
10	Torsión	212
10.1	Enunciados de ejercicios de Torsión	213
10.2	Solución de ejercicios de Torsión	220
	VI Axil	248
11	Axil	249
11.1	Enunciados de ejercicios de Axil	250
11.2	Solución de ejercicios de Axil	256
	VII Deformaciones, Giros y Desplazamientos.	289
12	Deformaciones, Giros y Desplazamientos [Isostáticas].	290
12.1	Enunciados de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos	291

12.2	Solución de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos [Isostáticas]	295
13	Deformaciones, Giros y Desplazamientos [Hiperestáticas].	325
13.1	Enunciados de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos	326
13.2	Solución de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos	329
VIII Membranas y Pandeo		348
14	Membranas y Pandeo	349
14.1	Enunciados de ejercicios de Membranas	350
14.2	Solución de ejercicios de Membranas	351
14.3	Enunciados de ejercicios de Pandeo	355
14.4	Solución de ejercicios de Pandeo	357
IX Cálculo de Estructuras		369
15	Cálculo de Estructuras	370
15.1	Enunciados de ejercicios de Cálculo de Estructuras	371
15.2	Solución de ejercicios de Cálculo de Estructuras	372
X Cálculo Matricial		375
16	Cálculo Matricial	376
16.1	Enunciados de ejercicios de Cálculo Matricial	377
16.2	Solución de ejercicios de Cálculo Matricial	383

Síntesis 0.1 (Resistencia de Materiales y Elasticidad) Estudio, aplicación e implementación de las teorías clásicas elástico-lineales del cálculo estructural con sólidos deformables.

Competencias y descripción de contenidos en la memoria de verificación del grado 0.1

Competencias:

(CG3) Capacidad para identificar y resolver problemas aplicando, con creatividad, los conocimientos adquiridos.

(CE07-CA01) Comprender el comportamiento de las estructuras ante las sollicitaciones en condiciones de servicio y situaciones límite.

(CE15-CA09) Conocimiento adecuado y aplicado a la ingeniería de: los principios de la mecánica del medio continuo y las técnicas de cálculo de su respuesta.

(CE18-CA12) Conocimiento adecuado y aplicado a la ingeniería de: las principales características y propiedades físicas y mecánicas de los materiales.

(CE19-CA13) Conocimiento aplicado de teoría de estructuras.

Descripción de contenidos:

- Teoría de la elasticidad lineal.
- Cálculo de barras y de estructuras que trabajan a tracción-compresión.
- Teoría de vigas.
- Cálculo de estructuras que trabajan a flexión-torsión.
- Estudio de la estabilidad.
- Introducción a la teoría de placas.
- Cálculo matricial de estructuras.

Resultados del aprendizaje en la memoria de verificación del grado 0.1

(RA01) Comprensión, análisis y cálculo de problemas sencillos de elementos estructurales bajo comportamiento lineal.

(RA02) Comprensión de la teoría básica y de la solución de algunos problemas fundamentales en elasticidad lineal de sólidos.

(RA03) Conocimiento, comprensión y aplicación de los métodos de cálculo.

(RA04) Aplicación, análisis y síntesis de estructuras.

Actividades formativas en la memoria de verificación del grado 0.1

- Lecciones Magistrales (LM).
- Resolución de problemas en el aula (RPA).
- Trabajo autónomo de estudio y realización de ejercicios.
- Preparación y realización de actividades evaluables.

1. Introducción

1.1 Prólogo

10



1.1. Prólogo

Este libro va dirigido a los estudiantes de ingeniería, en especial al grado de ingeniería aeroespacial, siendo una recopilación del trabajo realizado por el Grupo Avanzado de MÓdelado y SIMulación NO-lineal de Sólidos (GAMOSINOS) durante los cursos académicos 2020, 2021 y 2022.

En sus páginas, los alumnos, descubrirán un amplio número de problemas resueltos que abarcan los conocimientos necesarios para alcanzar los objetivos en la asignatura de Elasticidad y Resistencia de Materiales de 2º del Grado Aeroespacial.

El libro está estructurado en diez capítulos y cada uno de ellos está dividido a su vez en dos partes. En una primera parte, están los enunciados de los problemas a resolver mientras que en una segunda parte están dichos problemas con sus respectivas soluciones. El capítulo I está dedicado al Álgebra Tensorial y al MATLAB, el capítulo II está referido a los conceptos de Elasticidad Lineal (Tensiones, Deformaciones y Desplazamientos), los capítulos III, IV, V, VI, VII, VIII recopilan los conceptos referentes a la Resistencia de Materiales (Flexión, Cortante, Axil, Torsión, Giros, Desplazamientos, Deformaciones, Membranas y Pandeo). Y, finalmente, los capítulos IX y X sientan las bases para un primer acercamiento al cálculo de estructuras y al cálculo matricial.

Esperamos que esta recopilación de problemas sean de ayuda en vuestro estudio.

Grupo Avanzado de MÓdelado y SIMulación NO-lineal de Sólidos

Parte I

Álgebra Tensorial y MATLAB

2. Álgebra Tensorial

2.1	Enunciados de problemas de Álgebra Tensorial	13
2.2	Solución de problemas de Álgebra Tensorial	15



2.1. Enunciados de problemas de Álgebra Tensorial

1. Dos tensores de segundo orden \mathbf{A} y \mathbf{B} tienen las siguientes representaciones matriciales en la base \mathbf{X} :

$$[\mathbf{A}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}, [\mathbf{B}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

- Verifica que los dos tensores son ortogonales.
 - Demuestra que el tensor \mathbf{A} describe la rotación.
2. Siga los siguientes pasos que le permitirán comprender mejor cuestiones sobre el cálculo de la energía en el tema de elasticidad:
- Demuestre que $\mathbf{AB} : \mathbf{C} = \mathbf{A} : \mathbf{CB}^T$.
 - Utilice esta relación para demostrar que para dos tensores de segundo orden cualesquiera, σ y ε si definimos una función escalar $U(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon$ se puede calcular en cualquier base.
 - Utilice las propiedades que conoce de álgebra de tensores para demostrar que función antes mencionada puede escribirse también como, $U = \frac{1}{2} \sigma^V : \varepsilon^V + \frac{1}{2} \sigma^D : \varepsilon^D$, donde los superíndices V y D representan la parte volumétrica y desviadora del tensor
 - Demstrar que si ambos tensores tienen los mismos autovectores la función antes mencionada se podría también calcular de la siguiente manera $U = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 \sigma_1 + \varepsilon_2 \sigma_2 + \varepsilon_3 \sigma_3)$ donde σ_i y ε_i son los autovalores de ambos tensores.
3. Sea \mathbf{X} la base canónica y dada la base \mathbf{X}' definida por:

$$[\mathbf{e}'_1]_{\mathbf{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}^T$$

$$[\mathbf{e}'_2]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}^T$$

$$[\mathbf{e}'_3]_{\mathbf{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}^T$$

El estado de un cuerpo se describe con el siguiente vector expresado en la base \mathbf{X}'

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{X}'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}'}^T$$

A dicho cuerpo le pueden pasar dos operaciones descritas por los siguientes tensores de segundo orden, expresados en la base \mathbf{X} :

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

$$[\mathbf{S}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

Se pide:

- a) El resultado de \mathbf{T} y \mathbf{S} actuando sobre v en la base \mathbf{X} y \mathbf{X}' .
- b) El vector resultado de $\mathbf{T} \circ \mathbf{S}$ y $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ sobre v en las bases \mathbf{X} y \mathbf{X}' . ¿Coinciden?
- c) Interpretar lo que significa \mathbf{T} y \mathbf{S} .

4. Demostrar la relación

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (2.1)$$

utilizada para la definición del producto escalar de dos tensores de segundo orden i.e.

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} \quad (2.2)$$

2.2. Solución de problemas de Álgebra Tensorial

1. Dos tensores de segundo orden \mathbf{A} y \mathbf{B} tienen las siguientes representaciones matriciales en la base \mathbf{X} :

$$[\mathbf{A}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}, [\mathbf{B}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

- a) Verifica que los dos tensores son ortogonales.
 b) Demuestra que el tensor \mathbf{A} describe la rotación.

Solución

- a) Para que un tensor cualquiera \mathbf{S} es ortogonal, se debe cumplir que:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{1}$$

con $\mathbf{1} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$ es el tensor de unidad. Ahora veamos los tensores de segundo orden \mathbf{A} y \mathbf{B} , tenemos

$$[\mathbf{A}^T][\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

$$[\mathbf{B}^T][\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{1}$$

Por tanto, los dos tensores son ortogonales.

- b) Un tensor que describe la rotación debe cumplir que es un tensor ortogonal y que su determinante sea 1. Por lo anterior, se sabe que el tensor \mathbf{A} es ortogonal, ahora veamos si su determinante es 1. Tenemos:

$$\det(\mathbf{A}) = \det[\mathbf{A}] = 1$$

Por tanto, el tensor \mathbf{A} describe una rotación

2. Siga los siguientes pasos que le permitirán comprender mejor cuestiones sobre el cálculo de la energía en el tema de elasticidad:

- Demuestre que $\mathbf{AB} : \mathbf{C} = \mathbf{A} : \mathbf{CB}^T$.
- Utilice esta relación para demostrar que para dos tensores de segundo orden cualesquiera, σ y ε si definimos una función escalar $U(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon$ se puede calcular en cualquier base.
- Utilice las propiedades que conoce de álgebra de tensores para demostrar que función antes mencionada puede escribirse también como, $U = \frac{1}{2} \sigma^V : \varepsilon^V + \frac{1}{2} \sigma^D : \varepsilon^D$, donde los superíndices V y D representan la parte volumétrica y desviadora del tensor
- Demstrar que si ambos tensores tienen los mismos autovectores la función antes mencionada se podría también calcular de la siguiente manera $U = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 \sigma_1 + \varepsilon_2 \sigma_2 + \varepsilon_3 \sigma_3)$ donde σ_i y ε_i son los autovalores de ambos tensores.

Solución

a)

$$(A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (B_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) : (C_{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) = (A_{ij} B_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l) : (C_{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) = A_{ij} B_{jl} C_{il}$$

$$(A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (C_{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) \cdot (B_{kl} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k) = (A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (C_{mn} B_{kn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_k) = A_{ij} B_{jn} C_{in}$$

Notar que el índice l en la primera expresión y el índice n en la segunda expresión son mudos.

- b) Notando que la matriz de cambio de base es equivalente a realizar una rotación (al menos matemáticamente) podemos expresar cualquier tensor en otro sistema de representación como:

$$[\sigma]_{X'} = [\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}] [\sigma]_X [\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}]^T$$

y en base a lo que se ha dicho sobre la rotación y el cambio de base:

$$\sigma' = \mathbf{R} \sigma \mathbf{R}^T; \quad \varepsilon' = \mathbf{R} \varepsilon \mathbf{R}^T$$

$$\sigma' : \varepsilon' = \mathbf{R} \varepsilon \mathbf{R}^T : \mathbf{R} \sigma \mathbf{R}^T$$

Usando dos veces la propiedad demostrada anteriormente:

$$\sigma' : \varepsilon' = \mathbf{R} \varepsilon \mathbf{R}^T : \mathbf{R} \sigma \mathbf{R}^T = \varepsilon : \mathbf{R}^T \mathbf{R} \sigma \mathbf{R}^T \mathbf{R}$$

Como \mathbf{R} es un tensor equivalente a una matriz de rotación, será un tensor ortogonal:

$$\sigma' : \varepsilon' = \varepsilon : \mathbf{R}^T \mathbf{R} \sigma \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \varepsilon : \sigma$$

- c) Otra forma de calcular la traza de un tensor A es mediante la expresión $A : I$ y dado que la parte volumétrica de un tensor es un escalar multiplicado por la identidad, queda claro que la doble contracción de la parte volumétrica de un tensor ε^V por otro tensor A , $\varepsilon^V : A = \alpha I : A = \alpha \cdot tr(A)$ si A es desviador su traza es 0, por lo tanto, $\varepsilon^V : A = 0$.
- d) Dado que ambos tensores tienen las mismas direcciones principales y ya hemos visto que la anterior expresión se puede calcular en cualquier base (es invariante), podemos representar ambos tensores en dicha base y realizar el doble producto contraído:

$$\frac{1}{2} \sigma : \varepsilon = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{X_{ppal}} : \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}_{X_{ppal}} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

3. Sea \mathbf{X} la base canónica y dada la base \mathbf{X}' definida por:

$$[\mathbf{e}'_1]_{\mathbf{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}^T$$

$$[\mathbf{e}'_2]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}^T$$

$$[\mathbf{e}'_3]_{\mathbf{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}^T$$

El estado de un cuerpo se describe con el siguiente vector expresado en la base \mathbf{X}'

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{X}'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}'}^T$$

A dicho cuerpo le pueden pasar dos operaciones descritas por los siguientes tensores de segundo orden, expresados en la base \mathbf{X} :

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

$$[\mathbf{S}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

Se pide:

- El resultado de \mathbf{T} y \mathbf{S} actuando sobre v en la base \mathbf{X} y \mathbf{X}' .
- El vector resultado de $\mathbf{T} \circ \mathbf{S}$ y $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ sobre v en las bases \mathbf{X} y \mathbf{X}' . ¿Coinciden?
- Interpretar lo que significa \mathbf{T} y \mathbf{S} .

Solución

- Para pasar de un sistema de referencia a otro necesitamos la matriz de cambio de base, en ese caso tenemos:

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'} = [\mathbf{R}]_{\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Podemos entonces obtener

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{X}'} = [\mathbf{R}]_{\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}}^T [\mathbf{T}]_{\mathbf{X}} [\mathbf{R}]_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}'}$$

$$[\mathbf{S}]_{\mathbf{X}'} = [\mathbf{R}]_{\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}}^T [\mathbf{S}]_{\mathbf{X}} [\mathbf{R}]_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}'}$$

asimismo

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{X}} = [\mathbf{R}]_{\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}}^T [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & -3 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}^T$$

Considerando entonces la actuación de \mathbf{T} y \mathbf{S} sobre v en la base \mathbf{X} y \mathbf{X}' , llegamos a

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{X}} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} & -3 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}^T$$

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{X}'} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}'} = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} & 3 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}'}^T$$

$$[\mathbf{S}]_{\mathbf{X}} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) & -3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}^T$$

$$[\mathbf{S}]_{\mathbf{X}'} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}'} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{\sqrt{2}} & 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) & \frac{-3}{\sqrt{2}} + 2 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}'}^T$$

b) Considerando la composición, tenemos

$$[\mathbf{T} \circ \mathbf{S}]_{\mathbf{X}} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}} = [\mathbf{S}]_{\mathbf{X}} [\mathbf{T}]_{\mathbf{X}} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} - 3 & -\frac{6}{\sqrt{2}} - 3 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}^T$$

$$[\mathbf{S} \circ \mathbf{T}]_{\mathbf{X}} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}} = [\mathbf{T}]_{\mathbf{X}} [\mathbf{S}]_{\mathbf{X}} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} - 6 & -\frac{3}{\sqrt{2}} - 3 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}^T$$

$$[\mathbf{T} \circ \mathbf{S}]_{\mathbf{X}'} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}'} = [\mathbf{S}]_{\mathbf{X}'} [\mathbf{T}]_{\mathbf{X}'} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}'} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 7 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}'}^T$$

$$[\mathbf{S} \circ \mathbf{T}]_{\mathbf{X}'} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}'} = [\mathbf{T}]_{\mathbf{X}'} [\mathbf{S}]_{\mathbf{X}'} [\mathbf{v}]_{\mathbf{X}'} = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} - 6 & \frac{3}{\sqrt{2}} + 3 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}'}^T$$

c) Analizando los resultados obtenidos vemos que no son coincidentes. Esto es debido a que el producto de matrices es asociativo, pero no conmutativo; así que, hay que tener cuidado en el orden de aplicación de las operaciones.

4. Demostrar la relación

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (2.3)$$

utilizada para la definición del producto escalar de dos tensores de segundo orden i.e.

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} \quad (2.4)$$

Solución

El término i, j de un tensor de segundo orden \mathbf{A} se obtiene proyectando dicho tensor sobre las bases \mathbf{e}_i y \mathbf{e}_j . Expresado matemáticamente,

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_j, \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{A} \mathbf{e}_j$ es la aplicación del tensor \mathbf{A} sobre la base \mathbf{e}_j (i.e. un vector). Dicha proyección también puede enunciarse de la siguiente manera:

$$A_{ij} = \mathbf{A} : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (2.6)$$

Por tanto, expresando de forma genérica un tensor $\mathbf{T} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ y proyectándolo sobre el tensor generado por el producto diádico de las bases \mathbf{e}_k y \mathbf{e}_l , se llega a la siguiente igualdad:

$$\mathbf{T} : (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_l \quad (2.7)$$

Sustituyendo $\mathbf{T} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$,

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = \mathbf{e}_k \cdot [(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_l] \quad (2.8)$$

Teniendo en cuenta la propiedad $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}$ en el término entre corchetes de la parte derecha de la Ecuación (2.8), se llega a

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) &= \mathbf{e}_k \cdot \underbrace{[(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_i]}_{\delta_{jl}} \\ &= \delta_{jl} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i \\ &= \delta_{jl} \delta_{ik}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

quedando así demostrada la relación del enunciado.

Teniendo en cuenta dicha relación, puede demostrarse la definición del producto escalar de dos tensores de segundo orden:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{kl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = A_{ij} B_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = A_{ij} B_{ij} \quad (2.10)$$

3. MATLAB

- 3.1 Enunciados de problemas de iniciación en MATLAB 22
- 3.2 Solución de problemas de iniciación en MATLAB 25



3.1. Enunciados de problemas de iniciación en MATLAB

1. Primeros pasos con MATLAB.

a) Declare una variable a , asigne el valor 5 a esta variable y muéstrela por pantalla a través de la función nativa `disp`.

b) Escriba el siguiente mensaje

Variable `a` acquires the following value: 5

sustituyendo el valor de la variable anterior a haciendo uso de la función nativa `fprintf` (en lugar de escribir 5 directamente).

c) Cree un bucle de 1 a 3 donde se impriman por pantalla dichos valores.

d) Genere una función $f(x) = x^2$ (bien al final del fichero, o en un fichero aparte de nombre `f.m`). Imprima por pantalla los valores $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ y $f(5)$.

e) Declare un vector columna $u = [1, 2, 3]$ y un vector fila $v = [4, 5, 6]$ y muéstrelos por pantalla. Muestre, asimismo, la traspuesta de dichos vectores, u^T y v^T .

f) Declare la siguiente matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

e imprímala por pantalla, así como su traspuesta, A^T .

2. La representación del tensor de segundo orden A en la base X es:

$$[A]_X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_X$$

Se pide:

a) Calcular los autovalores y autovectores

b) Determinar la forma matricial del tensor A en la nueva base X' , la cual gira 30° respecto al eje z de la base X

3. Utilice sus conocimientos de álgebra de tensores y de programación en MATLAB para implementar las siguientes funciones:

a) Una función llamada `delta_kron` que calcule el valor de la delta de δ_{ij} para unos valores cuales quiera de los índices i y j .

b) Implemente otra función `levi_cta` que calcule el valor de ε_{ijk} para 3 valores cualesquiera de los índices i, j, k .

Ahora puede utilizar las funciones anteriores para implementar las siguientes funciones útiles en álgebra de tensores:

a) `my_trace` que calcule la traza de un tensor de segundo orden y 3D.

- b) `vol_part` que calcule la parte volumétrica del tensor de segundo orden y 3D.
- c) `dev_part` que calcule la parte desviadora de un tensor de segundo orden y 3D.
- d) `my_det` que calcule el determinante de un tensor de segundo orden y 3D.

Finalmente, defina un tensor de segundo orden cualquier, ε cuyos autovalores, $\varepsilon_i \sim 1E-6$ y para este tensor compare las siguientes magnitudes $tr(\varepsilon)$ y $\det(\mathbf{I} + \varepsilon) - 1$ ¿Qué puede observar? ¿Puede identificar el motivo de este resultado?

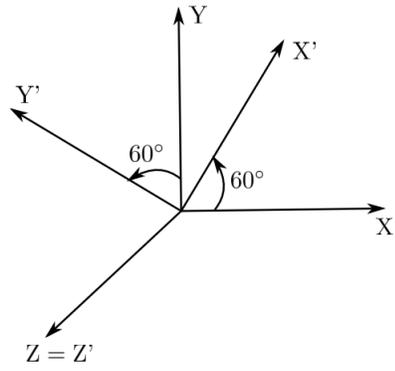
4. Para entender un poco mejor la representación de los tensores de segundo orden en diferentes base:
 - a) Implemente una función (`dyad`) que calcule el producto diádico de dos vectores $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$
 - b) Implemente una función (`delta_kron`) que calcule el valor de la delta de δ_{ij} para unos valores cuales quiera de los índices i y j
 - c) Utilice la función `dyad` para escribir una función `from_spectral` que construya un tensor de simétrico de segundo orden a partir de sus autovalores y autovectores utilizando la expresión de la descomposición espectral.
 - d) Construya una función `scalar_prod` que calcule el producto escalar de dos vectores.
 - e) Con la función `scalar_prod`, construya una función `rot_matX_Xp` que acepte como argumentos los vectores base de dos bases diferentes y que devuelva la matriz de rotación entre las dos bases $[\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}]$.
 - f) Genere un tensor de segundo orden arbitrario con la función nativa de Matlab `rand(3,3)` y simétricelo para obtener un tensor de segundo orden simétrico arbitrario \mathbf{S} . Utilice la función nativa de MATLAB `eig` para calcular los autovalores y autovectores de \mathbf{S} .

Con todo esto, pruebe primero a representar los autovectores de \mathbf{S} en otra base usando la función `rot_mat` y construya el tensor de segundo orden que resulta de las nuevas representaciones de los autovectores y de los mismos autovalores. Compare el resultado anterior con el que obtendría con $[\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}][\mathbf{S}]_X[\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}]^T$.

5. Sea el tensor de tensiones dado expresados en los ejes $X'Y'Z'$:

$$[\sigma_{ij}]_{X'Y'Z'} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{X'Y'Z'} \quad (\text{MPa})$$

- a) Calcular los autovalores (Tensiones principales).
- b) Calcular los autovectores asociados a cada autovalor (Direcciones principales).
- c) Rotar el tensor de tensiones a unos ejes XYZ como se muestra en la figura adjunta.



d) Implementar los apartados anteriores en MATLAB.

3.2. Solución de problemas de iniciación en MATLAB

1. Primeros pasos con MATLAB.

a) Declare una variable `a`, asigne el valor 5 a esta variable y muéstrela por pantalla a través de la función nativa `disp`.

b) Escriba el siguiente mensaje

```
Variable `a` acquires the following value: 5
```

sustituyendo el valor de la variable anterior a haciendo uso de la función nativa `fprintf` (en lugar de escribir 5 directamente).

c) Cree un bucle de 1 a 3 donde se impriman por pantalla dichos valores.

d) Genere una función $f(x) = x^2$ (bien al final del fichero, o en un fichero aparte de nombre `f.m`). Imprima por pantalla los valores $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ y $f(5)$.

e) Declare un vector columna $u = [1, 2, 3]$ y un vector fila $v = [4, 5, 6]$ y muéstrelos por pantalla. Muestre, asimismo, la traspuesta de dichos vectores, u^T y v^T .

f) Declare la siguiente matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

e imprímala por pantalla.

Solución

```
%%% MATLAB TUTORIAL
% Declare a variable e.g.

a = 5;

% Print in command line its value

disp(a);

% Print in command line its value (along with a message)

txt = sprintf('Variable `a` acquires the following value:
%d', a);
disp(txt)

% Loop

disp('Entering example loop');
for i=1:3
    disp(i);
end

% Compute values for function

disp('Compute different values for function `f` defined
below');
for i=1:5
    disp(f(i));
end

% Vectors and matrices

u = [1, 2, 3]; % row vector (separated by commas or
whitespaces)
disp(u)

v = [4; 5; 6];
disp(v) % column vector (separated by semicolon) ; (punto y
coma)

% Transpose of a vector (row vector into column vector and
viceversa)

disp(u');
disp(v');
```

```
% Matrix

A = [1, 2, 3;
     4, 5, 6;
     7, 8, 9];

disp('Matrix A is:')
disp(A)

% Function
function y = f(x)
    y = x^2;
end
```

2. La representación del tensor de segundo orden \mathbf{A} en la base \mathbf{X} es:

$$[\mathbf{A}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

Se pide:

- Calcular los autovalores y autovectores
- Determinar la forma matricial del tensor \mathbf{A} en la nueva base \mathbf{X}' , la cual gira 30° respecto al eje z de la base \mathbf{X}

Solución

- Para calcular los autovalores y autovectores del tensor \mathbf{A} , se declara en MATLAB la matriz de los componentes de este tensor, y se usa el comando *eig* como sigue:

$$[V, D] = \text{eig}(A)$$

donde la Matriz D es una matriz diagonal con los autovalores mientras que la matriz V es una matriz completa donde sus columnas corresponden a los autovectores asociados a cada autovalor. Para este tensor se obtiene:

$$D = \begin{bmatrix} 1,2679 & 0 & 0 \\ 0 & 2,000 & 0 \\ 0 & 0 & 4,7321 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0,628 & -0,707 & 0,325 \\ -0,460 & 0,000 & 0,888 \\ 0,628 & 0,707 & 0,325 \end{bmatrix}$$

- La matriz de rotación de la base \mathbf{X} a la base \mathbf{X}' es

$$[\mathbf{R}_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La forma matricial del tensor \mathbf{A} en la nueva base \mathbf{X}' es

$$[\mathbf{A}]_{\mathbf{X}'} = [\mathbf{R}_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'}][\mathbf{A}]_{\mathbf{X}}[\mathbf{R}_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'}]^T = \begin{bmatrix} 3,366 & 1,366 & 0,500 \\ 1,366 & 2,634 & 0,866 \\ 0,500 & 0,866 & 2,000 \end{bmatrix}$$

3. Utilice sus conocimientos de álgebra de tensores y de programación en MATLAB para implementar las siguientes funciones:

- Una función llamada `delta_kron` que calcule el valor de la delta de δ_{ij} para unos valores cuales quiera de los índices i y j .
- Implemente otra función `levi_cta` que calcule el valor de ε_{ijk} para 3 valores cualesquiera de los índices i, j, k .

Ahora puede utilizar las funciones anteriores para implementar las siguientes funciones útiles en álgebra de tensores:

- `my_trace` que calcule la traza de un tensor de segundo orden y 3D.
- `vol_part` que calcule la parte volumétrica del tensor de segundo orden y 3D.
- `dev_part` que calcule la parte desviadora de un tensor de segundo orden y 3D.
- `my_det` que calcule el determinante de un tensor de segundo orden y 3D.

Finalmente, defina un tensor de segundo orden cualquier, ε cuyos autovalores, $\varepsilon_i \sim 1E - 6$ y para este tensor compare las siguientes magnitudes $tr(\varepsilon)$ y $\det(\mathbf{I} + \varepsilon) - 1$ ¿Qué puede observar? ¿Puede identificar el motivo de este resultado?

Solución

Utilice sus conocimientos de álgebra de tensores y de programación en MATLAB para implementar las siguientes funciones:

- Una función llamada `delta_kron` que calcule el valor de la delta de δ_{ij} para unos valores cuales quiera de los índices i y j .

```

1 function val = delta_k(i,j)
2     val = 0;
3     if i == j
4         val = 1;
5     end
6 end

```

- Implemente otra función `levi_cta` que calcule el valor de ε_{ijk} para 3 valores cualesquiera de los índices i, j, k .

```

1 function val = levi_cta(i,j,k)
2     e1 = [1 0 0];
3     e2 = [0 1 0];
4     e3 = [0 0 1];
5
6     Mat = zeros(3);
7
8     Mat(i,:) = e1;
9     Mat(j,:) = e2;
10    Mat(k,:) = e3;
11
12    val = det(Mat);
13 end

```

Ahora puede utilizar las funciones anteriores para implementar las siguientes funciones útiles en álgebra de tensores:

a) `my_trace` que calcule la traza de un tensor de segundo orden y 3D.

```
1 function val = my_trace(T)
2     val = sum(diag(T));
3 end
```

b) `vol_part` que calcule la parte volumétrica del tensor de segundo orden y 3D.

```
1 function volTensor = vol_part(T)
2     assert(size(T,1) == size(T,2), "No tienen la misma dimension");
3     assert(size(T,1) == 3,"No tiene dimension 3");
4
5     Id = eye(3);
6     volTensor = (1/3)*my_trace(T)*Id;
7 end
```

c) `dev_part` que calcule la parte desviadora de un tensor de segundo orden y 3D.

```
1 function devTensor = dev_part(T)
2     assert(size(T,1) == size(T,2), "No tienen la misma dimension");
3     assert(size(T,1) == 3,"No tiene dimension 3");
4     devTensor = T - vol_part(T);
5 end
```

d) `my_det` que calcule el determinante de un tensor de segundo orden y 3D.

```
1 function val = my_det(T)
2     val = 0; %we have a sum in 3 indices , val accumulates the sum
3     for i = 1:3
4         for j = 1:3
5             for k = 1:3
6                 val = val + levi_cta(i,j,k)*T(1,i)*T(2,j)*T(3,k);
7             end
8         end
9     end
10 end
```

Finalmente, defina un tensor de segundo orden cualquier, ε cuyos autovalores, $\varepsilon_i \sim 1E-6$ y para este tensor compare las siguientes magnitudes $tr(\varepsilon)$ y $\det(\mathbf{I} + \varepsilon) - 1$ ¿Qué puede observar? ¿Puede identificar el motivo de este resultado?

```
1 % first we define the tensors
2 eps = [2 0 0; 0 1 0; 0 0 5]*1e-6; %The eigvals has to be small
3 Id = eye(3);
4
5 detminus1_small = my_det(Id + eps) - 1;
6
7 trace_small = my_trace(eps);
8
9
10 %What happens if the eigvals are not small?
11 eps = [2 0 0; 0 1 0; 0 0 5]; %The eigvals are large now
12 Id = eye(3);
13
14 detminus1_large = my_det(Id + eps) - 1;
15
16 trace_large = my_trace(eps);
```

4. Para entender un poco mejor la representación de los tensores de segundo orden en diferentes base:
- Implemente una función (`dyad`) que calcule el producto diádico de dos vectores $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$
 - Implemente una función (`delta_kron`) que calcule el valor de la delta de δ_{ij} para unos valores cuales quiera de los índices i y j
 - Utilice la función `dyad` para escribir una función `from_spectral` que construya un tensor de simétrico de segundo orden a partir de sus autovalores y autovectores utilizando la expresión de la descomposición espectral.
 - Construya una función `scalar_prod` que calcule el producto escalar de dos vectores.
 - Con la función `scalar_prod`, construya una función `rot_matX_Xp` que acepte como argumentos los vectores base de dos bases diferentes y que devuelva la matriz de rotación entre las dos bases $[\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}]$.
 - Genere un tensor de segundo orden arbitrario con la función nativa de Matlab `rand(3,3)` y simetrícelo para obtener un tensor de segundo orden simétrico arbitrario \mathbf{S} . Utilice la función nativa de Matlab `eig` para calcular los autovalores y autovectores de \mathbf{S} .

Con todo esto, pruebe primero a representar los autovectores de \mathbf{S} en otra base usando la función `rot_mat` y construya el tensor de segundo orden que resulta de las nuevas representaciones de los autovectores y de los mismos autovalores. Compare el resultado anterior con el que obtendría con $[\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}][\mathbf{S}]_X[\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}]^T$.

Solución

Para entender un poco mejor la representación de los tensores de segundo orden en diferentes base:

- Implemente una función (`dyad`) que calcule el producto diádico de dos vectores $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$

```

1  %We assume u and v are column vectors
2  function tensor = dyad(u,v)
3      tensor = u*v';
4  end

```

- Implemente una función (`delta_kron`) que calcule el valor de la delta de δ_{ij} para unos valores cuales quiera de los índices i y j

```

1  function val = delta_k(i,j)
2      val = 0;
3      if i == j
4          val = 1;
5      end
6  end

```

- Utilice la función `dyad` para escribir una función `from_spectral` que construya un tensor de simétrico de segundo orden a partir de sus autovalores y autovectores utilizando la expresión de la descomposición espectral.

```

1 %Note that we are again assuming vectors are columns
2 function tensor = from_spectral(lamb_1, lamb_2, lamb_3, ...
3                               eigv1, eigv2, eigv3)
4     tensor = lamb_1*dyad(eigv1, eigv1) + lamb_2*dyad(eigv2, eigv2) + ...
5             lamb_3*dyad(eigv3, eigv3);
6 end

```

- d) Construya una función `scalar_prod` que calcule el producto escalar de dos vectores.

```

1 %Note that we are again assuming vectors are columns
2 function val = scalar_prod(u,v)
3     val = u'*v;
4 end

```

- e) Con la función `scalar_prod`, construya una función `rot_matX_Xp` que acepte como argumentos los vectores base de dos bases diferentes y que devuelva la matriz de rotación entre las dos bases $[\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}]$.

Note that:

$$[\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_1]_{X'} & [\mathbf{e}_2]_{X'} & [\mathbf{e}_3]_{X'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_3 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_3 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}$$

```

1 %Note that we are again assuming vectors are columns
2 function mat = rot_matX_Xp(e1, e2, e3, e1p, e2p, e3p)
3     mat = zeros(3);
4     mat(1,1) = scalar_prod(e1, e1p);
5     mat(2,1) = scalar_prod(e1, e2p);
6     mat(3,1) = scalar_prod(e1, e3p);
7     mat(1,2) = scalar_prod(e2, e1p);
8     mat(2,2) = scalar_prod(e2, e2p);
9     mat(3,2) = scalar_prod(e2, e3p);
10    mat(1,3) = scalar_prod(e3, e1p);
11    mat(2,3) = scalar_prod(e3, e2p);
12    mat(3,3) = scalar_prod(e3, e3p);
13 end

```

- f) Genere un tensor de segundo orden arbitrario con la función nativa de Matlab `rand(3,3)` y simétricelo para obtener un tensor de segundo orden simétrico arbitrario \mathbf{S} . Utilice la función nativa de Matlab `eig` para calcular los autovalores y autovectores de \mathbf{S} .

```

1 T = rand(3,3); %random 2nd order tensor adding 1 for all eigvals
2 S = (1/2)*(T + T'); %Compute the symmetric part
3
4 % we can see S = S'
5 S
6 S'
7
8 [V,D] = eig(S);
9
10 %The eigvals are in the diagonal of D

```

```

11
12 eigval1 = D(1,1);
13 eigval2 = D(2,2);
14 eigval3 = D(3,3);
15
16 %The eigenvectors are the columns of V
17 eigv1 = V(:,1);
18 eigv2 = V(:,2);
19 eigv3 = V(:,3);
20
21 %Reconstructing S with spectral decomp
22 S_spectral = from_spectral(eigval1, eigval2, eigval3, ...
23                          eigv1, eigv2, eigv3);

```

Con todo esto, pruebe primero a representar los autovectores de S en otra base usando la función `rot_mat` y construya el tensor de segundo orden que resulta de las nuevas representaciones de los autovectores y de los mismos autovalores. Compare el resultado anterior con el que obtendría con $[\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}][\mathbf{S}]_X[\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}]^T$.

```

1 T = rand(3,3); %random 2nd order tensor adding 1 for all eigvals
  positive
2 S = (1/2)*(T + T'); %Compute the symmetric part
3
4 %we can see S = S'
5 S
6 S'
7
8 [V,D] = eig(S);
9
10 %The eigvals are in the diagonal of D
11
12 eigval1 = D(1,1);
13 eigval2 = D(2,2);
14 eigval3 = D(3,3);
15
16 %The eigenvectors are the columns of V (referred to the canonical basis)
17 eigv1 = V(:,1);
18 eigv2 = V(:,2);
19 eigv3 = V(:,3);
20
21 %first we define the canonical basis
22
23 e1 = [1 0 0]';
24 e2 = [0 1 0]';
25 e3 = [0 0 1]';
26
27 %first we choose the new basis
28
29 e1p = (1/sqrt(2))*[1 1 0]';
30 e2p = (1/sqrt(2))*[-1 1 0]';
31 e3p = [0 0 1]';
32
33 %check the determinant to see is correctly oriented
34 basismat = [e1p e2p e3p];
35 orientation = det(basismat);
36

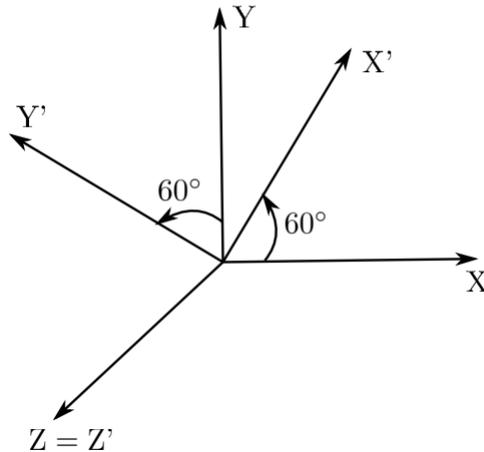
```

```
37 %compute rotation matrix from canonical to prime
38
39 Rcan_xp = rot_matX_Xp(e1,e2,e3,e1p,e2p,e3p); %vp = Rcan_xp * vcan
40
41 %check, we see it is orthogonal
42 Rcan_xp*Rcan_xp'
43
44 %we represent the eigvecs of S wrt the basis Xp
45
46 eigv1p = Rcan_xp*eigv1;
47 eigv2p = Rcan_xp*eigv2;
48 eigv3p = Rcan_xp*eigv3;
49
50 %we construct the tensors with the eigvectors represented in other basis
51
52 Sp1 = from_spectral(eigval1, eigval2, eigval3, ...
53                  eigv1p, eigv2p, eigv3p);
54
55 %Changing the basis of representation of S
56 Sp2 = Rcan_xp*S*Rcan_xp';
```

5. Sea el tensor de tensiones dado expresados en los ejes $X'Y'Z'$:

$$[\sigma_{ij}]_{X'Y'Z'} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{X'Y'Z'} \quad (\text{MPa})$$

- Calcular los autovalores (Tensiones principales).
- Calcular los autovectores asociados a cada autovalor (Direcciones principales).
- Rotar el tensor de tensiones a unos ejes XYZ como se muestra en la figura adjunta.



- Implementar las operaciones en MATLAB.

Solución

- Calcular los autovalores (Tensiones principales)**

Los autovalores asociados al tensor de tensiones se obtienen resolviendo el determinante:

$$\det(\sigma_{ij} - \lambda) = 0 \quad (3.1)$$

quedando,

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

siendo los autovalores:

$$\lambda_1 = 1,44 \text{ (MPa)} \quad \lambda_2 = 5,56 \text{ (MPa)} \quad \lambda_3 = 7,0 \text{ (MPa)}$$

Las tensiones principales asociadas al tensor de tensiones se obtienen al ordenar los autovalores de mayor a menor:

$$\sigma_1 = 7,00 \text{ (MPa)} > \sigma_2 = 5,56 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = 1,44 \text{ (MPa)}$$

b) **Calcular los autovectores asociados a cada autovalor (Direcciones principales).**

El autovector asociado al autovalor λ_1 será:

$$\lambda_1 = 1,44$$

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda_1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^1 \\ n_y^1 \\ n_z^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$1,56n_x^1 = -2n_y^1 \quad n_z^1 = 0$$

$$n_i^1 = \begin{bmatrix} -1,28 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Vector unitario} \rightarrow \frac{n_i^1}{\|n_i^1\|} = \begin{bmatrix} -0,79 \\ 0,62 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El autovector asociado al autovalor λ_2 será:

$$\lambda_2 = 5,56$$

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda_2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$2,56n_x^2 = 2n_y^2 \quad n_z^2 = 0$$

$$n_i^2 = \begin{bmatrix} -1,28 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Vector unitario} \rightarrow \frac{n_i^2}{\|n_i^2\|} = \begin{bmatrix} 0,62 \\ 0,79 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El autovector asociado al autovalor λ_3 será:

$$\lambda_3 = 7,00$$

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda_3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 - \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 - \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^3 \\ n_y^3 \\ n_z^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

siendo en este caso el autovector asociado a la dirección Z':

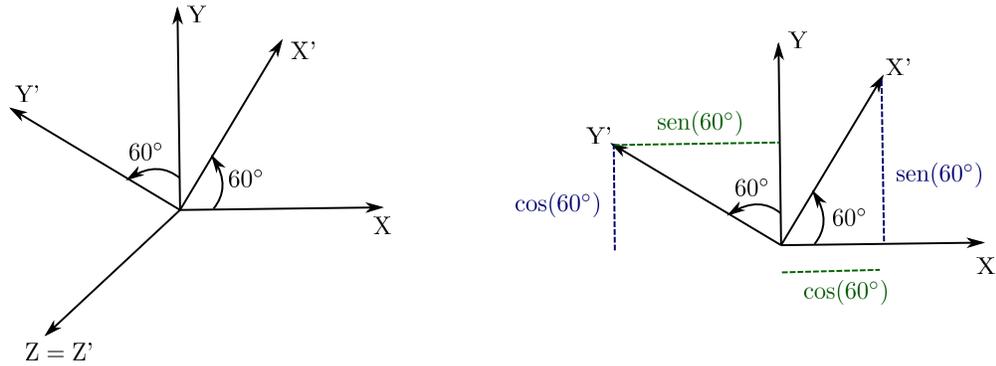
$$n_i^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Propiedades de las matrices simétricas

- a) Siempre son diagonalizables
- b) Autovalores reales.
- c) Autovectores ortonormales.

- c) Rotar el tensor de tensiones a unos ejes XYZ como se muestra en la figura adjunta.

Para obtener la matriz de rotación se realiza la proyección de la base X'Y'Z' en la base XYZ como se muestra en la figura.



$$X = X' \cos(60^\circ) - Y' \sin(60^\circ)$$

$$Y = X' \sin(60^\circ) + Y' \cos(60^\circ)$$

$$Z = Z'$$

La matriz de rotación de la base X' a la base X es

$$[\mathbf{R}_{X' \rightarrow X}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma matricial del tensor σ_{ij} en la nueva base: X es

$$[\sigma_{ij}]_X = [\mathbf{R}_{X' \rightarrow X}] [\sigma_{ij}]_{X'} [\mathbf{R}_{X' \rightarrow X}]^T = \begin{bmatrix} 2,02 & -1,433 & 0 \\ -1,433 & 4,98 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               CÓDIGO                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Definición del tensor de tensiones.

A=[3 2 0;2 4 0; 0 0 7]

%Para calcular los autovalores y autovectores se utiliza la
función 'eig'.
%D=Autovalores (Tensiones principales)
%V=Autovectores (Direcciones principales)

[V,D]=eig(A)

%Definición de la matriz de rotación

R=[cosd(60) -sind(60) 0; sind(60) cosd(60) 0; 0 0 1]

%Definición de la traspuesta
%R'

%Rotación del tensor

B=R*A*R'
```

Parte II

Elasticidad Lineal

4. Tensiones

4.1	Enunciados de ejercicios de Tensor de Tensiones	42
4.2	Solución de ejercicios de Tensor de Tensiones	51



4.1. Enunciados de ejercicios de Tensor de Tensiones

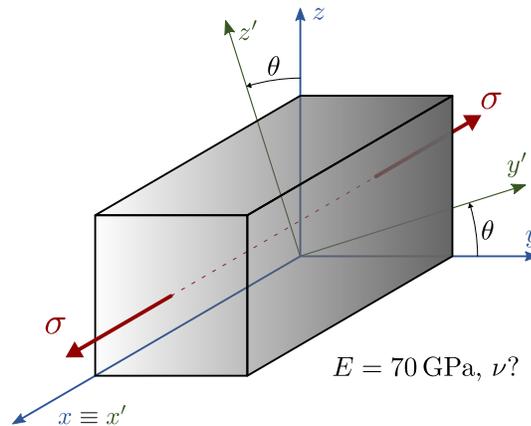
1. Partiendo de un tensor de tensiones σ , que queremos girar un ángulo θ en el eje z , deducir una formulación general para poder caracterizar cualquier componente del tensor de tensiones en función de las tensiones principales en el plano de giro y el ángulo girado.

Asumir para ello que las direcciones principales del tensor de tensiones coinciden con los ejes x, y, z del sistema de referencia \mathbf{X} antes del giro θ .

2. Se define como material incompresible aquel que no sufre cambios de volumen ante cualquier sollicitación de carga. Considérese el sólido representado en la figura sometido a un caso de carga uniaxial:

$$\sigma_{xx} = \sigma, \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

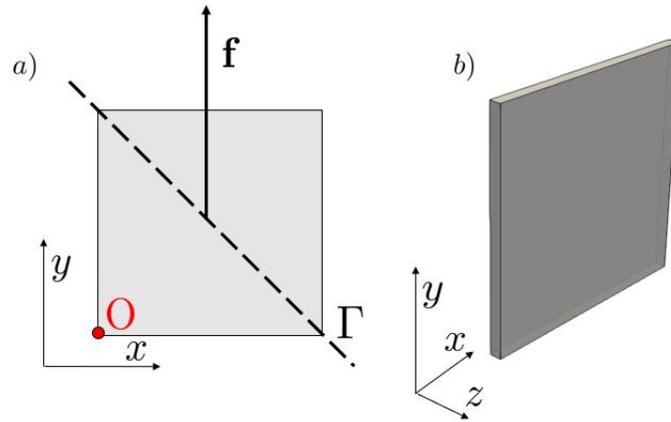
Para un material incompresible, isótropo, elástico y lineal, se desea:



- a) Hallar el tensor de tensiones, expresándolo en el sistema de referencia de ejes principales, $[\sigma]_{\mathbf{X}_{\text{ppal}}}$
- b) Hallar el tensor de deformaciones infinitesimales, expresándolo en el sistema de referencia de ejes principales, $[\varepsilon]_{\mathbf{X}_{\text{ppal}}}$
- c) Hallar la componente volumétrica del tensor de deformaciones infinitesimales en el sistema de referencia \mathbf{X}' ($\{x', y', z'\}$ en la figura), $[\varepsilon^V]_{\mathbf{X}'}$
- d) Calcular el valor que debe adquirir el coeficiente de Poisson ν para que se cumpla la condición de incompresibilidad

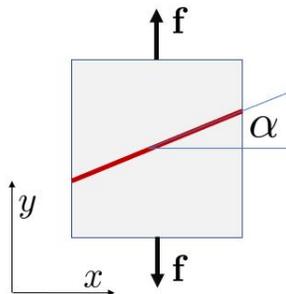
Datos: $\sigma = 7 \text{ MPa}$, $E = 70 \text{ GPa}$, $\theta = \pi/6 \text{ rad}$

3. La figura muestra un elemento de dimensiones $100 \times 100 \times 5 \text{ mm}$. Sabemos que si realizamos un corte según el plano Γ la fuerza resultante \mathbf{f} es vertical, aunque desconocemos su valor. Γ está definido por su vector ortogonal $\mathbf{n} = (\cos(\pi/4), \sin(\pi/4), 0)$. Todos los vectores están referenciados al sistema \mathbf{X} que se muestra en la figura. El corte de Γ con el elemento genera un área $A_\Gamma = A/\sqrt{0,5}$, donde A es el área seccional del elemento ($100 \times 5 \text{ mm}^2$). El elemento estudiado es elástico lineal.



Se pide:

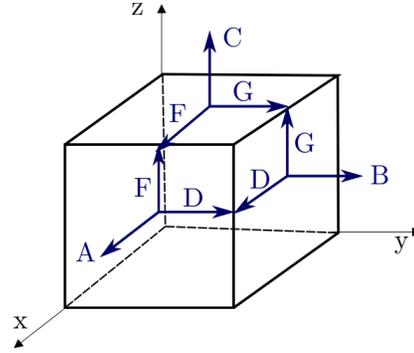
- a) Calcular en función de $\mathbf{f} = (0, f_2, 0)^T$ el tensor de tensiones, sabiendo que en el tensor de deformación en \mathbf{X} cumple que $\varepsilon_{11} = -\nu\varepsilon_{22}$.
 - b) Después del estado anterior se aplica una presión hidrostática, y sabemos que, con las nuevas condiciones, en el corte del tensor de tensiones con el plano Γ la fuerza sigue siendo vertical, que las direcciones principales están rotadas un ángulo de $22,5^\circ$ en z , con respecto al sistema de referencia del enunciado \mathbf{X} , y que la deformación ε_{11} en el sistema \mathbf{X} es nula. Calcular el coeficiente de Poisson del material.
 - c) Justificar la existencia o no de estados planos de tensiones o deformaciones en los casos de los puntos anteriores 1 y 2.
4. El sólido de la figura posee una unión mediante un ligante que forma un ángulo α con la horizontal. Esta unión no genera una discontinuidad ni en las deformaciones ni en las tensiones del sólido, y se puede considerar mecánicamente homogéneo. No así a nivel resistente, donde sabemos que el ligante tiene unas propiedades resistentes de τ_L y σ_L según los criterios de Tresca y Rankine.



Se pide:

- a) Determinar el ángulo α , hacerlo mediante el círculo de Mohr y la rotación del tensor.

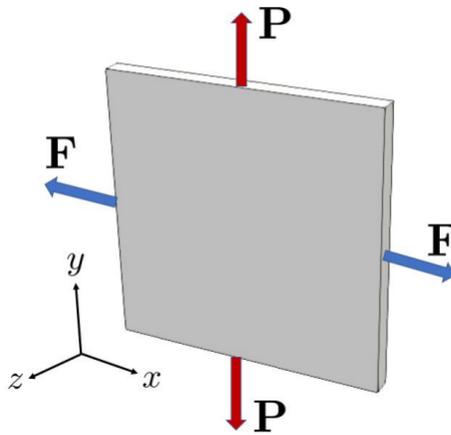
5. El cubo de la figura de lado L está representando el estado tensional (MPa) de un punto P .



- Tensión principal máxima (MPa).
- Tensión equivalente de Von-Mises (MPa).
- Cambio de volumen unitario (ϵ).
- Energía de deformación por unidad de volumen en el punto P . $\left(\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}\right)$

Datos: $E = 200 \text{ MPa}$, $\nu = 0,25$; $A=80$; $B=-20$; $C=-60$; $D=0$; $F=40$; $G=0$

6. En la pieza de la figura se han medido las fuerzas actuantes P y T , alineadas con el eje x y el eje y , respectivamente. Tanto P como T están aplicadas sobre una cara lateral de la pieza, cada una con un área A .



Se pide:

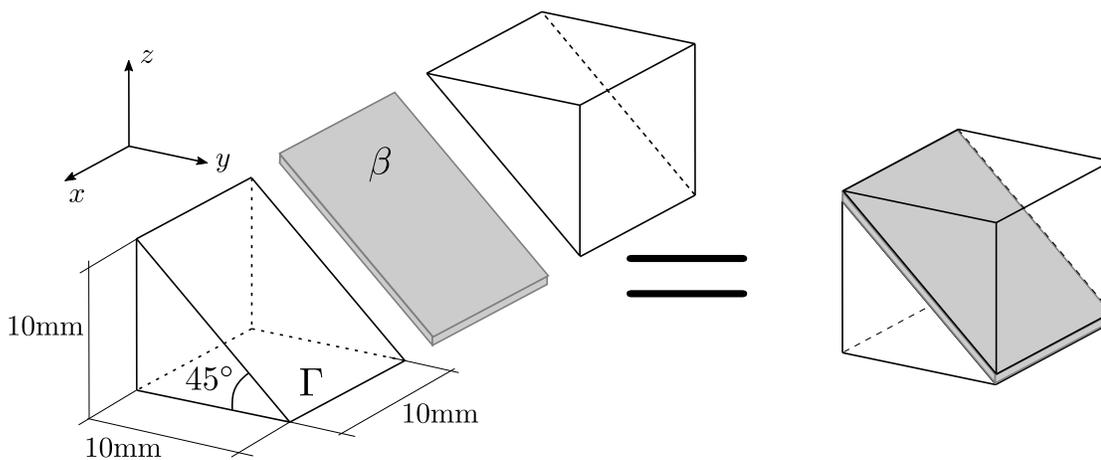
- ¿Es tensión plana o deformación plana?
- Componentes σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} , en MPa, del tensor de tensión en el sistema de coordenadas de la figura del enunciado.
- Traza del tensor de tensiones y tensión hidrostática, en MPa.
- Tensión de Von Mises σ_{VM}
- Si se considera el valor de P desconocido, ¿cuál sería el ángulo que forma el cortante máximo con los ejes x - y , en función de P ? Elegir el ángulo y el módulo, en ese orden.

- f) Valor de la deformación ε_{zz} y la tensión σ_{zz} , en la dirección z , con los valores de P y F del enunciado.
7. Las dos cuñas de acero que aparecen en la figura se unen perfectamente mediante un adhesivo β por una superficie Γ que forma 45° con el plano x - y .

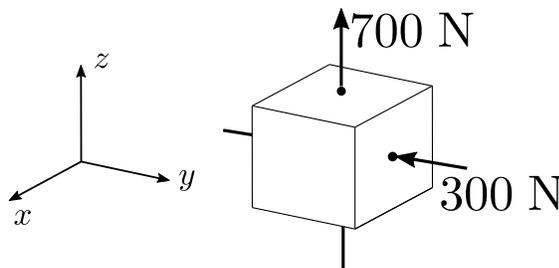
Datos: $\sigma_{adm} = 1,3 \text{ MPa}$, $\tau_{adm} = 10 \text{ MPa}$.

Hipótesis

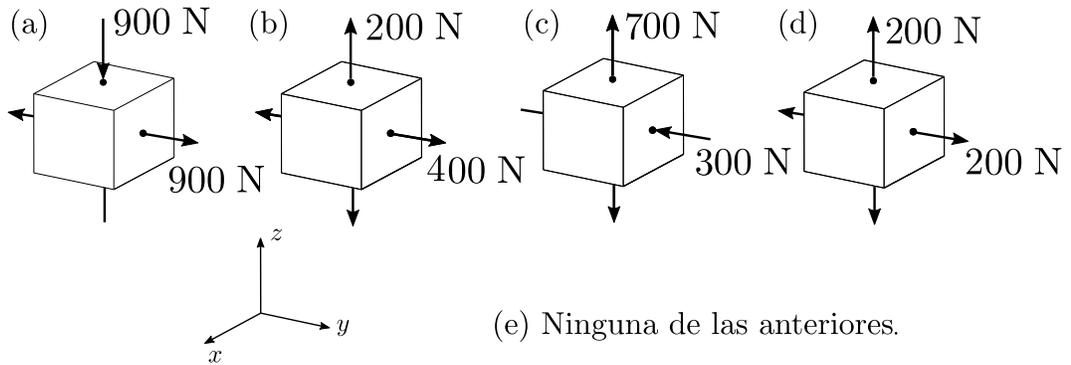
- Fuerzas uniformemente distribuidas sobre las caras del cubo y el adhesivo.
- Grosor del adhesivo despreciable para todos los cálculos.
- Estado tridimensional de tensiones es homogéneo tanto en el cubo como en el adhesivo.
- Considere que las tensiones/esfuerzos admisibles del acero son mucho mayores que las del adhesivo.



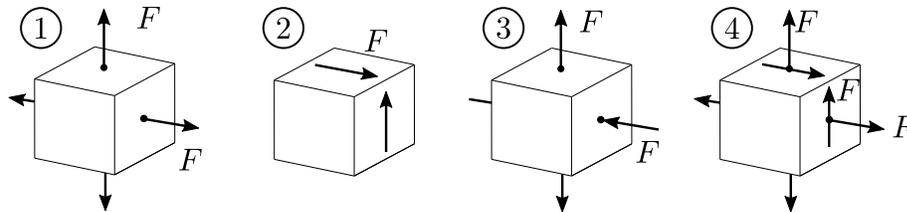
- a) Para las cargas de la figura, determine el valor de la tensión/esfuerzo normal, σ_n , y de la tensión/esfuerzo cortante, τ , en el adhesivo si este no fallase.



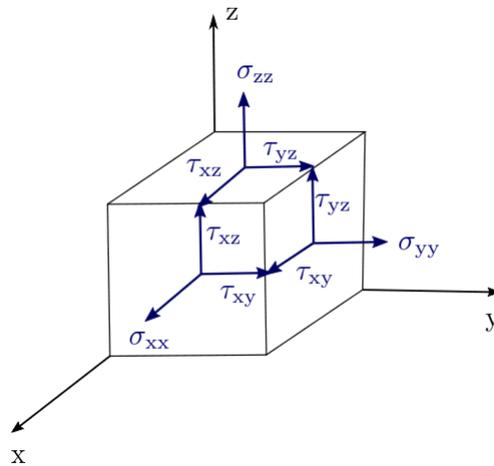
- b) Seleccione la combinación de cargas en la que el adhesivo resiste las tensiones sin fallar. Tenga en cuenta que el adhesivo falla cuando $\sigma_n \geq \sigma_{adm}$ o $\tau \geq \tau_{adm}$



c) Imagine que se va incrementado el valor de la carga F desde 0 N hasta el fallo del adhesivo ($\sigma_n \geq \sigma_{adm}$ o $\tau \geq \tau_{adm}$). Seleccione el orden correcto en el que se produce el fallo.



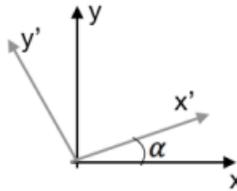
8. El cubo de la figura representa el estado tensional de un sólido elástico, lineal, isótropo, plano y continuo en un punto P.



- a) Seleccionar el tensor de tensiones (MPa).
- b) Determinar el esfuerzo equivalente de Von-Mises (MPa).
- c) Calcular el incremento unitario de volumen $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$ ($\mu\epsilon$).
- d) Densidad de energía elástica de deformación por unidad de volumen $\left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right)$.

Datos: $E = xx$ GPa, $\nu = xx$.

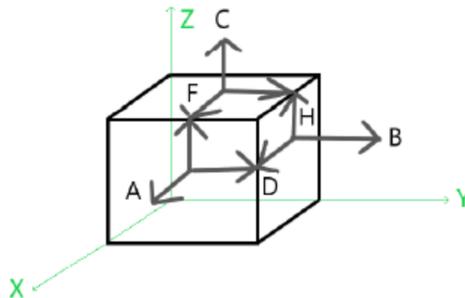
9. Se plantea un estado de tensión plana que está representado por el tensor de tensiones definido en el enunciado para los ejes x-y.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$


- Calcular la tensión de Von Mises.
- Calcular los tensores de tensiones hidrostáticas (volumétrico) y desviadoras.
- Calcular el tensor de tensiones referido a los ejes $x' - y'$.
- Calcular los autovalores del tensor de tensiones dado para los ejes $x' - y'$.

Datos: $\sigma_{11}=40$ MPa; $\sigma_{12}=\sigma_{21}=13$ MPa; $\sigma_{22}=0$ MPa; $\alpha = 30^\circ$

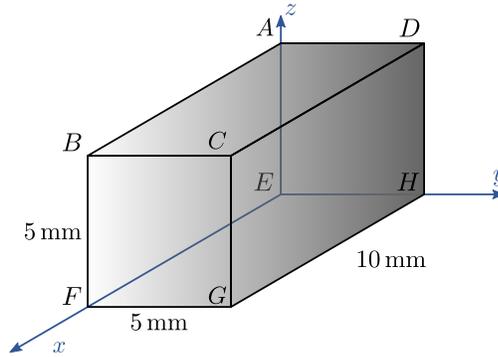
10. El cubo de lado L indicado en la figura (caras vistas) está sometido al estado de esfuerzos (MPa) representado,



- Vector de esfuerzos asociado a la dirección (1,1,0) (MPa).
- Esfuerzo normal octaédrico (MPa).
- Esfuerzo cortante octaédrico (MPa).
- Esfuerzo equivalente de Von Mises (MPa).
- Dirección principal asociada al esfuerzo principal (normal) máximo asociado al estado de esfuerzos.
- Densidad de energía de deformación $\left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right)$.

Datos: $E=210$ GPa; $\nu=0.33$; $A=100$ MPa; $B=75$ MPa; $C=50$ MPa; $D=25$ MPa; $F=H=0$ MPa.

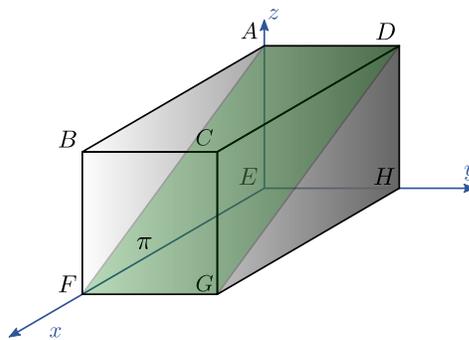
11. Sea el sólido representado en la figura, de material lineal elástico e isótropo, con límite elástico S_y , sometido a un estado tensional **hidrostático**, de tal modo que la traza del tensor de tensiones es $\text{tr}(\sigma) = 3\sigma_0$. Asumir el tensor de tensiones homogéneo en todo el sólido.



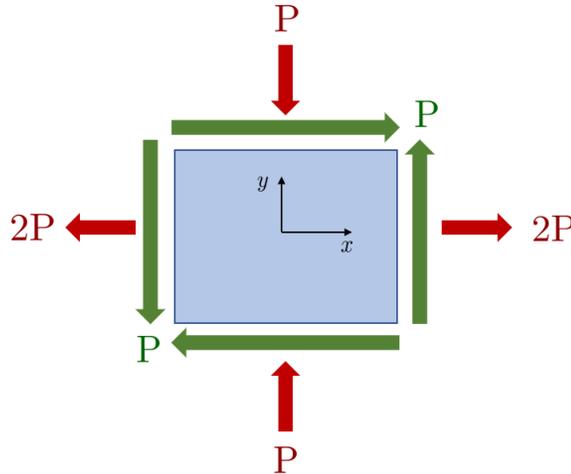
Datos: σ_0, S_y

Se pide:

- Factor de reserva según el criterio de Von Mises, RF_{VM} .
- Factor de reserva según el criterio de Tresca, RF_{Tresca} .
El plano π está formado por los vértices $A - F - G - D$ (ver figura)



- Valor de la tensión normal al plano π (componente normal del vector tracción asociado al plano π) (MPa).
12. El sólido elástico, lineal, isótropo y plano representado en la figura es un estado de tensión plana generalizada. Dicho sólido está sometido a una presión $P=200$ (MPa) en el plano $x - y$.



- a) Seleccionar los tensores de tensiones (MPa) tanto en el plano $x - y$ como tridimensional.
- b) Seleccionar para el caso tridimensional el tensor de tensiones descompuesto en su parte volumétrica (σ^V) y en su parte desviadora (σ^D).
- c) Determinar el módulo de elasticidad (E) que provoca el cambio de volumen dado $\left(\frac{\Delta V}{V} = 0,5(\varepsilon)\right)$. (Dato: $\nu = 0,3$)
- d) Determinar el coeficiente de Poisson (ν) para obtener la densidad de energía de deformación por unidad de volumen dada $\left(U = 0,85\left(\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}\right)\right)$ (Dato: $E=200$ (GPa))

13. a) El estado de esfuerzos en un punto viene dado por el siguiente tensor:

$$\begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 60 \\ 0 & 60 & 80 \end{bmatrix}$$

Determinar el esfuerzo normal mínimo (tensión principal mínima) asociado al estado de esfuerzos. (MPa)

b) El estado de esfuerzos en un punto viene dado por el siguiente tensor,

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 30 \\ 0 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

Calcular el esfuerzo de Von-Mises (MPa).

c) El estado de esfuerzos en un punto viene dado por el siguiente tensor: ($E=210$ MPa; $\nu=0.33$)

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 20 & 30 & 10 \\ -30 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

Determinar el incremento de volumen unitario.

d) Un cubo L está sometido al estado de tensiones (MPa) dado. ($E= 200 \text{ GPa}$; $\nu=0.33$)

$$\begin{bmatrix} 0 & -20 & 40 \\ -20 & 0 & 60 \\ 40 & 60 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular la energía de deformación por unidad de volumen (kJ/m^3).

4.2. Solución de ejercicios de Tensor de Tensiones

1. Partiendo de un tensor de tensiones σ , que queremos girar un ángulo θ en el eje z , deducir una formulación general para poder caracterizar cualquier componente del tensor de tensiones en función de las tensiones principales en el plano de giro y el ángulo girado.

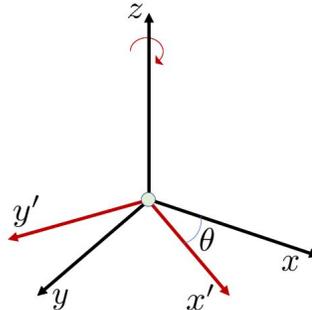
Asumir para ello que las direcciones principales del tensor de tensiones coinciden con los ejes x,y,z del sistema de referencia \mathbf{X} antes del giro θ .

Solución

Según el enunciado, el tensor de tensiones σ inicial que tenemos antes de girarlo será:

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Donde $\sigma_{xx} = \sigma_1$, $\sigma_{yy} = \sigma_2$ y $\sigma_{zz} = \sigma_3$ son a las tensiones principales del tensor σ . Ahora se aplica un giro según el eje z para pasar del sistema de referencia \mathbf{X} al \mathbf{X}' , esto es:



Ahora vamos a calcular las componentes del tensor de tensiones girado, para lo cual vamos a usar notación indicial, ya que sabemos que al ser el giro en el eje z , las componentes σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} , σ_{31} y σ_{32} van a ser iguales en los sistemas \mathbf{X} al \mathbf{X}' . Esto es porque el eje z del sistema \mathbf{X} va a ser ortogonal a los ejes x' e y' del sistema \mathbf{X}' , y por lo tanto los α asociados al giro lo serán. Para el cálculo de las componentes del tensor $[\sigma]_{\mathbf{X}'}$, usamos:

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{im}\alpha_{jm}\sigma_{mn} \quad (4.2)$$

Como hemos mencionado, cualquier α relacionado con el eje z va a ser nulo, salvo los que operen α_{33} , en cuyo caso serán distintos de cero, pero la tensión en origen sí lo será, por lo que permanece igual en los dos sistemas, como hemos mencionado. Por esta razón, para aplicar el círculo de Mohr todas las componentes del eje que se gira deben de ser nulas salvo la que está en la diagonal.

Para el resto, iremos componente a componente. Así para el término σ'_{11} tendremos:

$$\sigma'_{11} = \alpha_{11}\alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{12}\alpha_{12}\sigma_{22} = \cos^2(\theta)\sigma_{11} + \sin^2(\theta)\sigma_{22} \quad (4.3)$$

Como en el sistema original sólo tenemos valores no nulos en la diagonal, podemos reducir el sumatorio de esta forma. De nuevo, todos los términos compartidos con el eje z van a ser nulos al ser ortogonales los ejes z y x', y' .

En este punto vamos a recordar las propiedades del ángulo doble:

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad (4.4)$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad (4.5)$$

$$\cos(\theta)\sin(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2} \quad (4.6)$$

Con ello, considerando que σ_{11} y σ_{22} son las tensiones principales, y operando, la expresión 4.3 quedará:

$$\sigma'_{11} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\cos(2\theta) \quad (4.7)$$

Y haciendo la misma deducción para σ'_{22} , tendremos:

$$\sigma'_{22} = \alpha_{21}\alpha_{21}\sigma_{11} + \alpha_{22}\alpha_{22}\sigma_{22} = \sin^2(\theta)\sigma_{11} + \cos^2(\theta)\sigma_{22} \quad (4.8)$$

Lo que aplicando las condiciones del ángulo doble es igual a:

$$\sigma'_{22} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\cos(2\theta) \quad (4.9)$$

Para el término 12 será:

$$\sigma'_{12} = \alpha_{11}\alpha_{21}\sigma_{11} + \alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_{22} = -\sin(\theta)\cos(\theta)\sigma_{11} + \cos(\theta)\sin(\theta)\sigma_{22} \quad (4.10)$$

Que operando con las condiciones del ángulo doble es:

$$\sigma'_{12} = -\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\sin(2\theta) \quad (4.11)$$

Y finalmente si hacemos lo mismo para la componente 21, tendremos:

$$\sigma'_{21} = \alpha_{21}\alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{22}\alpha_{12}\sigma_{22} = -\cos(\theta)\sin(\theta)\sigma_{11} + \sin(\theta)\cos(\theta)\sigma_{22} \quad (4.12)$$

Operando queda:

$$\sigma'_{21} = -\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\sin(2\theta) \quad (4.13)$$

Que es igual a σ'_{12} , lo que se podría deducir por simetría.

Ahora, podemos observar que las expresiones calculadas tienen similitudes con un círculo cuyas coordenadas polares son función de 2θ y un polo que llamaremos C y un radio que denotaremos por R . Esto es:

$$C = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \quad (4.14)$$

$$R = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) \quad (4.15)$$

Que son el centro y el radio del círculo de Mohr, lo que es otra demostración de por qué se opera con el ángulo doble en dicho círculo. Para ello, si dibujamos en este círculo dos puntos $P_1 = (\sigma'_{11}, -\sigma'_{12})$ y $P_2 = (\sigma'_{22}, \sigma'_{21})$, estos puntos formarán un diámetro del círculo que forma un ángulo 2θ con la horizontal, que era la dirección donde teníamos las tensiones principales.

Este ejercicio también muestra las simplificaciones que tiene que tener el tensor para poder usar la técnica gráfica del círculo de Mohr, estas son:

- Sólo un giro en un solo eje.
- Todas las componentes del tensor asociadas a ese eje deben ser nulas salvo la de la diagonal, que puede también serlo. Estos se dan en los casos de tensión plana y deformación plana, pero no son los únicos casos que cumplen esta condición.

No es necesario que se parta de las direcciones principales en el plano girado, pero en este caso lo hemos hecho así por simplicidad. Es sencillo hacerlo para una configuración cualquiera y calcular las tensiones principales haciendo nulos los cortantes en el sistema girado. Por ejemplo, vamos a partir del siguiente tensor:

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Y vamos a calcular el ángulo que tenemos que girar el eje z (3) para que la tensión σ'_{12} sea nula en el nuevo sistema de referencia:

$$\sigma'_{12} = \alpha_{11}\alpha_{21}\sigma_{11} + \alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}\sigma_{21} + \alpha_{11}\alpha_{22}\sigma_{12} \quad (4.17)$$

Si aplicamos simetría a esta expresión ($\sigma'_{12} = \sigma'_{21}$), igualamos a 0 y simplificamos, tendremos:

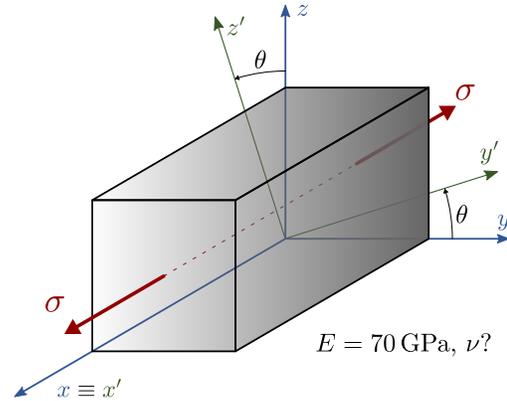
$$\tan(2\theta) = -\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{22} - \sigma_{11}} \right) \quad (4.18)$$

Se define como material incompresible aquel que no sufre cambios de volumen ante cualquier sollicitación de carga. Considérese el sólido representado en la figura sometido a un caso de carga uniaxial:

2.

$$\sigma_{xx} = \sigma, \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Para un material incompresible, isotrópico, elástico y lineal, se desea:



- Hallar el tensor de tensiones, expresándolo en el sistema de referencia de ejes principales, $[\sigma]_{\mathbf{X}_{ppal}}$
- Hallar el tensor de deformaciones infinitesimales, expresándolo en el sistema de referencia de ejes principales, $[\varepsilon]_{\mathbf{X}_{ppal}}$
- Hallar la componente volumétrica del tensor de deformaciones infinitesimales en el sistema de referencia \mathbf{X}' ($\{x', y', z'\}$ en la figura), $[\varepsilon^V]_{\mathbf{X}'}$
- Calcular el valor que debe adquirir el coeficiente de Poisson ν para que se cumpla la condición de incompresibilidad

Datos: $\sigma = 7 \text{ MPa}$, $E = 70 \text{ GPa}$, $\theta = \pi/6 \text{ rad}$

Solución

- El tensor de tensiones expresado en el sistema representado en la figura es

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

Como el material es isotrópico y hay una única dirección de carga, se puede asegurar que dicha dirección es dirección principal. Además, cualquier dirección ortogonal a la dirección de carga es también dirección principal (estado de tensiones axilimétrico). Por tanto,

$$[\sigma]_{\mathbf{X}_{ppal}} = [\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}_{ppal}} \text{ MPa}$$

- Aplicando la Ley de Hooke generalizada, se obtiene

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}_{ppal}} = \frac{\sigma}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}_{ppal}} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}_{ppal}} \mu\varepsilon$$

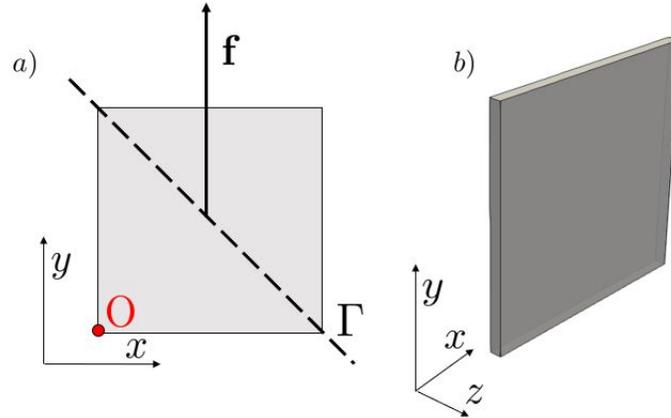
- Como es un material incompresible, no hay variación con el volumen i.e. $\text{tr}(\varepsilon) = 0$. Además, la parte esférica de un tensor no depende del sistema de referencia. Por tanto,

$$[\varepsilon^V]_{\mathbf{X}'} = \mathbf{0}$$

- d) Aunque la condición de incompresibilidad se cumple para cualquier sollicitación (propiedad del material), nos apoyaremos en la Ley de Hooke generalizada aplicada a este problema para hallar el valor del coeficiente de Poisson ν :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma}{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0 \text{ (Condición de incompresibilidad)} \\ (1 - 2\nu) \frac{\sigma}{E} = 0; \quad \boxed{\nu = 0,5} \end{array} \right.$$

3. La figura muestra un elemento de dimensiones $100 \times 100 \times 5 \text{ mm}$. Sabemos que si realizamos un corte según el plano Γ la fuerza resultante \mathbf{f} es vertical, aunque desconocemos su valor. Γ está definido por su vector ortogonal $\mathbf{n} = (\cos(\pi/4), \sin(\pi/4), 0)$. Todos los vectores están referenciados al sistema \mathbf{X} que se muestra en la figura. El corte de Γ con el elemento genera un área $A_\Gamma = A/\sqrt{0,5}$, donde A es el área seccional del elemento ($100 \times 5 \text{ mm}^2$). El elemento estudiado es elástico lineal.



Se pide:

- Calcular en función de $\mathbf{f} = (0, f_2, 0)^T$ el tensor de tensiones, sabiendo que en el tensor de deformación en \mathbf{X} cumple que $\varepsilon_{11} = -\nu\varepsilon_{22}$.
- Después del estado anterior se aplica una presión hidrostática, y sabemos que, con las nuevas condiciones, en el corte del tensor de tensiones con el plano Γ la fuerza sigue siendo vertical, que las direcciones principales están rotadas un ángulo de $22,5^\circ$ en z , con respecto al sistema de referencia del enunciado \mathbf{X} , y que la deformación ε_{11} en el sistema \mathbf{X} es nula. Calcular el coeficiente de Poisson del material.
- Justificar la existencia o no de estados planos de tensiones o deformaciones en los casos de los puntos anteriores 1 y 2.

Solución

Lo primero que nos dice el enunciado es que el corte Γ genera una fuerza totalmente alineada con $[\mathbf{e}_2]_{\mathbf{X}}$. Por ello, la proyección del tensor de tensiones sobre el vector ortogonal a Γ debe de dar un vector paralelo a $[\mathbf{e}_2]_{\mathbf{X}}$:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{n}]_{\mathbf{X}} = \zeta [\mathbf{e}_2]_{\mathbf{X}} \quad (4.19)$$

El vector resultante de la proyección será ζ veces el vector $[\mathbf{e}_2]_{\mathbf{X}}$, que es la condición de vectores paralelos usada también para el cálculo de los autovectores y autovalores. Con ello:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{n}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4)\sigma_{11} + \sin(\pi/4)\sigma_{12} \\ \cos(\pi/4)\sigma_{12} + \sin(\pi/4)\sigma_{22} \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \zeta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (4.20)$$

De donde salen 2 ecuaciones y 3 incógnitas, y considerando que $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{0,5}$:

$$\cos(\pi/4)\sigma_{11} + \sin(\pi/4)\sigma_{12} = 0 \rightarrow \sigma_{11} = -\sigma_{12} \quad (4.21)$$

$$\cos(\pi/4)\sigma_{12} + \sin(\pi/4)\sigma_{22} = \zeta \rightarrow \sigma_{22} = \frac{\zeta}{\sqrt{0,5}} - \sigma_{12} \quad (4.22)$$

Con lo que queda:

$$\sigma_{11} = -\sigma_{12} = -\frac{\zeta}{\sqrt{0,5}} + \sigma_{22} \quad (4.23)$$

La geometría del sólido determina que podemos asumir tensión plana, lo que implica que $\sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$, siempre en el sistema de referencia \mathbf{X} .

Con ello, el tensor de tensiones queda como:

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & -\sigma_{11} & 0 \\ -\sigma_{11} & \sigma_{11} + \zeta/\sqrt{0,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (4.24)$$

Para cualquier valor de σ_{11} la fuerza será vertical en el corte de Γ .

Con las dos incógnitas σ_{11} y ζ , que será $\zeta = f_2/A_\Gamma$, y como la relación entre A_Γ y el área transversal A es $A_\Gamma = A/\sqrt{0,5}$. Con ello $\zeta = \sqrt{0,5} f_2/A$ siendo A el área de corte con el plano ortogonal al eje y .

Las dos galgas extensométricas nos dice el enunciado que están relacionadas por $\varepsilon_{11} = -\nu\varepsilon_{22}$, las calculamos mediante la expresión:

$$\varepsilon_{22} = \frac{-\nu}{E} \text{tr}(\sigma) + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} = \frac{f_2}{AE} + \frac{\sigma_{11}}{E} (1-\nu) \quad (4.25)$$

Donde $\text{tr}(\sigma) = 2\sigma_{11} + f_2/A$ y $\sigma_{22} = \sigma_{11} + f_2/A$.

$$\varepsilon_{11} = \frac{-\nu}{E} \text{tr}(\sigma) + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \frac{f_2}{AE} + \frac{\sigma_{11}}{E} (1-\nu) \quad (4.26)$$

Si aplicamos la condición $\varepsilon_{11} = -\nu\varepsilon_{22}$:

$$-\nu \left(\frac{f_2}{AE} + \frac{\sigma_{11}}{E} (1-\nu) \right) = -\nu \frac{f_2}{AE} + \frac{\sigma_{11}}{E} (1-\nu) \quad (4.27)$$

Operando:

$$-\nu \frac{\sigma_{11}}{E} (1-\nu) = \frac{\sigma_{11}}{E} (1-\nu) \rightarrow \sigma_{11} = 0 \quad (4.28)$$

Por lo que el tensor de tensiones queda:

$$\Rightarrow [\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2/A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (4.29)$$

Por lo que:

$$\varepsilon_{22} = \frac{f_2}{AE} \quad (4.30)$$

$$\varepsilon_{11} = -\nu \frac{f_2}{AE} \quad (4.31)$$

Para el cálculo de la presión p necesaria para que ε_{11} sea nulo, podemos calcular esa componente de la deformación como:

$$\varepsilon_{11} = \frac{-\nu}{E} \text{tr}(\sigma) + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} = \frac{-\nu}{E} (3p + f_2/A) + \frac{1+\nu}{E} p \quad (4.32)$$

$$\frac{-\nu}{E} (3p + f_2/A) + \frac{1+\nu}{E} p = 0 = \frac{p}{E} (1 - 2\nu) - \frac{\nu f_2}{AE} \quad (4.33)$$

$$p = \frac{\nu f_2}{A(1 - 2\nu)} \quad (4.34)$$

Y el tensor de tensiones, para que el corte con el plano Γ sea vertical será:

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} p & -p & 0 \\ -p & p + f_2/A & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (4.35)$$

Como el eje z ya es dirección principal, podemos calcular mediante el círculo de Mohr las direcciones principales en $x - y$. Las características del círculo de Mohr son:

$$\text{Centro} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \frac{p + p + f_2/A}{2} \quad (4.36)$$

$$\text{Radio} = 0,5 \sqrt{f_2^2/A^2 + 4p^2} \quad (4.37)$$

Por otro lado, en el enunciado nos dicen que la dirección principal asociada al autovalor máximo está a 22.5° de los ejes actuales. Recordamos que en el círculo de Mohr operamos con ángulos dobles:

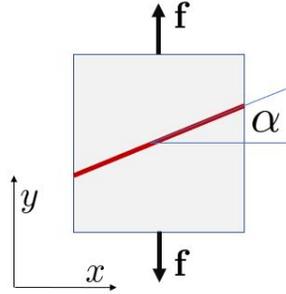
$$\tan(2\alpha) = \frac{2p}{f_2/A} = \tan(45) = 1 \rightarrow p = \frac{f_2}{2A} \quad (4.38)$$

Y de aquí, podemos calcular el coeficiente de Poisson:

$$p = \frac{f_2}{2A} = \frac{\nu f_2}{A(1-2\nu)} \rightarrow (1-2\nu) = 2\nu \Rightarrow \nu = 0,25 \quad (4.39)$$

⇒ Para los cálculos del primer punto sí podemos considerar tensión plana, pero para el segundo punto no, al existir la presión en z.

4. El sólido de la figura posee una unión mediante un ligante que forma un ángulo α con la horizontal. Esta unión no genera una discontinuidad ni en las deformaciones ni en las tensiones del sólido, y se puede considerar mecánicamente homogéneo. No así a nivel resistente, donde sabemos que el ligante tiene unas propiedades resistentes de τ_L y σ_L según los criterios de Tresca y Rankine.



Se pide:

- a) Determinar el ángulo α , hacerlo mediante el círculo de Mohr y la rotación del tensor.

Solución

Lo primero es calcular el tensor de tensiones en el elemento, en el sistema \mathbf{X} , este es:

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2/A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (4.40)$$

Comenzaremos calculando el ángulo mediante el giro del tensor, sabemos que tensorialmente el giro entre el sistema de referencia \mathbf{X} y el sistema rotado un ángulo α , \mathbf{X}' , es de la forma:

$$\sigma'_{ij} = R_{ik}R_{jl}\sigma_{kl} \quad (4.41)$$

Donde:

$$R_{ik} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k \quad (4.42)$$

Siendo \mathbf{e}_k la base de \mathbf{X} y \mathbf{e}'_i la base de \mathbf{X}' . Con esto tenemos que $R_{12} = \sin(\alpha)$ y $R_{22} = \cos(\alpha)$. En el sistema rotado τ_L y σ_L serán σ'_{12} y σ'_{22} , respectivamente. De este modo, y dado que el único elemento no nulo del tensor de tensiones es σ_{22} :

$$\sigma'_{12} = R_{12}R_{22}\sigma_{22} = \sin(\alpha)\cos(\alpha)f_2/A = \tau_L \quad (4.43)$$

$$\sigma'_{22} = R_{22}R_{22}\sigma_{22} = \cos^2(\alpha)f_2/A = \sigma_L \quad (4.44)$$

Podemos despejar α de la forma:

$$\frac{\tau_L}{\sigma_L} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)f_2/A}{\cos^2(\alpha)f_2/A} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \quad (4.45)$$

Esta metodología se puede usar en cualquier caso, con independencia del tensor de tensiones que tenga nuestro problema. Pero para casos particulares como este podemos simplificar el problema como bidimensional y usar el círculo de Mohr. Para este caso, según el círculo de Mohr:

$$\text{Centro} = \frac{f_2}{2A} = \text{Radio} \quad (4.46)$$

Y podremos poner la rotación para calcular τ_L y σ_L , según trigonometría en el círculo de Mohr, de la forma:

$$\tau_L = \frac{f_2}{2A} \sin(2\alpha) \quad (4.47)$$

$$\sigma_L = \frac{f_2}{2A} + \frac{f_2}{2A} \cos(2\alpha) \quad (4.48)$$

Despejamos f_2/A :

$$\frac{f_2}{A} = \frac{2\tau_L}{\sin(2\alpha)} \quad (4.49)$$

Y por lo tanto:

$$\sigma_L = \frac{\tau_L}{\sin(2\alpha)} + \frac{\tau_L}{\sin(2\alpha)} \cos(2\alpha) \quad (4.50)$$

De esta expresión el ratio τ_L/σ_L quedaría:

$$\sigma_L \sin(2\alpha) = \tau_L(1 + \cos(2\alpha)) \rightarrow \frac{\tau_L}{\sigma_L} = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \quad (4.51)$$

Y usando las relaciones del ángulo doble:

$$\frac{\tau_L}{\sigma_L} = \frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{1 + \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)} = \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2\cos^2(\alpha)} \quad (4.52)$$

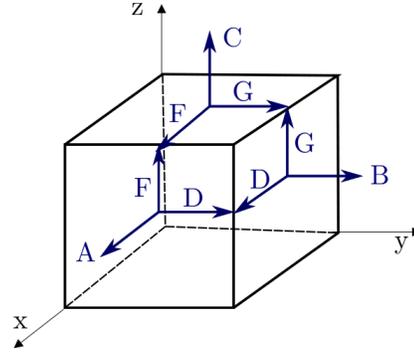
$$\frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2\cos^2(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \quad (4.53)$$

Y el resultado final es:

$$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\tau_L}{\sigma_L} \quad (4.54)$$

Que es el mismo obtenido mediante el giro del tensor.

5. El cubo de la figura de lado L está representando el estado tensional (MPa) de un punto P.



- Tensión principal máxima (MPa).
- Tensión equivalente de Von-Mises (MPa).
- Cambio de volumen unitario (ϵ).
- Energía de deformación por unidad de volumen en el punto P. $\left(\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}\right)$

Datos: $E = 200 \text{ MPa}$, $\nu = 0,25$; $A=80$; $B=-20$; $C=-60$; $D=0$; $F=40$; $G=0$ **Solución**

- a) **Tensión principal máxima (MPa).**

Las tensiones principales son los autovalores asociados al tensor de tensiones.

$$\begin{vmatrix} 80 - \sigma & 0 & 40 \\ 0 & -20 - \sigma & 0 \\ 40 & 0 & -60 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Siendo las tensiones principales en el punto dado:

$$\sigma_1 = 90,62 \text{ (MPa)} > \sigma_2 = -20 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = -70,62 \text{ (MPa)}$$

La tensión principal máxima es la mayor de las tres tensiones principales:

$$\boxed{\sigma_1 = 90,62 \text{ (MPa)}}$$

- b) **Tensión equivalente de Von-Mises (MPa).**

La tensión equivalente de Von-Mises se calcula utilizando la fórmula:

$$\sigma_{V-M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

Sustituyendo las tensiones principales en el punto:

$$\sigma_{V-M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(110,62)^2 + (161,24)^2 + (50,62)^2}$$

$$\boxed{\sigma_{V-M} = 142,83 \text{ (MPa)}}$$

c) **Cambio de volumen unitario (ε).**

El cambio de volumen unitario es la traza del tensor de deformación.

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Para calcular el tensor de deformación se utilizará la Ley de Hooke generalizada en ejes cualesquiera:

Componentes normales:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

Componentes tangenciales:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xz}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz}$$

En este caso, la traza del tensor de tensiones es nula. Así que, el tensor de deformación será:

$$[\varepsilon]_{\mathbf{x}} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 80 & 0 & 40 \\ 0 & -20 & 0 \\ 40 & 0 & -60 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}} (\varepsilon)$$

Siendo el cambio de volumen unitario:

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0 (\varepsilon)}$$

d) **Energía de deformación en el punto P. $\left(\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}\right)$**

La densidad de energía de deformación expresada en los ejes principales será:

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)$$

Las deformaciones principales se obtendrán con la ley de Hooke generalizada en ejes principales:

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0,566375 (\varepsilon)$$

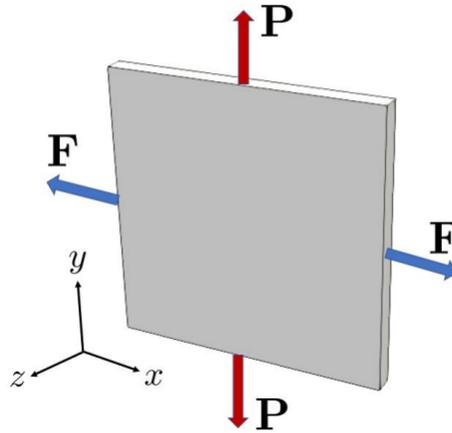
$$\varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -0,125 (\varepsilon)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -0,441375 (\varepsilon)$$

$$U = \frac{1}{2}(90,62 \cdot 0,566375 - 20 \cdot (-0,125) - 70,62 \cdot (-0,441375)) \text{ (MPa)(}\varepsilon\text{)}$$

$$U = 42,50 \left(\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3} \right)$$

6. En la pieza de la figura se han medido las fuerzas actuantes \mathbf{P} y \mathbf{T} , alineadas con el eje x y el eje y , respectivamente. Tanto \mathbf{P} como \mathbf{T} están aplicadas sobre una cara lateral de la pieza, cada una con un área A .



Se pide:

- ¿Es tensión plana o deformación plana?
- Componentes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$, en MPa, del tensor de tensión en el sistema de coordenadas de la figura del enunciado.
- Traza del tensor de tensiones y tensión hidrostática, en MPa.
- Tensión de Von Mises σ_{VM}
- Si se considera el valor de \mathbf{P} desconocido, ¿cuál sería el ángulo que forma el cortante máximo con los ejes x - y , en función de \mathbf{P} ? Elegir el ángulo y el módulo, en ese orden.
- Valor de la deformación ε_{zz} y la tensión σ_{zz} , en la dirección z , con los valores de \mathbf{P} y \mathbf{F} del enunciado.

Solución

Apartado a:

Es tensión plana por la geometría y las cargas.

Apartado b:

Como las cargas externas están alineadas con los ejes x e y , no existe tensión cortante, y las tensiones serán:

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A} \quad (4.55)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{P}{A} \quad (4.56)$$

y como es tensión plana,

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (4.57)$$

Apartado c:

La traza del tensor de tensiones es:

$$tr(\sigma) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \frac{F}{A} + \frac{P}{A} \quad (4.58)$$

y la tensión hidrostática será,

$$\sigma_H = \frac{tr(\sigma)}{A} \quad (4.59)$$

Apartado d:

Calculamos la tensión de Von Mises simplemente aplicando su ecuación con las tensiones principales,

$$\sigma_{V-M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (4.60)$$

Apartado e:

Dado el sistema de cargas, el cortante máximo siempre va a estar a 45 grados de los ejes principales y su valor será el radio del círculo de Mohr:

$$\tau_{xy\max} = \left| \frac{P/A - F/A}{2} \right| \quad (4.61)$$

Apartado f:

Por la ley de Hooke, la deformación en z se calcula como:

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} \quad (4.62)$$

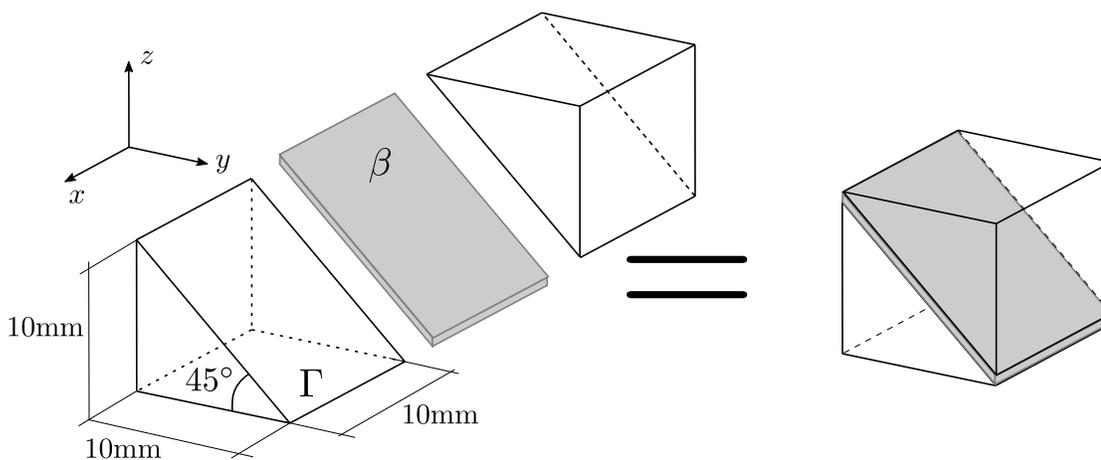
y la tensión zz será nula.

7. Las dos cuñas de acero que aparecen en la figura se unen perfectamente mediante un adhesivo β por una superficie Γ que forma 45° con el plano x-y.

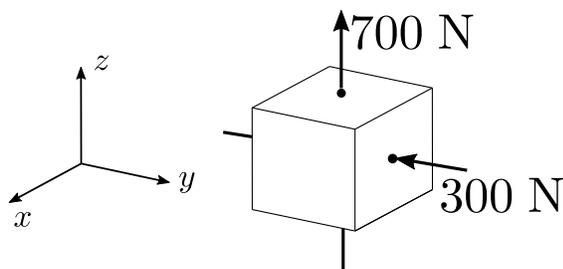
Datos: $\sigma_{adm} = 1,3 \text{ MPa}$, $\tau_{adm} = 10 \text{ MPa}$.

Hipótesis

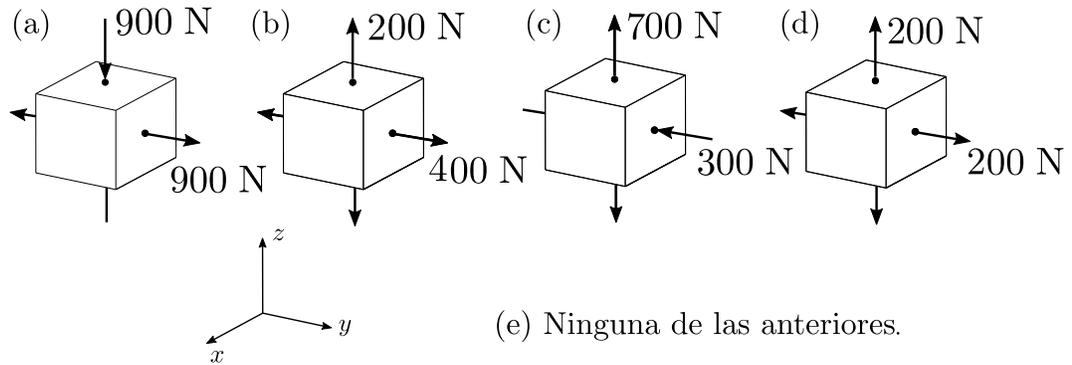
- Fuerzas uniformemente distribuidas sobre las caras del cubo y el adhesivo.
- Grosor del adhesivo despreciable para todos los cálculos.
- Estado tridimensional de tensiones es homogéneo tanto en el cubo como en el adhesivo.
- Considere que las tensiones/esfuerzos admisibles del acero son mucho mayores que las del adhesivo.



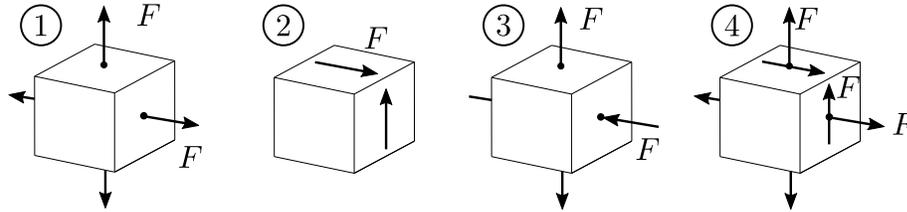
a) Para las cargas de la figura, determine el valor de la tensión/esfuerzo normal, σ_n , y de la tensión/esfuerzo cortante, τ , en el adhesivo si este no fallase.



b) Seleccione la combinación de cargas en la que el adhesivo resiste las tensiones sin fallar. Tenga en cuenta que el adhesivo falla cuando $\sigma_n \geq \sigma_{adm}$ o $\tau \geq \tau_{adm}$

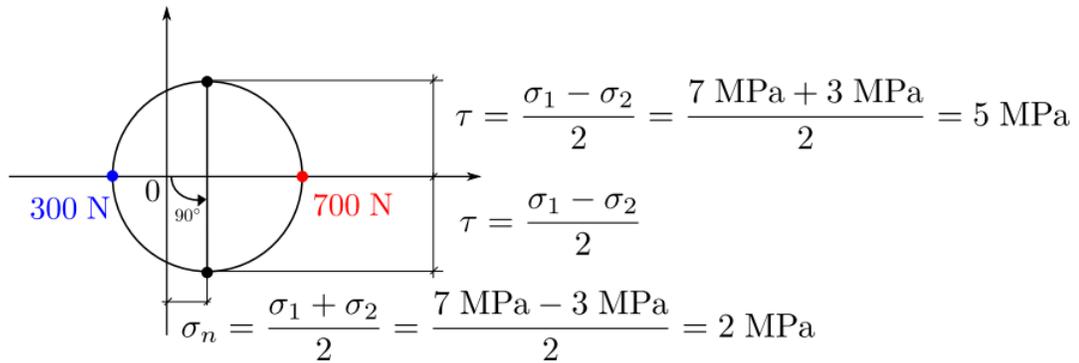


- c) Imagine que se va incrementado el valor de la carga F desde 0 N hasta el fallo del adhesivo ($\sigma_n \geq \sigma_{adm}$ o $\tau \geq \tau_{adm}$). Seleccione el orden correcto en el que se produce el fallo.

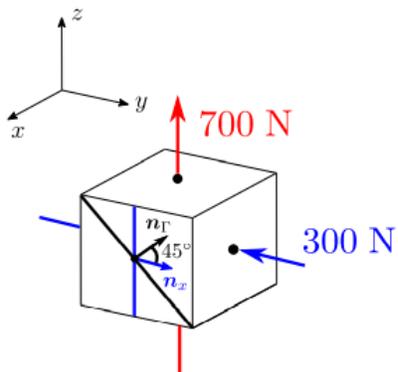


Solución

Apartado a:

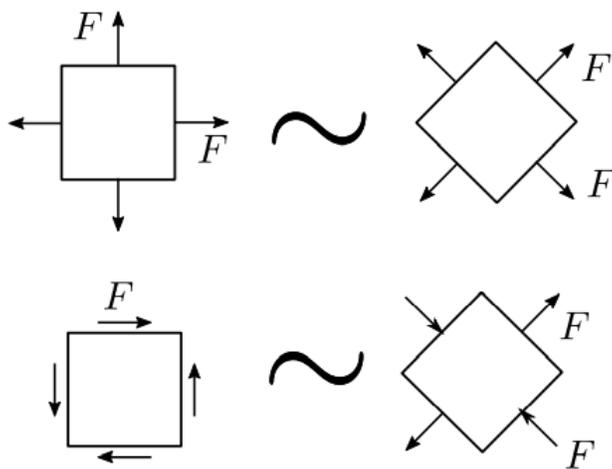


Apartado b:

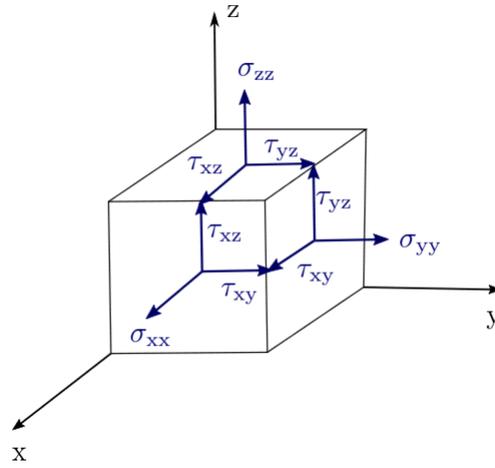


Apartado c:

El orden es: 4, 1 y 2 simultáneamente, 3.



8. El cubo de la figura representa el estado tensional de un sólido elástico, lineal, isótropo, plano y continuo en un punto P.



- Seleccionar el tensor de tensiones (MPa).
- Determinar el esfuerzo equivalente de Von-Mises (MPa).
- Calcular el incremento unitario de volumen $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$ ($\mu\epsilon$).
- Densidad de energía elástica de deformación por unidad de volumen $\left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right)$.

Datos: $E = xx \text{ GPa}$, $\nu = xx$.

Solución

- a) **Seleccionar el tensor de tensiones (MPa).**

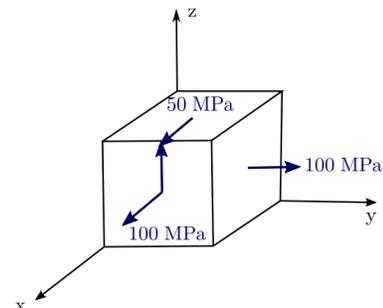
El tensor de tensiones dado es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Especificando para cada una de las versiones será:

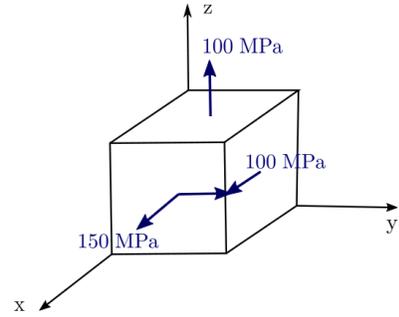
Versión 1:

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



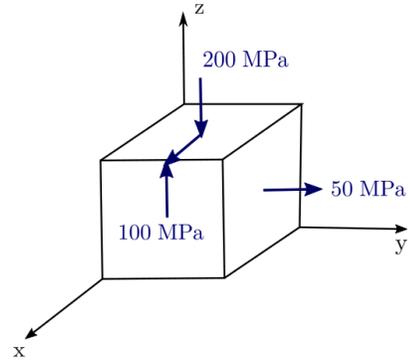
Versión 2:

$$\begin{bmatrix} 150 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$



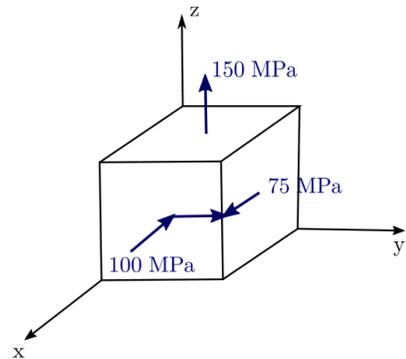
Versión 3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0 & 50 & 0 \\ 100 & 0 & -200 \end{bmatrix}$$



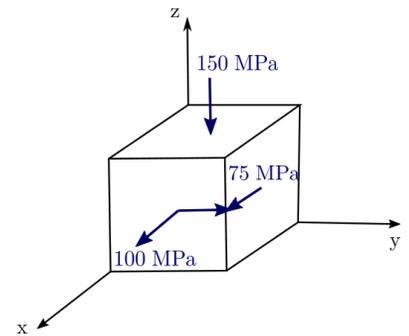
Versión 4:

$$\begin{bmatrix} -100 & 75 & 0 \\ 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix}$$



Versión 5:

$$\begin{bmatrix} 100 & 75 & 0 \\ 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -150 \end{bmatrix}$$



b) **Determinar el esfuerzo equivalente de Von-Mises (MPa).**

El esfuerzo equivalente de Von-Mises se calcula utilizando la fórmula:

$$\sigma_{V-M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

En primer lugar se determinan las tensiones principales en el punto P. Dichas tensiones corresponden con los autovalores en el punto dado.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Siendo las tensiones principales en el punto dado:

$$\sigma_1 = xx_1 \text{ (MPa)} > \sigma_2 = xx_2 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = xx_3 \text{ (MPa)}$$

Sustituyendo las tensiones principales en el punto:

$$\sigma_{V-M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

c) **Calcular el incremento unitario de volumen** $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$ $(\mu\epsilon)$.

La ley de Hooke generalizada en ejes principales será:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \epsilon_2 &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \epsilon_3 &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \end{aligned}$$

Conocidas las tensiones principales para el punto:

$$\sigma_1 = xx_1 \text{ (MPa)} > \sigma_2 = xx_2 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = xx_3 \text{ (MPa)}$$

Las deformaciones principales se obtienen al sustituir en las ecuaciones constitutivas $(\sigma - \epsilon)$ el valor de las tensiones principales. Dichas deformaciones principales son:

$$\epsilon_1 = yy_1 \text{ } (\mu\epsilon) > \epsilon_2 = yy_2 \text{ } (\mu\epsilon) > \epsilon_3 = yy_3 \text{ } (\mu\epsilon)$$

Por tanto, el incremento unitario de volumen será:

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \text{ } (\mu\epsilon)}$$

d) **Densidad de energía elástica de deformación por unidad de volumen** $\left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right)$.

La densidad de energía elástica de deformación por unidad de volumen es un invariante. Por tanto, está es la misma en cualquier sistema de referencia. La forma más fácil de calcular la energía es utilizar los ejes principales en el punto. La fórmula en dichos ejes será:

$$U = \frac{1}{2} (\epsilon_1 \cdot \sigma_1 + \epsilon_2 \cdot \sigma_2 + \epsilon_3 \cdot \sigma_3)$$

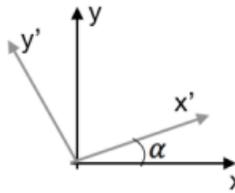
$$\boxed{U = \frac{1}{2} (xx_1 \cdot yy_1 + xx_2 \cdot yy_2 + xx_3 \cdot yy_3) \left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right)}$$

En la tabla se especifican los valores obtenidos para cada versión,

	E	ν	σ_1	σ_2	σ_3	σ_{V-M}	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	$\frac{\Delta V}{V}$	U
V1	70	0.3	120.71	100	-20.71	132.29	1384.61	1000	-1241.75	1142.86	146.12
V2	210	0.33	200	100	-50	217.94	873.81	240.71	-709.52	405	117.15
V3	200	0.25	50	41.42	-241.42	287.23	500	446.38	-1321.38	-375	181.25
V4	100	0.27	150	40.14	-140.14	253.72	1770	374.78	-1914.78	230	274.44
V5	110	0.28	140.14	-40.14	-150	253.72	1758	-339.8	-1618.2	-200	251.37

Cuadro 4.1: Unidades: E (GPa); $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{V-M})$ (MPa); $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \frac{\Delta V}{V})$ ($\mu\epsilon$); U $(\frac{kJ}{m^3})$

9. Se plantea un estado de tensión plana que está representado por el tensor de tensiones definido en el enunciado para los ejes x - y .

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$


- Calcular la tensión de Von Mises.
- Calcular los tensores de tensiones hidrostáticas (volumétrico) y desviadoras.
- Calcular el tensor de tensiones referido a los ejes $x' - y'$.
- Calcular los autovalores del tensor de tensiones dado para los ejes $x' - y'$.

Datos: $\sigma_{11}=40$ MPa; $\sigma_{12}=\sigma_{21}=13$ MPa; $\sigma_{22}=0$ MPa; $\alpha = 30^\circ$

Solución

a) Calcular la tensión de Von Mises.

Se sustituye los datos numéricos correspondientes al tensor de tensiones. Al estar dicho estado referido a un estado de tensión plana el tensor de tensiones será expresado tanto en el plano $x - y$ (enunciado) como en tridimensional.

$$[\sigma]_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 40 & 13 \\ 13 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}} \text{ (MPa)} \quad [\sigma]_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 40 & 13 & 0 \\ 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}} \text{ (MPa)}$$

El cálculo de la tensión de Von Mises implica conocer las tensiones principales asociadas al estado tensional. Dichas tensiones principales coinciden con los autovalores. Para este caso, las tensiones principales (siempre ordenadas de mayor a menor) serán:

$$\sigma_1 = 43,8537 \text{ (MPa)} > \sigma_2 = 0 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = -3,8537 \text{ (MPa)}$$

Sustituyendo en la fórmula de Von Mises,

$$\sigma_{V-M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = 45,90 \text{ (MPa)}$$

b) Calcular los tensores de tensiones hidrostáticas (volumétrico) y desviadoras (Caso tridimensional).

El tensor de tensiones se puede descomponer en la parte volumétrica (esférica o hidrostática) (V) y la parte desviadora (distorsión):

$$[\sigma]_{\mathbf{x}} = [\sigma^V]_{\mathbf{x}} + [\sigma^D]_{\mathbf{x}}$$

El tensor de tensión volumétrico se obtendría:

$$[\sigma^V]_X = \frac{40}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_X \text{ (MPa)}$$

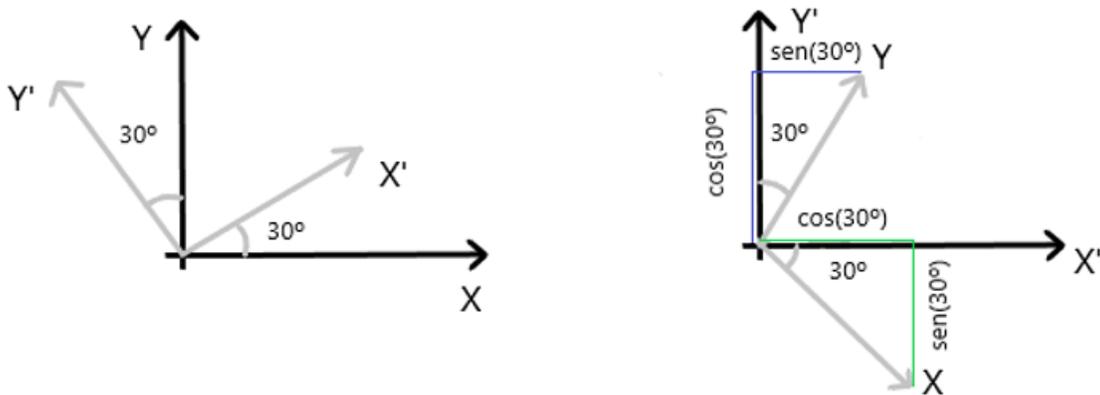
El tensor de tensión desviador se obtendría:

$$[\sigma]_X = \begin{bmatrix} \frac{80}{3} & 13 & 0 \\ 13 & \frac{-40}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-40}{3} \end{bmatrix}_X \text{ (Pa)}$$

Nota: La traza del tensor de tensión desviador debe ser nula.

c) **Calcular el tensor de tensiones referido a los ejes $x' - y'$.**

Se tiene que realizar un cambio de base de los ejes $x - y$ a los ejes $x' - y'$. Para ello, se construye la matriz de transformación (matriz de rotación) utilizando las relaciones geométricas.



Analizando las relaciones geométricas se puede concluir,

$$\begin{cases} x' = x \cos(30^\circ) + y \sin(30^\circ) \\ y' = -x \sin(30^\circ) + y \cos(30^\circ) \end{cases}$$

Expresada dichas relaciones en forma matricial, se puede identificar la matriz de cambio R:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & \sin(30^\circ) \\ -\sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix}$$

Finalmente para obtener el tensor de tensiones referidos a los ejes $x' - y'$ se aplicará la fórmula asociada al cambio de base,

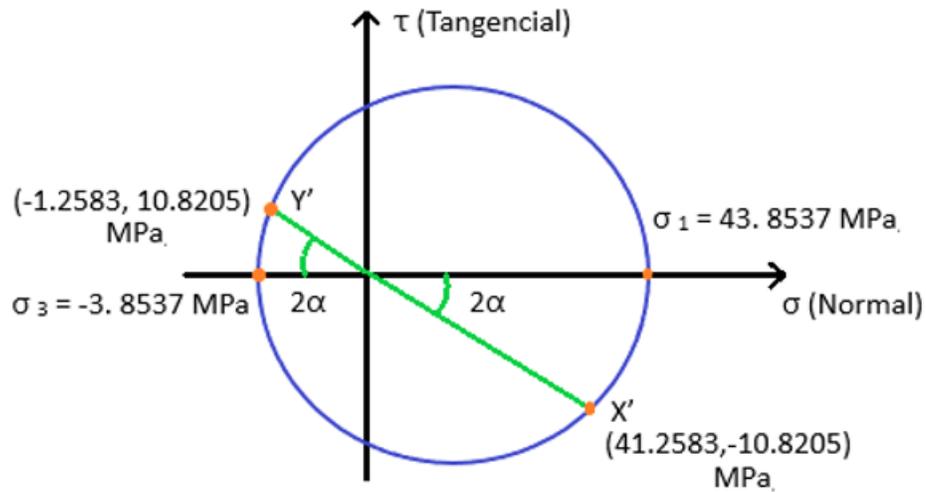
$$[\sigma]_{X'} = R[\sigma]_X R^T = \begin{bmatrix} 41,2583 & -10,8205 \\ 10,8205 & -1,2583 \end{bmatrix}_X \text{ (MPa)}$$

d) **Calcular los autovalores del tensor de tensiones dado para los ejes $x' - y'$.**

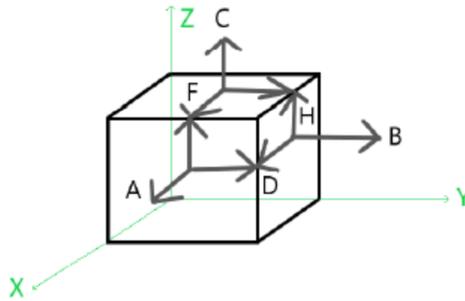
Los autovalores son las tensiones principales asociados a los nuevos ejes $x' - y'$. Cuando el estado tensional se mantiene constante y sólo ha sido sometido a un giro las tensiones principales no cambian. Por tanto, se obtienen las mismas tensiones principales asociadas al plano $x' - y'$,

$$\sigma_1 = 43,8537 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = -3,8537 \text{ (MPa)}$$

La representación de Mohr del estado tensional en los ejes $x' - y'$ quedaría como se muestra en la figura adjunta:



10. El cubo de lado L indicado en la figura (caras vistas) está sometido al estado de esfuerzos (MPa) representado,



- Vector de esfuerzos asociado a la dirección (1,1,0) (MPa).
- Esfuerzo normal octaédrico (MPa).
- Esfuerzo cortante octaédrico (MPa).
- Esfuerzo equivalente de Von Mises (MPa).
- Dirección principal asociada al esfuerzo principal (normal) máximo asociado al estado de esfuerzos.
- Densidad de energía de deformación $\left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right)$.

Datos: $E=210 \text{ GPa}$; $\nu=0.33$; $A=100 \text{ MPa}$; $B=75 \text{ MPa}$; $C=50 \text{ MPa}$; $D=25 \text{ MPa}$; $F=H=0 \text{ MPa}$.

Solución

- a) Vector de esfuerzos asociado a la dirección (1,1,0) (MPa).**

El tensor de tensiones asociado al cubo de la figura es,

$$[\sigma]_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 100 & 25 & 0 \\ 25 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}} \text{ (MPa)}$$

La dirección asociada al vector esfuerzos se tiene que normalizar para que sea una dirección unitaria,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}^{\text{exterior}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \|\bar{\mathbf{n}}\|^{\text{exterior}} &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0} \\ \frac{\bar{\mathbf{n}}^{\text{exterior}}}{\|\bar{\mathbf{n}}\|^{\text{exterior}}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

aplicando el Lema de Cauchy se obtiene el vector esfuerzo (vector tensión),

$$\vec{T} = [\sigma]_{\mathbf{X}} \frac{\vec{n}^{\text{exterior}}}{\|\vec{n}\|^{\text{exterior}}} = \begin{bmatrix} 88,39 \\ 70,71 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}$$

b) Esfuerzo normal octaédrico (MPa).

El esfuerzo normal octaédrico es el primer invariante del tensor de tensiones,

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \frac{100 + 75 + 50}{3} \text{ (MPa)} = 75 \text{ (MPa)}$$

c) Esfuerzo cortante octaédrico (MPa).

Para determinar el esfuerzo cortante octaédrico es necesario calcular las tensiones principales (autovalores) del tensor de tensiones,

$$\begin{vmatrix} 100 - \sigma & 25 & 0 \\ 25 & 75 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 50 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

siendo las tensiones principales,

$$\sigma_1 = 115,45 \text{ (MPa)} > \sigma_2 = 59,55 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = 50 \text{ (MPa)}$$

sustituyendo en la fórmula del esfuerzo cortante octaédrico,

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = 28,87 \text{ (MPa)}$$

d) Esfuerzo equivalente de Von Mises (MPa).

En este apartado, se aplica la fórmula del esfuerzo de Von Mises para determinarlo,

$$\sigma_{\text{V-M}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = 61,24 \text{ (MPa)}$$

e) Dirección principal asociada al esfuerzo principal (normal) máximo asociado al estado de esfuerzos.

La dirección principal buscada es el autovector asociado a la tensión principal máxima, σ_1 ,

$$[\sigma - \sigma_1 \delta_{ij}]_{\mathbf{X}} = \begin{vmatrix} 100 - \sigma_1 & 25 & 0 \\ 25 & 75 - \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 50 - \sigma_1 \end{vmatrix}_{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} n_I^1 \\ n_{II}^1 \\ n_{III}^1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

La dirección obtenida será:

$$\begin{bmatrix} n_I^1 \\ n_{II}^1 \\ n_{III}^1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0,85 \\ 0,53 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

f) **Densidad de energía de deformación** $\left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right)$.

La ley de Hooke generalizada en ejes principales será:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)\end{aligned}$$

Conocidas las tensiones principales para el punto:

$$\sigma_1 = 115,45 \text{ (MPa)} > \sigma_2 = 59,55 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = 50 \text{ (MPa)}$$

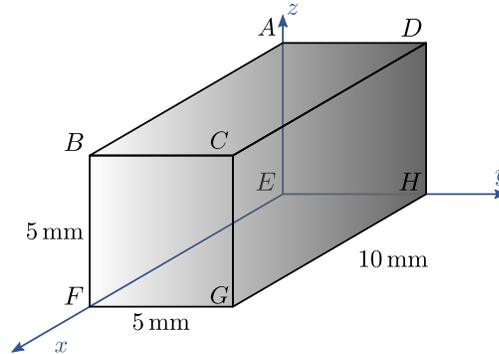
Las deformaciones principales se obtienen al sustituir en las ecuaciones constitutivas ($\sigma - \varepsilon$) el valor de las tensiones principales. Dichas deformaciones principales son:

$$\varepsilon_1 = 377,61 \text{ } (\mu\varepsilon) > \varepsilon_2 = 23,57 \text{ } (\mu\varepsilon) > \varepsilon_3 = -36,90 \text{ } (\mu\varepsilon)$$

La densidad de energía elástica de deformación por unidad de volumen es un invariante. Por tanto, está es la misma en cualquier sistema de referencia. La forma más fácil de calcular la energía es utilizar los ejes principales en el punto. La fórmula en dichos ejes será:

$$U = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2 \cdot \sigma_2 + \varepsilon_3 \cdot \sigma_3) = 21,58 \left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right)$$

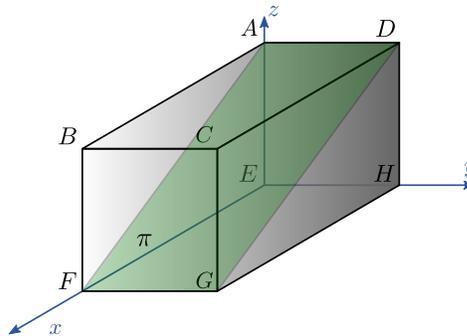
11. Sea el sólido representado en la figura, de material lineal elástico e isótropo, con límite elástico S_y , sometido a un estado tensional **hidrostático**, de tal modo que la traza del tensor de tensiones es $\text{tr}(\sigma) = 3\sigma_0$. Asumir el tensor de tensiones homogéneo en todo el sólido.



Datos: σ_0, S_y

Se pide:

- Factor de reserva según el criterio de Von Mises, RF_{VM} .
- Factor de reserva según el criterio de Tresca, $\text{RF}_{\text{Tresca}}$.
El plano π está formado por los vértices $A - F - G - D$ (ver figura)



- Valor de la tensión normal al plano π (componente normal del vector tracción asociado al plano π) (MPa).

Solución

Apartado 1. Físicamente, el criterio de fallo de Von Mises modeliza el fallo por plastificación. Para plastificar es necesario un estado de cortante, y debido a que el estado es hidrostático, no existe tensión cortante alguna en el sólido. Por tanto, la respuesta es

$$\boxed{\text{RF}_{\text{VM}} = \infty} \quad (4.63)$$

Es decir, el sólido sometido al estado del enunciado jamás va a fallar por el criterio de Von Mises, con independencia de la carga aplicada.

Matemáticamente, el valor buscado es

$$\text{RF}_{\text{VM}} = \frac{S_y}{\sigma_{\text{VM}}}, \quad (4.64)$$

debiéndose calcular σ_{VM} para ello. Al ser un estado hidrostático que cumple $\text{tr}(\sigma) = 3\sigma_0$, el tensor de tensiones puede expresarse como

$$\sigma = \sigma_0 \mathbf{I}, \quad [\sigma]_{\text{X}} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

siendo \mathbf{I} el tensor unidad de segundo orden, de donde se obtiene que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$. Así,

$$\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = 0 \quad (4.66)$$

Apartado 2. Físicamente, el criterio de fallo de Tresca modeliza el fallo por cortante. Una vez más, debido a que el estado es hidrostático, no existe tensión cortante alguna en el sólido. Por tanto, la respuesta de nuevo es

$$\boxed{\text{RF}_{\text{Tresca}} = \infty} \quad (4.67)$$

Es decir, el sólido sometido al estado del enunciado jamás va a fallar por el criterio de Tresca, con independencia de la carga aplicada.

Matemáticamente, el valor buscado es

$$\text{RF}_{\text{Tresca}} = \frac{S_y/2}{\tau_{\text{máx}}}, \quad (4.68)$$

donde $\tau_{\text{máx}}$ es

$$\tau_{\text{máx}} = \text{máx} \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right\} = 0, \quad (4.69)$$

lo cual también puede obtenerse de forma directa sabiendo que el círculo de Mohr colapsa en un único punto contenido en el eje de abscisas (de tensión normal), es decir, el cortante es 0 en todo el sólido.

Apartado 3. Como es un estado hidrostático, la tensión a la que está sometido el sólido desde cualquier dirección (i.e. tensión normal a cualquier plano) es:

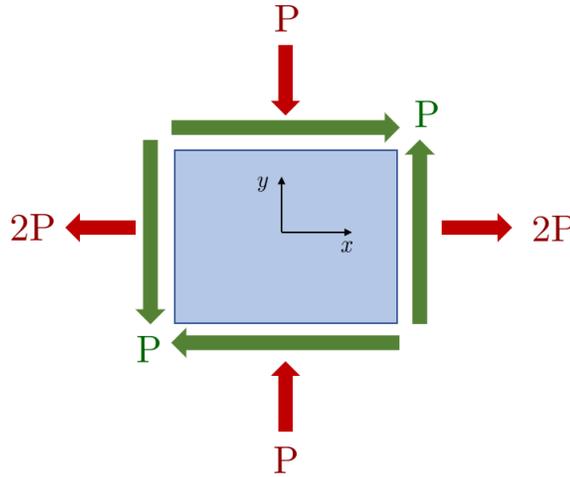
$$\boxed{\sigma_{\pi} = \sigma_0} \quad (4.70)$$

Matemáticamente,

$$\sigma_{\pi} = \mathbf{n}_{\pi} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{\pi} = \mathbf{n}_{\pi} \cdot \sigma_0 \mathbf{I} \mathbf{n}_{\pi} = \sigma_0 \underbrace{\mathbf{n}_{\pi} \cdot \mathbf{n}_{\pi}}_1 = \sigma_0, \quad (4.71)$$

donde se ha sustituido el tensor de tensiones expresado en la Ecuación (4.65). Obsérvese que \mathbf{n}_{π} es un vector unitario en dirección normal al plano π .

12. El sólido elástico, lineal, isótropo y plano representado en la figura es un estado de tensión plana generalizada. Dicho sólido está sometido a una presión $P=200$ (MPa) en el plano $x - y$.



- Seleccionar los tensores de tensiones (MPa) tanto en el plano $x - y$ como tridimensional.
- Seleccionar para el caso tridimensional el tensor de tensiones descompuesto en su parte volumétrica (σ^V) y en su parte desviadora (σ^D).
- Determinar el módulo de elasticidad (E) que provoca el cambio de volumen dado $\left(\frac{\Delta V}{V} = 0,5(\varepsilon)\right)$. (Dato: $\nu = 0,3$)
- Determinar el coeficiente de Poisson (ν) para obtener la densidad de energía de deformación por unidad de volumen dada $\left(U = 0,85\left(\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}\right)\right)$ (Dato: $E=200$ (GPa))

Solución

- a) Seleccionar los tensores de tensiones (MPa) tanto en el plano $x - y$ como tridimensional.**

El tensor de tensiones en el plano $x - y$ es,

$$[\sigma]_{\text{X}} = \begin{bmatrix} 2P & P \\ P & -P \end{bmatrix}_{\text{X}} = \begin{bmatrix} 400 & 200 \\ 200 & -200 \end{bmatrix}_{\text{X}} \text{ (MPa)}$$

y el tensor de tensiones tridimensional es,

$$[\sigma]_{\text{X}} = \begin{bmatrix} 2P & P & 0 \\ P & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{X}} = \begin{bmatrix} 400 & 200 & 0 \\ 200 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{X}} \text{ (MPa)}$$

- b) **Seleccionar para el caso tridimensional el tensor de tensiones descompuesto en su parte volumétrica (σ^V) y en su parte desviadora (σ^D).**

El tensor de tensión se puede descomponer en la parte volumétrica (V) y la parte desviadora:

$$[\sigma]_X = [\sigma^V]_X + [\sigma^D]_X$$

El tensor de tensión volumétrico (esférico o hidrostático) se obtiene,

$$[\sigma^V]_X = \frac{P}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_X = \frac{200}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_X \text{ (MPa)}$$

mientras que el tensor de tensión desviador se obtiene,

$$[\sigma^D]_X = P \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}_X = 200 \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}_X \text{ (MPa)}$$

Nota: La traza del tensor de tensión desviador debe ser nula.

- c) **Determinar el módulo de elasticidad (E) que provoca el cambio de volumen dado $\left(\frac{\Delta V}{V} = 0,5(\varepsilon)\right)$. (Dato: $\nu = 0,3$)**

El cambio de volumen unitario es la traza del tensor de deformación.

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Las componentes normales del tensor deformación se obtienen utilizando las ecuaciones constitutivas (Ley-Hooke)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

sumando dichas componentes normales,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) - \frac{2\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

y despejando el modulo de elasticidad, E, y sustituyendo los datos proporcionados,

$$E = \frac{P - 2P\nu}{\frac{\Delta V}{V}} = \boxed{160 \text{ (MPa)} = E}$$

d) **Determinar el coeficiente de Poisson (ν) para obtener la densidad de energía de deformación por unidad de volumen dada $\left(U = 0,85 \left(\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3} \right) \right)$ (Dato: $E=200$ (GPa))**

La densidad de energía elástica de deformación por unidad de volumen es un invariante. Por tanto, está es la misma en cualquier sistema de referencia. La forma más fácil de calcular la energía es utilizar los ejes principales en el punto. La fórmula en dichos ejes será:

$$U = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2 \cdot \sigma_2 + \varepsilon_3 \cdot \sigma_3)$$

Las tensiones principales son los autovalores del tensor de tensiones tridimensional, siendo las mismas,

$$\sigma_1 = P \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ (MPa)} > \sigma_2 = 0 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = P \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \text{ (MPa)}$$

Para determinar las deformaciones principales se usa la ley de Hooke generalizada en ejes principales,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_3) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned}$$

sustituyendo en la energía de deformación los datos proporcionados, así como, las tensiones y deformaciones principales, se despeja el coeficiente de Poisson ν pedido,

$$\nu = \frac{2UE - 7P^2}{6P^2} = \boxed{0,25 = \nu}$$

13. a) El estado de esfuerzos en un punto viene dado por el siguiente tensor:

$$\begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 60 \\ 0 & 60 & 80 \end{bmatrix}$$

Determinar el esfuerzo normal mínimo (tensión principal mínima) asociado al estado de esfuerzos. (MPa)

Solución

Para determinar el esfuerzo normal mínimo es necesario calcular las tensiones principales (autovalores) del tensor de tensiones,

$$\begin{vmatrix} 40 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -20 - \sigma & 60 \\ 0 & 60 & 80 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

siendo las tensiones principales,

$$\sigma_1 = 108,1024 \text{ (MPa)} > \sigma_2 = 40 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = -48,1025 \text{ (MPa)}$$

siendo el esfuerzo normal mínimo o la tensión principal mínima, el más pequeño de las tres esfuerzos calculados.

$$\boxed{\sigma_3 = -48,1025 \text{ (MPa)}}$$

- b) El estado de esfuerzos en un punto viene dado por el siguiente tensor,

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 30 \\ 0 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

Calcular el esfuerzo de Von-Mises (MPa).

Solución

Para determinar el esfuerzo de Von-Mises es necesario calcular las tensiones principales (autovalores) del tensor de tensiones,

$$\begin{vmatrix} 20 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -10 - \sigma & 30 \\ 0 & 30 & 40 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

siendo las tensiones principales,

$$\sigma_1 = 54,051 \text{ (MPa)} > \sigma_2 = 20 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = -24,051 \text{ (MPa)}$$

sustituyendo en la fórmula de Von-Mises,

$$\sigma_{V-M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \boxed{67,82 \text{ (MPa)}}$$

- c) El estado de esfuerzos en un punto viene dado por el siguiente tensor: ($E=210$ MPa; $\nu=0.33$)

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 20 & 30 & 10 \\ -30 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

Determinar el incremento de volumen unitario.

Solución

El cambio de volumen unitario es la traza del tensor de deformación.

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Las componentes normales del tensor deformación se obtienen utilizando las ecuaciones constitutivas (Ley-Hooke)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

sumando dichas componentes normales,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) - \frac{2\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \boxed{0,0971 (\varepsilon)}$$

- d) Un cubo L está sometido al estado de tensiones (MPa) dado. ($E= 200$ GPa; $\nu=0.33$)

$$\begin{bmatrix} 0 & -20 & 40 \\ -20 & 0 & 60 \\ 40 & 60 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular la energía de deformación por unidad de volumen (kJ/m^3).

Solución

La densidad de energía elástica de deformación por unidad de volumen es un invariante. Por tanto, está es la misma en cualquier sistema de referencia. La forma más fácil de calcular la energía es utilizar los ejes principales en el punto. La fórmula en dichos ejes será:

$$U = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2 \cdot \sigma_2 + \varepsilon_3 \cdot \sigma_3)$$

Las tensiones principales son los autovalores del tensor de tensiones, siendo

$$\sigma_1 = 64,038 \text{ (MPa)} > \sigma_2 = 18,223 \text{ (MPa)} > \sigma_3 = -82,26 \text{ (MPa)}$$

Para determinar las deformaciones principales se usa la ley de Hooke generalizada en ejes principales,

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) = 4,25 \cdot 10^{-4} (\varepsilon)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) = 1,21 \cdot 10^{-4} (\varepsilon)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) = -5,47 \cdot 10^{-4} (\varepsilon)$$

Sustituyendo en la energía de deformación,

$$U = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2 \cdot \sigma_2 + \varepsilon_3 \cdot \sigma_3) = \boxed{37,208 \left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)}$$

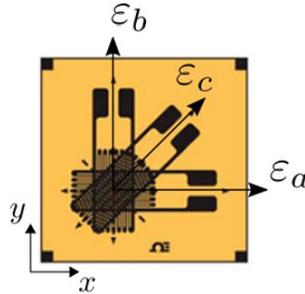
5. Deformaciones

5.1	Enunciados de ejercicios del Tensor de Deformaciones	90
5.2	Solución de ejercicios del Tensor de Deformaciones	97



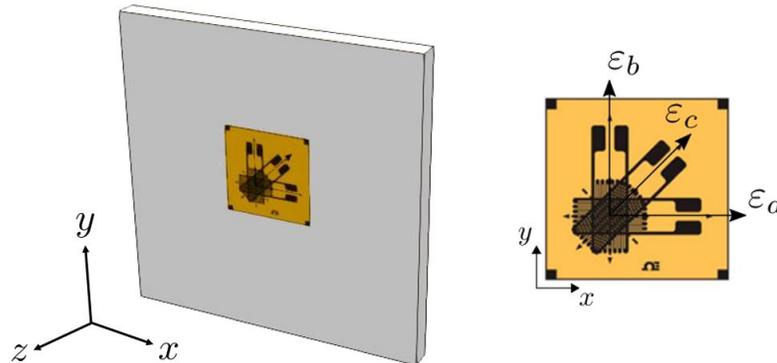
5.1. Enunciados de ejercicios del Tensor de Deformaciones

1. En la superficie de un sólido hay una roseta compuesta por tres galgas, tal como muestra la figura



Las lecturas de las galgas son $\varepsilon_a = 20 m\varepsilon$, $\varepsilon_b = 10 m\varepsilon$ y $\varepsilon_c = 17 m\varepsilon$. Se pide:

- Componente del tensor de deformaciones en ese plano en los ejes marcados.
 - Valores de las deformaciones principales y ángulo respecto a los ejes marcados.
 - Valor de la lectura en la galga c si las galgas a y b están en las direcciones principales.
2. La figura muestra tres extensímetros colocados en una pieza que está sometida a un estado deformacional que se puede considerar constante en todo su volumen. Las dimensiones de la pieza en la dirección z es varios órdenes de magnitud menor que las dimensiones x e y . Los extensímetros están colocados en el plano $x-y$ como se muestra:

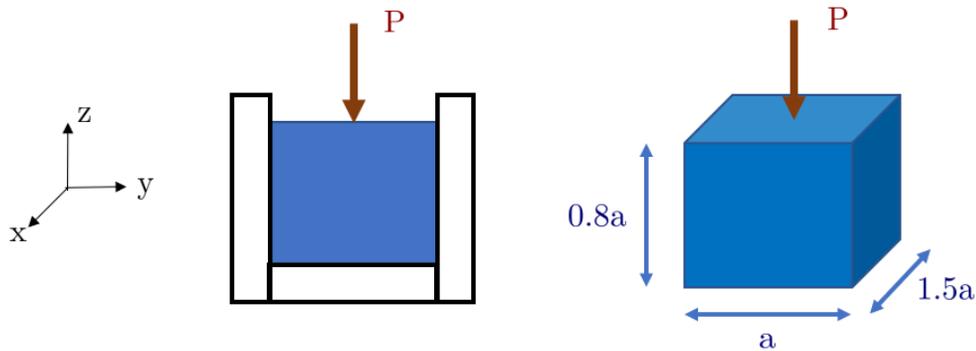


Los tres extensímetros están colocados ε_a horizontal, ε_b vertical y ε_c formando un ángulo de 45° .

Se pide:

- ¿Es tensión plana o deformación plana?
- Componentes ε_{xx} , ε_{yy} y ε_{xy} del tensor de deformación en el sistema de coordenadas de la figura del enunciado.

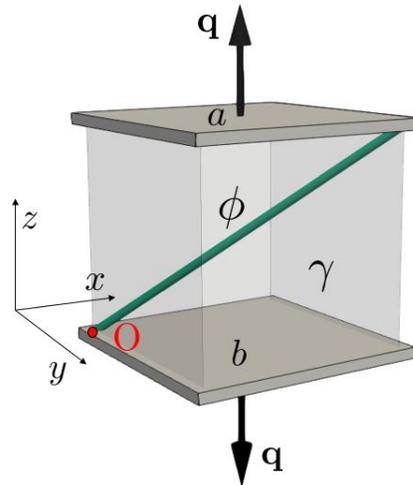
- c) Deformaciones máxima y mínima en el plano $x - y$.
 - d) Valor de la deformación ε_{zz} y la tensión σ_{zz} en la dirección z .
3. El bloque prismático se encuentra confinado dentro de un soporte infinitamente rígido. Dicho bloque está sometido a una carga P y a un incremento de temperatura de 10°C ($\Delta T = 10^\circ\text{C}$).



- a) El tensor de deformación (ε). Descomposición en su parte volumétrica (ε^V) y desviadora (ε^D).
- b) El tensor de tensión (σ). Descomposición en su parte volumétrica (σ^V) y desviadora (σ^D).
- c) Calcular el coeficiente de seguridad de la carga dada.
- d) Calcular el valor de la carga genérica P que provocaría el criterio de fallo según los criterios de Von Mises, Rankine y Tresca (En este caso el bloque sólo estará sometido a la carga P siendo el incremento térmico $\Delta T = 0^\circ\text{C}$)

Datos: $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\alpha = 140 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $P = 10^6 \text{ N}$, $a = 10 \text{ cm}$, $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, $\sigma_y = S_y = 0,2 \text{ GPa}$, $\sigma_u = S_u = 0,25 \text{ GPa}$

4. La figura muestra un cubo de material γ , elástico y lineal, con constantes E_γ y ν_γ , y longitud de arista de d que está cargado según su eje z . Embebido en el material γ hay una fibra ϕ con una rigidez E_ϕ . ϕ sólo puede producir tensiones longitudinales a su eje, el cual está definido por el vector unitario $\mathbf{n} = (\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$, ϕ empieza en una arista de la cara b y termina en la arista opuesta de la cara a . El área de ϕ es A_ϕ . Asumimos que existe compatibilidad de deformaciones entre γ y ϕ , y que la deformación en cualquier punto del volumen se puede caracterizar por el mismo tensor de deformación ε . Desconocemos la fuerza aplicada en el momento inicial de análisis, pero sabemos que esta produce una separación puramente vertical y uniforme de δ entre las caras a y b , sin movimiento x o y entre las caras.



Además, como simplificación nos dicen que:

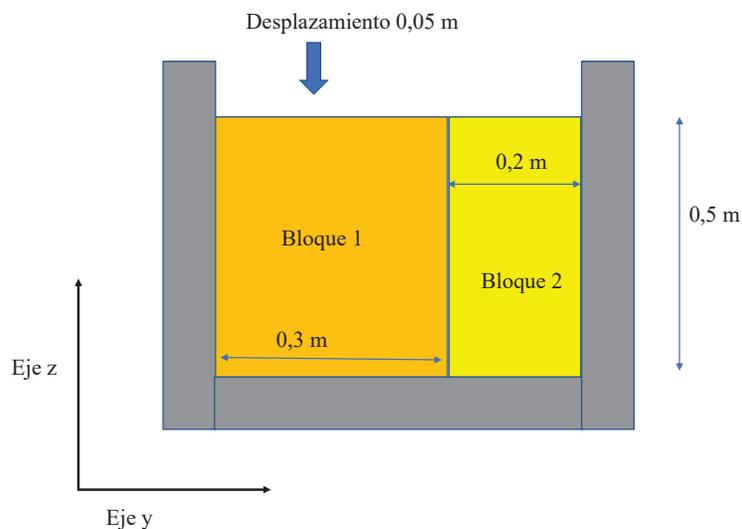
- 1.- Podemos considerar que la fuerza (\mathbf{p}) generada en las caras a y b por el material elástico γ es vertical.
- 2.- Podemos asumir que el efecto de la fibra en el campo tensional y deformacional de γ es despreciable. Es decir, analizamos sin fibra e introducimos el efecto que generaría considerando que el tensor de deformación y tensiones de γ es igual con y sin ella, dado su pequeño diámetro.
- 3.- Existe compatibilidad entre las deformaciones de ϕ y γ , y aditividad con las fuerzas.

Al existir aditividad de fuerzas, vamos a definir \mathbf{p} como la fuerza total aplicada sobre las caras del cubo, \mathbf{q} la fuerza procedente del material γ y \mathbf{f} la fuerza de la fibra.

Se pide:

- a) Calcular el alargamiento de la fibra ϕ .
- b) Calcular, en la cara a , la fuerza \mathbf{p} en formato vectorial.
- c) Considerando la misma separación paralela entre las caras a y b definida en el enunciado, calcular el ΔT que habría que aplicar al material γ para que la componente vertical de F sea nula. Considerar que el coeficiente de dilatación térmica en la fibra es nulo y para el material γ es α_γ . Definir ΔT como función de la geometría, el desplazamiento δ y las propiedades del material (E, ν, λ, μ) de ϕ y de γ .

5. En un recipiente indeformable, de base cuadrada de lado 0,5m y altura que se puede considerar infinita, hay dos bloques, 1 y 2, de distinto material, las propiedades de cada material son $E_1 = 10000\text{MPa}$, $\nu_1 = 0,3$, $\alpha_1 = 10^{-6}\text{1/K}$, $E_2 = 1000\text{MPa}$, $\nu_2 = 0,5$, $\alpha_2 = 10^{-5}\text{1/K}$, donde los subíndices indican a que bloque corresponde cada material. Los bloques miden 0,5m de alto, van de lado a lado en una dirección de la base del recipiente (eje x) y en la otra (eje y) el bloque 1 ocupa 0,3m y el otro 0,2m, tal como muestra la figura. Suponiendo que la parte superior del bloque 1 se desplaza 0,05m y la deformación en el bloque 2 es homogénea (que no lo es).

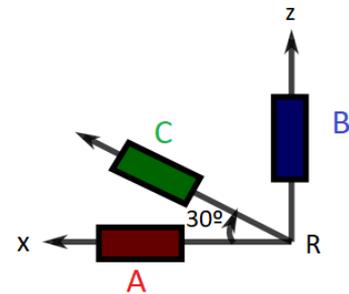
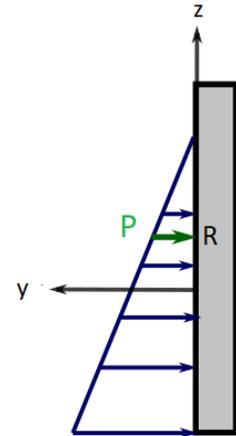


Se pide:

- Deformación de cada bloque.
- Tensión en las cara compartida de los bloques.
- Las deformaciones que provocan un cambio de forma.
- El cambio de volumen.
- Calcular de nuevo los puntos anteriores suponiendo que la temperatura aumenta 50 grados Celsius.

Un alumno curioso quiere conocer el estado tensional en un punto R de la pared interior de la piscina donde se baña cada verano. En primer lugar, ha realizado la suposición de que la pared es suficientemente ancha y posteriormente, ha recogido los datos que considera necesarios para poder calcular dicho estado tensional:

- a) Las medidas de tres bandas extensométricas colocadas en R.
6. $\epsilon_A = K (\mu\epsilon) \quad \epsilon_B = -K (\mu\epsilon) \quad \epsilon_C = \frac{K\sqrt{3}}{2} (\mu\epsilon)$
- b) El valor de la presión por efecto del agua es P (MPa) (El alumno ha considerado despreciable el resto de fuerzas actuantes en dicho punto).
 - c) Módulo de elasticidad $E=1000$ MPa.
 - d) Coeficiente de Poisson de la pared $\nu=0.25$.
 - e) Límite elástico de la pared $S_y=1$ MPa.



¿Es posible con los datos recogidos por el alumno poder determinar el estado tensional del punto por efecto del agua de la piscina? En caso negativo, proponga cómo podría ayudar al alumno a determinar el estado tensional en el punto R. En caso afirmativo, ayude al alumno a resolver las cuestiones que se planteó mientras realizaba la recogida de datos:

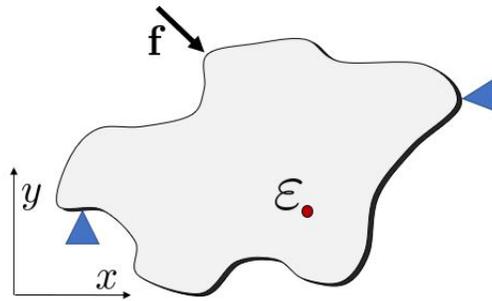
- a) Tensor de tensiones σ y tensor de deformaciones ϵ .
 - b) ¿Cuál es el valor de P que produce la plastificación en el punto R según el criterio de Von Mises para $K=200$?
 - c) Vector tensión asociado al plano octaédrico.
 - d) La parte esférica y desviadora del tensor de deformaciones.
7. En la figura se muestra un sólido elástico, lineal, isótropo, plano y continuo, con una geometría indeterminada en el plano $x-y$, y un pequeño espesor constante. Está sometido a ciertas condiciones de contorno y una carga de módulo variable, pero orientación y sentido constantes.

Se ha podido medir que una fuerza f genera un desplazamiento en la estructura de δ , ambos vectoriales y no necesariamente paralelos. Al mismo tiempo, se ha medido mediante extensímetros el tensor de deformación ϵ en un punto de la estructura. Este es:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_X$$

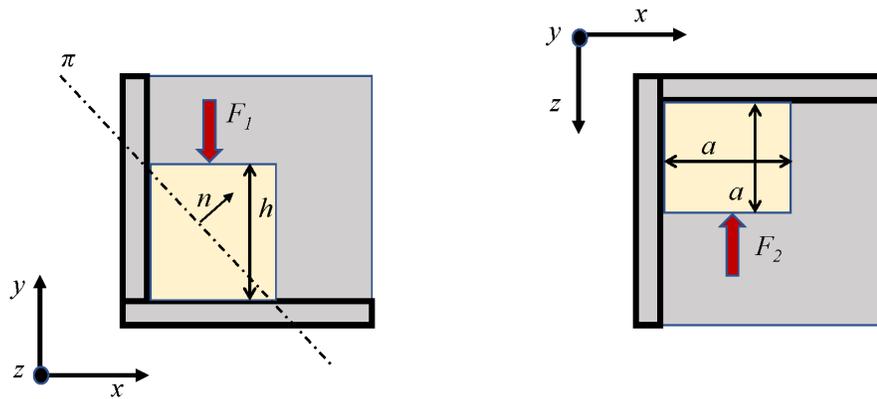
Constantes de Lamé:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



Si el volumen de la estructura es V_s , y asumiendo que la densidad de energía elástica en el punto donde hemos medido ε es igual a la media del sólido en su volumen, se pide:

- a) Propiedades mecánicas del sólido (λ , μ , E y ν).
8. Hay un bloque (amarillo) de base cuadrada (de lado $a = a$ m) y altura $h = h$ m, de un material elástico de propiedades $E = E$ MPa, $\nu = \nu$ y $\alpha = \alpha K^{-1}$, situado en la esquina de una caja (gris) de material indeformable que se puede suponer infinita. Todas las propiedades del materias y los tensores asociados a las deformaciones y tensiones se pueden suponer homogéneos.
- En la cara superior se le aplica una fuerza de valor $F_1 = F_1$ N y en otra de las caras, hay otra fuerza desconocida, F_2 . Los efectos de las fuerzas se consideran repartidos de forma homogénea en toda la cara de aplicación. Además, existe un incremento de temperatura de $\Delta T = \Delta T^\circ C$.

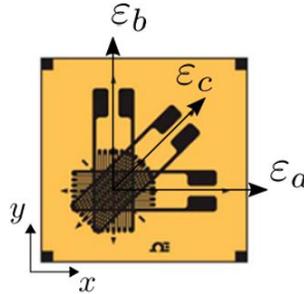


Se pide (suponer direcciones y sentidos de los vectores según la figura):

- La fuerza F_2 para que no haya deformación en su cara.
- Los tensores de deformaciones y tensiones en los ejes marcados. Las componentes volumétricas de ambos tensores.
- Los tensores de deformaciones y tensiones en los ejes principales y las direcciones principales.
- La componente normal del vector de tracción en el plano π .
- Las lecturas en una roseta de tres galgas, la central a 45 grados de las otras dos (que forman 90° entre sí), situada en el plano π , en el punto medio del sólido cortado por dicho plano y con la galga intermedia alienada con el eje z .

5.2. Solución de ejercicios del Tensor de Deformaciones

1. En la superficie de un sólido hay una roseta compuesta por tres galgas, tal como muestra la figura



Las lecturas de las galgas son $\varepsilon_a = 20 m\varepsilon$, $\varepsilon_b = 10 m\varepsilon$ y $\varepsilon_c = 17 m\varepsilon$ Se pide:

- a) Componentes del tensor de deformaciones en ese plano en los ejes marcados.
- b) Valores de las deformaciones principales y ángulo respecto a los ejes marcados.
- c) Valor de la lectura en la galga c si las galgas a y b están en las direcciones principales.

Solución

- a) Las galgas a y b están situados a 90 grados, y coinciden con los ejes x e y . Por tanto, la lectura en la galga a da la deformación en la dirección x () y la lectura en la galga b da la deformación en la dirección y . Respecto la lectura en la galga c, tenemos la relación con $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ dada por:

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

así:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \varepsilon_c - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} = 2 m\varepsilon$$

- b) Las deformaciones principales vendrán dadas por:

$$\varepsilon_1 = C + R$$

$$\varepsilon_2 = C - R$$

con

$$C = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} = 15 m\varepsilon$$

$$R = \sqrt{(\varepsilon_a - C)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = 5,385 m\varepsilon$$

y el ángulo

$$\theta = \frac{\arctan\left(\frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\varepsilon_a - \bar{C}}\right)}{2} = 10,9^\circ$$

siendo,

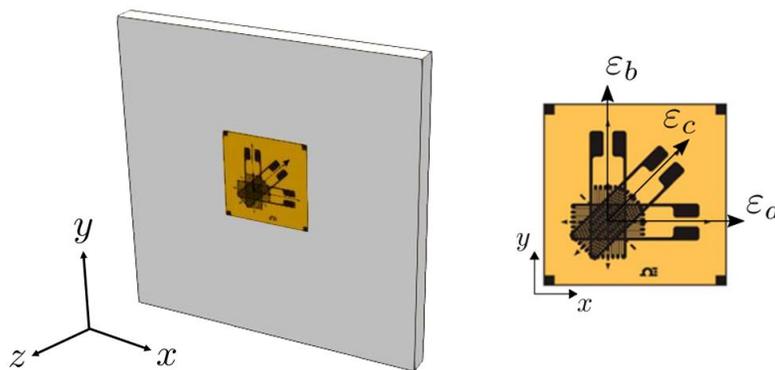
$$\varepsilon_1 = 20,385 \text{ m}\varepsilon$$

$$\varepsilon_2 = 9,615 \text{ m}\varepsilon$$

c) Si las direcciones coinciden con las direcciones principales la lectura en c es:

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} = 15 \text{ m}\varepsilon$$

2. La figura muestra tres extensímetros colocados en una pieza que está sometida a un estado deformacional que se puede considerar constante en todo su volumen. Las dimensiones de la pieza en la dirección z es varios órdenes de magnitud menor que las dimensiones x e y . Los extensímetros están colocados en el plano $x-y$ como se muestra:



Los tres extensímetros están colocados ϵ_a horizontal, ϵ_b vertical y ϵ_c formando un ángulo de 45° .

Se pide:

- ¿Es tensión plana o deformación plana?
- Componentes ϵ_{xx} , ϵ_{yy} y ϵ_{xy} del tensor de deformación en el sistema de coordenadas de la figura del enunciado.
- Deformaciones máxima y mínima en el plano $x-y$.
- Valor de la deformación ϵ_{zz} y la tensión σ_{zz} en la dirección z .

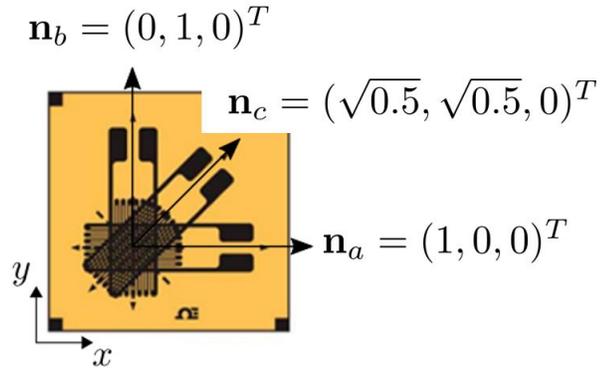
Solución

Apartado a:

Es tensión plana por la geometría y cargas.

Apartado b:

Los vectores directores (unitarios) de cada extensímetro serán:



Ahora se proyecta el tensor de deformación en cada una de las direcciones para calcular la deformación de cada extensímetro:

$$\varepsilon_a = [\mathbf{n}_a]_{\mathbf{X}}^T \cdot [\varepsilon]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{n}_a]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{xx} \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_b = [\mathbf{n}_b]_{\mathbf{X}}^T \cdot [\varepsilon]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{n}_b]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{yy} \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_c = [\mathbf{n}_c]_{\mathbf{X}}^T \cdot [\varepsilon]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{n}_c]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{0.5}\varepsilon_{xx} + \sqrt{0.5}\varepsilon_{xy} \\ \sqrt{0.5}\varepsilon_{xy} + \sqrt{0.5}\varepsilon_{yy} \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy} \quad (5.3)$$

con ello podemos relacionar las componentes del tensor de deformación en el plano x-y con las medidas del extensímetro:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_b \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_c - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} \quad (5.6)$$

Apartado c:

Para el cálculo de los autovalores vamos a usar el círculo de Mohr, para ello calculamos el centro (C) y el radio (R) como:

$$C = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} \quad (5.7)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_b}{2}\right)^2 + \left(\varepsilon_c - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2}\right)^2} \quad (5.8)$$

Así, tenemos:

$$\varepsilon_{max} = C + R \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_{min} = C - R \quad (5.10)$$

Apartado d:

Como es tensión plana, $\sigma_{zz} = 0$ y usamos su ecuación elástica para calcular ε_{zz} :

$$\sigma_{zz} = 0 = \lambda \text{tr}(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz} \quad (5.11)$$

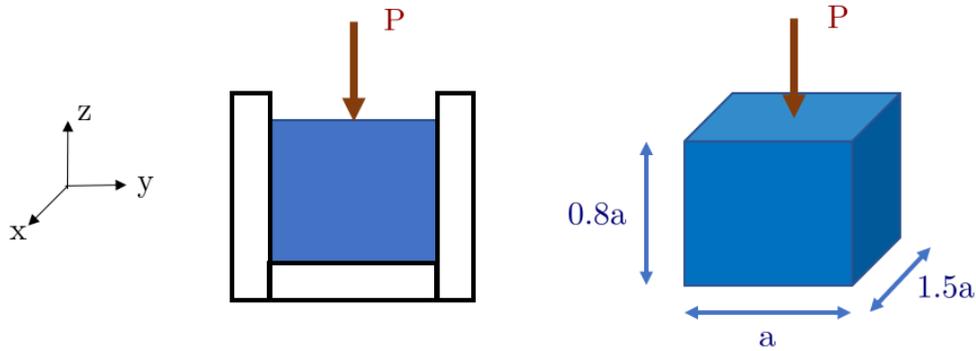
Sustituyendo y despejando:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda(\varepsilon_a + \varepsilon_b)}{2\mu + \lambda} \quad (5.12)$$

O:

$$\varepsilon_{zz} = -(\varepsilon_a + \varepsilon_b) \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (5.13)$$

3. El bloque prismático se encuentra confinado dentro de un soporte infinitamente rígido. Dicho bloque está sometido a una carga P y a un incremento de temperatura de 10°C ($\Delta T = 10^\circ\text{C}$).



- El tensor de deformación (ε). Descomposición en su parte volumétrica (ε^V) y desviadora (ε^D).
- El tensor de tensión (σ). Descomposición en su parte volumétrica (σ^V) y desviadora (σ^D).
- Calcular el coeficiente de seguridad de la carga dada.
- Calcular el valor de la carga genérica P que provocaría el criterio de fallo según los criterios de Von Mises, Rankine y Tresca (En este caso el bloque sólo estará sometido a la carga P siendo el incremento térmico $\Delta T = 0^\circ\text{C}$)

Datos: $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\alpha = 140 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $P = 10^6 \text{ N}$, $a = 10 \text{ cm}$, $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, $\sigma_y = S_y = 0,2 \text{ GPa}$, $\sigma_u = S_u = 0,25 \text{ GPa}$

Solución

- El tensor de deformación (ε). Descomposición en su parte volumétrica (ε^V) y desviadora (ε^D).**

El tensor de deformación es desconocido al igual que el tensor de tensión:

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (\varepsilon) \quad [\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (\text{Pa})$$

Las condiciones de contorno del bloque son:

$x=0$ (Cara libre de tensiones)

$$\mathbf{n}_{ext} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} ; \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

$$\varepsilon_{xy} = 0 \quad (\text{Ley de Hooke generalizada})$$

$$\varepsilon_{xz} = 0 \quad (\text{Ley de Hooke generalizada})$$

x=1.5a (Cara libre de tensiones)

$$\mathbf{n}_{ext} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_X ; \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_X$$

z=0.8a (Carga P)

$$\mathbf{n}_{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_X ; \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}_X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 1,5a^2 \end{bmatrix}_X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -66,7 \end{bmatrix}_X \quad (\text{MPa})$$

Eje de simetría en y

$$v = 0; \quad \varepsilon_{yy} = 0 = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz}$$

Por la Ley de Hooke generalizada, se obtiene la componente σ_{yy} :

$$\varepsilon_{yy} = 0 = \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) + \alpha T$$

$$\sigma_{yy} = \nu \sigma_{zz} - E \alpha T = -48 \quad (\text{MPa})$$

Posteriormente la componente ε_{zz} y ε_{xx} también se obtendrían aplicando la ley de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy}) + \alpha T$$

$$\varepsilon_{zz} = -1,21 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \alpha T = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \alpha T$$

$$\varepsilon_{xx} = 3,12 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon$$

Por tanto, el tensor de deformación será:

$$[\varepsilon]_X = \begin{bmatrix} 3,12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,21 \end{bmatrix}_X 10^{-4} \quad (\varepsilon)$$

Dicho tensor se puede descomponer en la parte volumétrica (V) y la parte desviadora:

$$[\varepsilon]_X = [\varepsilon^V]_X + [\varepsilon^D]_X$$

El tensor de deformación volumétrico se obtendría:

$$[\varepsilon^V]_X = \begin{bmatrix} 0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0,64 & 0 \\ 0 & 0 & 0,64 \end{bmatrix}_X 10^{-4} \quad (\varepsilon)$$

El tensor de deformación desviador se obtendría:

$$[\varepsilon^D]_X = \begin{bmatrix} 2,48 & 0 & 0 \\ 0 & -0,64 & 0 \\ 0 & 0 & -1,85 \end{bmatrix}_X 10^{-4} \quad (\varepsilon)$$

Nota: La traza del tensor de deformación desviador debe ser nula.

- b) **El tensor de tensiones (σ). Descomposición en su parte volumétrica (σ^V) y desviadora (σ^D).**

El tensor de tensión será:

$$[\sigma]_X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & -66,7 \end{bmatrix}_X \text{ (MPa)}$$

Dicho tensor se puede descomponer en la parte volumétrica (V) y la parte desviadora:

$$[\sigma]_X = [\sigma^V]_X + [\sigma^D]_X$$

El tensor de tensión volumétrico se obtendría:

$$[\sigma^V]_X = \begin{bmatrix} -38,23 & 0 & 0 \\ 0 & -38,23 & 0 \\ 0 & 0 & -38,23 \end{bmatrix}_X \text{ (MPa)}$$

El tensor de tensión desviador se obtendría:

$$[\sigma^D]_X = \begin{bmatrix} 38,23 & 0 & 0 \\ 0 & -9,77 & 0 \\ 0 & 0 & -28,46 \end{bmatrix}_X \text{ (MPa)}$$

Nota: La traza del tensor de tensión desviador debe ser nula.

- c) **Calcular el coeficiente de seguridad de la carga dada.**

El tensor de tensiones es diagonal y principal porque las tensiones principales están ordenadas de mayor a menor.

$$[\sigma]_X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & -66,7 \end{bmatrix}_X \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_1 = 0 \text{ MPa} > \sigma_2 = -48 \text{ MPa} > \sigma_3 = -66,7 \text{ MPa}$$

El coeficiente de seguridad está dado por la fórmula:

$$X = \frac{S_c}{\sigma_{eq}}$$

Para el caso de Rankine, se tomará el valor de $S_c = S_u$ para el cálculo del factor de seguridad:

$$\sigma_{eq} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|)$$

$$\sigma_{eq} = |\sigma_3| = |-66,7| \text{ MPa}$$

$$X = \frac{S_c}{\sigma_3} = \frac{0,25 \text{ GPa}}{0,0667 \text{ GPa}} = 3,74$$

En el caso de Tresca, se hará la hipótesis de que $S_c = \frac{S_y}{2}$ para el cálculo del factor de seguridad:

$$\tau_{eq} = \max\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}\right) = \max(24, 33, 35, 9, 35) \text{ MPa}$$

$$\tau_{eq} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = 33,35 \text{ MPa}$$

$$X = \frac{S_c}{\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}} = \frac{0,1 \text{ GPa}}{0,03335 \text{ GPa}} = 2,998 \cong 3$$

Para el caso de Von Mises, se hará la hipótesis de que $S_c = S_y$ para el factor de seguridad:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(48)^2 + (66,7)^2 + (18,7)^2} \text{ MPa} = 59,59 \text{ MPa}$$

$$X = \frac{S_c}{\sigma_{eq}} = \frac{0,2 \text{ GPa}}{0,05959 \text{ GPa}} = 3,36$$

- d) **Calcular el valor de la carga genérica P que provocaría el criterio de fallo según los criterios de Von Mises, Rankine y Tresca (Considérese despreciable el efecto térmico).**

El tensor de tensiones es diagonal y principal. En este caso será expresado de forma genérica:

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu \frac{-P}{1,5a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-P}{1,5a^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_1 = 0 \text{ MPa} > \sigma_2 = \nu \frac{-P}{1,5a^2} \text{ MPa} > \sigma_3 = \frac{-P}{1,5a^2} \text{ MPa}$$

El valor de P según el criterio de Rankine $\sigma_{eq} = S_u$:

$$\sigma_{eq} \geq \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|)$$

$$\sigma_{eq} = S_u \geq |\sigma_3| = \left| \frac{-P}{1,5a^2} \right|$$

$$P \leq 3,75 \text{ MN}$$

El valor de P según el criterio de Tresca $\sigma_{eq} = S_y$:

$$\sigma_{eq} \geq \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|)$$

$$\sigma_{eq} = S_y \geq |\sigma_1 - \sigma_3| = \frac{P}{1,5a^2}$$

$$P \leq 3 \text{ MN}$$

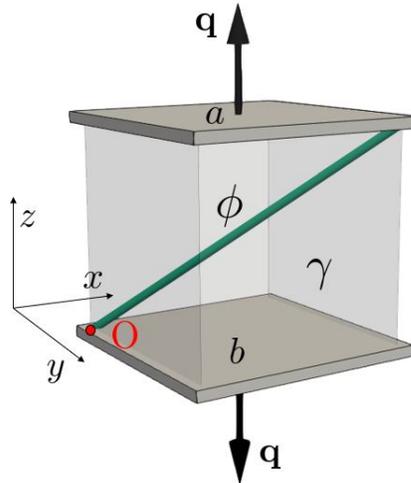
El valor de P según el criterio de Von Mises $\sigma_{eq} = S_y$:

$$\sigma_{eq} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{eq} = S_y \geq \frac{P}{1,5a^2} \sqrt{1 + \nu^2 - \nu}$$

$$P \leq 3,38 \text{ MN}$$

4. La figura muestra un cubo de material γ , elástico y lineal, con constantes E_γ y ν_γ , y longitud de arista de d que está cargado según su eje z . Embebido en el material γ hay una fibra ϕ con una rigidez E_ϕ . ϕ sólo puede producir tensiones longitudinales a su eje, el cual está definido por el vector unitario $\mathbf{n} = (\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$, ϕ empieza en una arista de la cara b y termina en la arista opuesta de la cara a . El área de ϕ es A_ϕ . Asumimos que existe compatibilidad de deformaciones entre γ y ϕ , y que la deformación en cualquier punto del volumen se puede caracterizar por el mismo tensor de deformación ϵ . Desconocemos la fuerza aplicada en el momento inicial de análisis, pero sabemos que esta produce una separación puramente vertical y uniforme de δ entre las caras a y b , sin movimiento x o y entre las caras.



Además, como simplificación nos dicen que:

1. Podemos considerar que la fuerza (\mathbf{p}) generada en las caras a y b por el material elástico γ es vertical.
2. Podemos asumir que el efecto de la fibra en el campo tensional y deformacional de γ es despreciable. Es decir, analizamos sin fibra e introducimos el efecto que generaría considerando que el tensor de deformación y tensiones de γ es igual con y sin ella, dado su pequeño diámetro.
3. Existe compatibilidad entre las deformaciones de ϕ y γ , y aditividad con las fuerzas.

Al existir aditividad de fuerzas, vamos a definir \mathbf{p} como la fuerza total aplicada sobre las caras del cubo, \mathbf{q} la fuerza procedente del material γ y \mathbf{f} la fuerza de la fibra.

Se pide:

- a) Calcular el alargamiento de la fibra ϕ .
- b) Calcular, en la cara a , la fuerza \mathbf{p} en formato vectorial.
- c) Considerando la misma separación paralela entre las caras a y b definida en el enunciado, calcular el ΔT que habría que aplicar al material γ para que la componente vertical de F sea nula. Considerar que el coeficiente de dilatación térmica

en la fibra es nulo y para el material γ es α_γ . Definir ΔT como función de la geometría, el desplazamiento δ y las propiedades del material (E, ν, λ, μ) de ϕ y de γ .

Solución

Según el enunciado podemos caracterizar el tensor de deformaciones del sólido únicamente considerando el material γ . Dado que la condición de contorno que nos da el enunciado del problema es un desplazamiento, vamos a calcular sobre ella el tensor de deformación ε . Si proyectamos el tensor de deformación sobre el eje z (\mathbf{e}_3), tendremos la condición de contorno:

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{e}_3]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta/d \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (5.14)$$

Y como no existen condiciones de contorno en las direcciones $[\mathbf{e}_1]_{\mathbf{X}}$ y $[\mathbf{e}_2]_{\mathbf{X}}$ del sólido, por la ley de Hooke sabemos que:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu \varepsilon_{33} \quad (5.15)$$

Y por la propia condición de contorno donde nos dice que el movimiento x e y de las caras a y b es nulo:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

Por lo que el tensor de deformaciones del cubo será:

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -\nu \delta/d & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \delta/d & 0 \\ 0 & 0 & \delta/d \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -\nu \varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (5.16)$$

Recordamos que existe compatibilidad de deformaciones y por ello este tensor define tanto la deformación de γ como la de ϕ .

A este mismo resultado se puede llegar mediante el tensor de tensiones de γ , ya que en el enunciado nos dicen que podemos despreciar el efecto de la fibra ϕ sobre el tensor de tensiones de γ . Analizando el material γ , sabemos que la proyección vertical de su tensor de tensiones genera una fuerza vertical \mathbf{q} , producida por una tensión en esa dirección $\sigma_{33} = q_3/A_\gamma$:

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{e}_3]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_3/A_\gamma \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (5.17)$$

También sabemos que no existen fuerzas aplicadas en las direcciones $[\mathbf{e}_1]_{\mathbf{X}}$ y $[\mathbf{e}_2]_{\mathbf{X}}$, por lo que la proyección del tensor de tensiones en estas direcciones es nula:

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{e}_1]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (5.18)$$

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{e}_2]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (5.19)$$

Por lo que el tensor de tensiones es:

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3/A_\gamma \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (5.20)$$

Con traza:

$$\text{tr}(\sigma) = q_3/A_\gamma \quad (5.21)$$

Donde $A_\gamma = d^2$.

Por lo que el tensor de deformación estaría definido como:

$$\varepsilon = \left(\frac{-\nu}{E} \right) \text{tr}(\sigma) \mathbf{I} + \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma \quad (5.22)$$

Al ser nulos los términos cortantes de σ también lo serán los de ε por la anterior expresión, y la diagonal será:

$$\varepsilon_{33} = \left(\frac{-\nu}{E} \right) \frac{q_3}{A_\gamma} + \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{33} = \left(\frac{-\nu}{E} \right) \frac{q_3}{A_\gamma} + \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{q_3}{A_\gamma} = \frac{q_3}{A_\gamma E} \quad (5.23)$$

$$\varepsilon_{11} = \left(\frac{-\nu}{E} \right) \frac{q_3}{A_\gamma} + \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{11} = \left(\frac{-\nu}{E} \right) \frac{q_3}{A_\gamma} = -\nu \varepsilon_{33} \quad (5.24)$$

$$\varepsilon_{22} = \left(\frac{-\nu}{E} \right) \frac{q_3}{A_\gamma} + \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{22} = \left(\frac{-\nu}{E} \right) \frac{q_3}{A_\gamma} = -\nu \varepsilon_{33} \quad (5.25)$$

Que es el mismo resultado de la ecuación 5.16, por lo que podemos igualar $\varepsilon_{33} = \delta/d = q_3/A_\gamma E$, y determinar que:

$$q_3 = \frac{A_\gamma E \delta}{d} \quad (5.26)$$

Como sabemos que \mathbf{q} es vertical, tendremos $\mathbf{q} = q_3 \mathbf{e}_3$.

Este resultado final tras toda la deducción previa puede resultar trivial, pero conviene conocer el proceso para deducir solicitaciones más complejas que se puedan dar en otros escenarios.

La fuerza \mathbf{p} está compuesta por \mathbf{q} y \mathbf{f} . Para el cálculo de la fuerza producida por la fibra proyectamos el tensor de deformación sobre la dirección de la fibra y seleccionamos la componente longitudinal a esta (ε_f), para ello:

$$\varepsilon_f = [\mathbf{n}]_{\mathbf{X}}^T \cdot [\varepsilon]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{n}]_{\mathbf{X}} = n_i \varepsilon_{ij} n_j = \frac{\varepsilon_{33}}{3} (1 - 2\nu) = \frac{\delta}{3d} (1 - 2\nu) \quad (5.27)$$

Con ello, la elongación de la fibra ϕ será:

$$\Rightarrow \Delta l_\phi = \varepsilon_f l_\phi = \frac{\delta}{3d} (1 - 2\nu) l_\phi \quad (5.28)$$

Según nos dice el enunciado, la fibra sólo puede transmitir tensiones de manera longitudinal, por lo que la tensión de la fibra será:

$$\sigma_f = \varepsilon_f E_\phi = \frac{\delta E_\phi}{3d} (1 - 2\nu) \quad (5.29)$$

Y la fuerza longitudinal generada por la fibra tendrá un módulo:

$$|\mathbf{f}| = A_\phi \sigma_f = \frac{A_\phi \delta E_\phi}{3d} (1 - 2\nu) \quad (5.30)$$

Y la dirección de \mathbf{f} será la de \mathbf{n} , por lo que la fuerza \mathbf{q} total será:

$$\Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{f} = p_3 \mathbf{e}_3 + |\mathbf{f}| \mathbf{n} \quad (5.31)$$

Y la componente vertical de \mathbf{q} será:

$$q_3 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_3 = p_3 + \sqrt{1/3} |\mathbf{f}| = \frac{A_\gamma E_\gamma \delta}{d} + \sqrt{1/3} \frac{A_\phi \delta E_\phi}{3d} (1 - 2\nu) \quad (5.32)$$

Por último nos piden el incremento térmico que hace que la componente vertical de \mathbf{q} sea nula, considerando que el estado deformacional y tensional de la fibra no varía durante el incremento térmico, y por tanto, que no varía \mathbf{f} ni en módulo ni en dirección.

Por ello es γ lo que varía a nivel tensional, y esta debe de compensar la componente vertical de \mathbf{f} , f_3 . Partiendo de nuestros cálculos previos, debido al incremento térmico ΔT , tensorialmente, el tensor de tensiones será:

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\varepsilon) \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon - \beta_\gamma \Delta T \mathbf{I} \quad (5.33)$$

Donde:

$$\beta_\gamma = \frac{E_\gamma \alpha_\gamma}{(1 - 2\nu)} \quad (5.34)$$

La componente vertical la obtenemos de proyectar el tensor de tensiones doblemente:

$$[\mathbf{e}_3]_{\mathbf{X}} \cdot ([\boldsymbol{\sigma}]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{e}_3]_{\mathbf{X}}) = \sigma_{33} \quad (5.35)$$

$$\sigma_{33} = \lambda \left(\frac{\delta}{d} (1 - 2\nu) \right) + 2\mu \frac{\delta}{d} - \beta_\gamma \Delta T \quad (5.36)$$

Y mediante la condición del enunciado, donde la tensión de γ debe de compensar la fuerza vertical de la fibra ϕ , tenemos:

$$\sigma_{33} = -\frac{f_3}{A_\gamma} \quad (5.37)$$

Donde tenemos:

$$\sigma_{33} = \lambda \left(\frac{\delta}{d} (1 - 2\nu) \right) + 2\mu \frac{\delta}{d} - \beta_\gamma \Delta T = -\frac{f_3}{A_\gamma} \quad (5.38)$$

De aquí, despejamos ΔT :

$$\Delta T = \frac{1}{\beta_\gamma} \left(\frac{\delta}{d} (\lambda(1 - 2\nu) + 2\mu) + \frac{f_3}{A_\gamma} \right) \quad (5.39)$$

Y sustituyendo β :

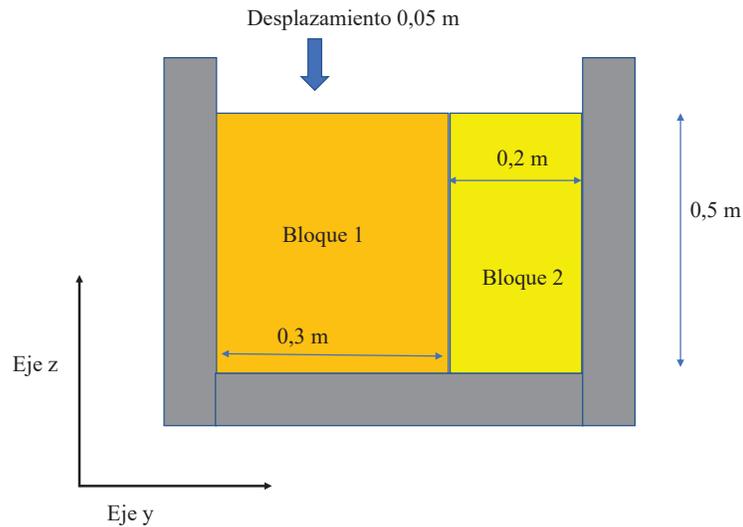
$$\Delta T = \frac{(1 - 2\nu)}{E_\gamma \alpha_\gamma} \left(\frac{\delta}{d} (\lambda(1 - 2\nu) + 2\mu) + \frac{f_3}{A_\gamma} \right) \quad (5.40)$$

Y como función de la geometría, el desplazamiento δ y las propiedades del material:

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{(1 - 2\nu)}{E_\gamma \alpha_\gamma} \left(\frac{\delta}{d} (\lambda(1 - 2\nu) + 2\mu) + \frac{A_\phi \delta E_\phi}{3dA_\gamma} (1 - 2\nu) \right) \quad (5.41)$$

En este ejercicio existen muchas simplificaciones que hacen que se pueda llegar a su solución de manera más intuitiva. Se debe de considerar que una formulación más rigurosa y menos intuitiva hace que podamos abordar problemas donde no existan estas simplificaciones, como la carga uniaxial y vertical, y que son los casos más comunes dentro de la ingeniería.

5. En un recipiente indeformable, de base cuadrada de lado 0,5 m y altura que se puede considerar infinita, hay dos bloques, 1 y 2, de distinto material, las propiedades de cada material son $E_1 = 10000 \text{ MPa}$, $\nu_1 = 0,3$, $\alpha_1 = 10^{-6} \text{ 1/K}$, $E_2 = 1000 \text{ MPa}$, $\nu_2 = 0,5$, $\alpha_2 = 10^{-5} \text{ 1/K}$, donde los subíndices indican a que bloque corresponde cada material. Los bloques miden 0,5 m de alto, van de lado a lado en una dirección de la base del recipiente (eje x) y en la otra (eje y) el bloque 1 ocupa 0,3 m y el otro 0,2 m, tal como muestra la figura. Suponiendo que la parte superior del bloque 1 se desplaza 0,05 m y la deformación en el bloque 2 es homogénea (que no lo es).



Se pide:

- Deformación de cada bloque.
- Tensión en las cara compartida de los bloques.
- Las deformaciones que provocan un cambio de forma.
- El cambio de volumen.
- Calcular de nuevo los puntos anteriores suponiendo que la temperatura aumenta 50 grados Celsius.

Solución

El problema elástico lineal tiene 12 incógnitas (tensiones y deformaciones de ambos bloques i.e. $\varepsilon_{xx}^I, \varepsilon_{yy}^I, \varepsilon_{zz}^I, \sigma_{xx}^I, \sigma_{yy}^I, \sigma_{zz}^I$ y $\varepsilon_{xx}^{II}, \varepsilon_{yy}^{II}, \varepsilon_{zz}^{II}, \sigma_{xx}^{II}, \sigma_{yy}^{II}, \sigma_{zz}^{II}$, denominando como I al bloque 1 y II al bloque dos).

En primer lugar se consideran las condiciones de contorno aplicables:

- La cara en contacto está en equilibrio de tensiones, por acción-reacción. Por tanto,

$$\sigma_{yy}^I = -\sigma_{yy}^{II}$$

b) El desplazamiento a lo largo del eje x está impedido (bloques confinados):

$$\varepsilon_{xx}^I = \varepsilon_{xx}^{II} = 0$$

c) El desplazamiento vertical (según z) del bloque I viene dado (es conocido), mientras que el del bloque II no está impedido superiormente

$$\varepsilon_{zz}^I = \frac{\Delta l_z^I}{l_z^I}, \quad \sigma_{zz}^{II} = 0$$

d) Finalmente, se plantea la compatibilidad de desplazamientos (ecuación de ligadura)

$$v^I + v^{II} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{yy}^I l_y^I + \varepsilon_{yy}^{II} l_y^{II} = 0$$

Esto constituye un total de 6 ecuaciones. Planteando las leyes de Hooke generalizadas para cada bloque, se obtienen otras 6 ecuaciones más, cerrando el sistema lineal de 12 ecuaciones con 12 incógnitas.

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\sigma_{xx}^I}{E^I} - \nu^I \frac{\sigma_{yy}^I + \sigma_{zz}^I}{E^I} \\ \varepsilon_{yy}^I &= \frac{\sigma_{yy}^I}{E^I} - \nu^I \frac{\sigma_{xx}^I + \sigma_{zz}^I}{E^I} \\ \frac{\Delta l_z^I}{l_z^I} &= \frac{\sigma_{zz}^I}{E^I} - \nu^I \frac{\sigma_{xx}^I + \sigma_{yy}^I}{E^I} \\ 0 &= \frac{\sigma_{xx}^{II}}{E^{II}} - \nu^{II} \frac{\sigma_{yy}^{II}}{E^{II}} \\ \varepsilon_{yy}^{II} &= \frac{\sigma_{yy}^{II}}{E^{II}} - \nu^{II} \frac{\sigma_{xx}^{II}}{E^{II}} \\ \varepsilon_{zz}^{II} &= -\nu^{II} \frac{\sigma_{xx}^{II} + \sigma_{yy}^{II}}{E^{II}} \\ \sigma_{yy}^I &= \sigma_{yy}^{II} \\ \varepsilon_{yy}^I l_y^I + \varepsilon_{yy}^{II} l_y^{II} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La solución del sistema previo es:

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_{xx}^I = 0 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{xx}^I = -361,7 \text{ MPa} & \varepsilon_{xx}^{II} = 0 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{xx}^{II} = -37,3 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{yy}^I = 37,31 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{yy}^I = -74,6 \text{ MPa} & \varepsilon_{yy}^{II} = -55,97 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{yy}^{II} = -74,6 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{zz}^I = -100 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{zz}^I = -1130,9 \text{ MPa} & \varepsilon_{zz}^{II} = 55,97 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{zz}^{II} = 0 \text{ MPa} \end{array}$$

Añadir un incremento de temperatura de $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ supone añadir un término esférico de deformaciones en ambos bloques, de modo que el sistema a resolver es (las condiciones de contorno son las mismas):

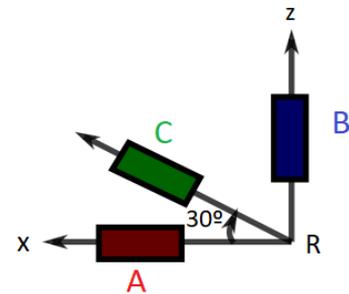
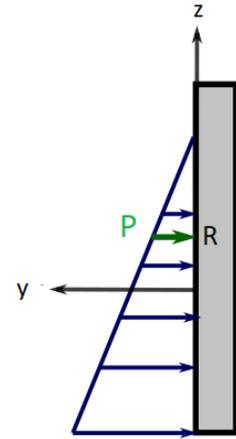
$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\sigma_{xx}^I}{E^I} - \nu^I \frac{\sigma_{yy}^I + \sigma_{zz}^I}{E^I} + \alpha^I \Delta T \\ \varepsilon_{yy}^I &= \frac{\sigma_{yy}^I}{E^I} - \nu^I \frac{\sigma_{xx}^I + \sigma_{zz}^I}{E^I} + \alpha^I \Delta T \\ \frac{\Delta l_z^I}{l_z^I} &= \frac{\sigma_{zz}^I}{E^I} - \nu^I \frac{\sigma_{xx}^I + \sigma_{yy}^I}{E^I} + \alpha^I \Delta T \\ 0 &= \frac{\sigma_{xx}^{II}}{E^{II}} - \nu^{II} \frac{\sigma_{yy}^{II}}{E^{II}} + \alpha^{II} \Delta T \\ \varepsilon_{yy}^{II} &= \frac{\sigma_{yy}^{II}}{E^{II}} - \nu^{II} \frac{\sigma_{xx}^{II}}{E^{II}} + \alpha^{II} \Delta T \\ \varepsilon_{zz}^{II} &= -\nu^{II} \frac{\sigma_{xx}^{II} + \sigma_{yy}^{II}}{E^{II}} + \alpha^{II} \Delta T \\ \sigma_{yy}^I &= \sigma_{yy}^{II} \\ \varepsilon_{yy}^I l_y^I + \varepsilon_{yy}^{II} l_y^{II} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La solución del sistema previo es:

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_{xx}^I = 0 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{xx}^I = -362,8 \text{ MPa} & \varepsilon_{xx}^{II} = 0 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{xx}^{II} = -38,3 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{yy}^I = 37,33 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{yy}^I = -75,7 \text{ MPa} & \varepsilon_{yy}^{II} = -56,00 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{yy}^{II} = -75,7 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{zz}^I = -100 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{zz}^I = -1132,0 \text{ MPa} & \varepsilon_{zz}^{II} = 57,49 \text{ m}\varepsilon & \sigma_{zz}^{II} = 0 \text{ MPa} \end{array}$$

Un alumno curioso quiere conocer el estado tensional en un punto R de la pared interior de la piscina donde se baña cada verano. En primer lugar, ha realizado la suposición de que la pared es suficientemente ancha y posteriormente, ha recogido los datos que considera necesarios para poder calcular dicho estado tensional:

- a) Las medidas de tres bandas extensométricas colocadas en R.
6. $\epsilon_A = K (\mu\epsilon) \quad \epsilon_B = -K (\mu\epsilon) \quad \epsilon_C = \frac{K\sqrt{3}}{2} (\mu\epsilon)$
- b) El valor de la presión por efecto del agua es P (MPa) (El alumno ha considerado despreciable el resto de fuerzas actuantes en dicho punto).
- c) Módulo de elasticidad $E=1000$ MPa.
- d) Coeficiente de Poisson de la pared $\nu=0.25$.
- e) Límite elástico de la pared $S_y=1$ MPa.



¿Es posible con los datos recogidos por el alumno poder determinar el estado tensional del punto por efecto del agua de la piscina? En caso negativo, proponga cómo podría ayudar al alumno a determinar el estado tensional en el punto R. En caso afirmativo, ayude al alumno a resolver las cuestiones que se planteó mientras realizaba la recogida de datos:

- a) Tensor de tensiones σ y tensor de deformaciones ϵ .
- b) ¿Cuál es el valor de P que produce la plastificación en el punto R según el criterio de Von Mises para $K=200$?
- c) Vector tensión asociado al plano octaédrico.
- d) La parte esférica y desviadora del tensor de deformaciones.

Solución

a) **¿Es posible determinar el estado tensional?**

El estado tensional del punto R puede ser determinado por el alumno porque ha recogido datos tanto en el plano x-z como en el eje perpendicular a dicho plano (eje y). Las bandas extensométricas le proporcionarán 3 datos en las deformaciones $\epsilon_{xx}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xz}$ mientras que el valor de la presión P le proporcionará 3 datos en las tensiones $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}$. Por tanto, estos 6 datos son linealmente independientes pudiéndose calcular el resto de parámetros con las ecuaciones constitutivas.

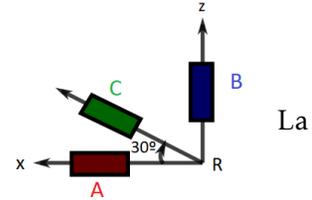
b) **Tensor de tensiones σ y tensor de deformaciones ϵ .**

El alumno inicialmente plantea un tensor de tensión σ desconocido y un tensor de deformación ϵ también desconocido:

$$[\epsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} (\mu\epsilon) \quad [\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \text{ (MPa)}$$

Las medidas proporcionadas por las bandas extensométricas en la pared de la piscina son:

$$\epsilon_A = K (\mu\epsilon); \quad \epsilon_B = -K (\mu\epsilon); \quad \epsilon_C = \frac{K\sqrt{3}}{2} (\mu\epsilon)$$



banda extensométrica en la dirección A proporcionará al alumno la componente ϵ_{xx} (Plano x-z):

$$\mathbf{n}_{0A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}; \quad \epsilon_A = \mathbf{n}_{0A}^T \epsilon \mathbf{n}_{0A} = K (\mu\epsilon); \quad \epsilon_{xx} = K (\mu\epsilon)$$

La banda extensométrica en la dirección B proporcionará la componente ϵ_{zz} (Plano x-z):

$$\mathbf{n}_{0B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}; \quad \epsilon_B = \mathbf{n}_{0B}^T \epsilon \mathbf{n}_{0B} = -K (\mu\epsilon); \quad \epsilon_{yy} = -K (\mu\epsilon)$$

La banda extensométrica en la dirección C proporcionará la componente ϵ_{xz} (Plano x-z):

$$\mathbf{n}_{0C} = \begin{bmatrix} \cos(30) \\ \sin(30) \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}; \quad \epsilon_C = \mathbf{n}_{0C}^T \epsilon \mathbf{n}_{0C} = \frac{K\sqrt{3}}{2} (\mu\epsilon); \quad \epsilon_{xz} = \frac{K(-1 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} \approx 0,423 (\mu\epsilon)$$

El valor de la presión por efecto del agua de la piscina en el punto R tiene un valor P. En este caso, el alumno utilizará el Lema de Cauchy para calcular el valor de las componentes del tensor de tensiones asociados a la normal exterior a la cara $y=0$.

$$\mathbf{n}_{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}; \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

Por tanto, los datos obtenidos por el alumno con los datos recogidos serán:

$$[\epsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} K & \epsilon_{xy} & 0,423 K \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ 0,423 K & \epsilon_{yz} & -K \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} (\mu\epsilon) \quad [\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & -P & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \text{ (MPa)}$$

Utilizando la Ley de Hooke generalizada, el alumno obtendrá el resto de componentes de ambos tensores.

Componentes tangenciales del tensor de deformación y del tensor de tensión:

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= 0, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{yz} &= 0, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz} = 0 \\ \varepsilon_{xz} &= 0,423 K \text{ } (\mu\varepsilon), & \sigma_{xz} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{yz} \approx 338,4 K \text{ (MPa)}\end{aligned}$$

Componentes normales del tensor de deformación y del tensor de tensión:

Se planteará un sistema de ecuaciones con las componentes ε_{xx} y ε_{zz}

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= K = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \varepsilon_{xx} &= K = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(-P + \sigma_{zz}) \text{ Ecuación (I)} \\ \varepsilon_{zz} &= -K = \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{zz} &= -K = \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} - P) \text{ Ecuación (II)}\end{aligned}$$

Se multiplicará la ecuación (I) por ν y posteriormente se sumará con la ecuación (II)

$$\begin{aligned}K \nu &= \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu^2}{E}(-P + \sigma_{zz}) \\ -EK + EK\nu &= \nu^2 P + \nu P + \sigma_{zz}(1 - \nu^2)\end{aligned}$$

Despejando la componente σ_{zz} :

$$\sigma_{zz} = -800 K - \frac{P}{3} \text{ (MPa)}$$

La componente σ_{xx} se obtendrá sustituyendo en la ecuación (I) o en la ecuación (II)

$$\sigma_{xx} = 800 K - \frac{P}{3} \text{ (MPa)}$$

La componente ε_{yy} se obtendría de aplicar la Ley de Hooke generalizada:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{-P}{E} - \frac{\nu}{E}\left(800K - \frac{P}{3} - 800K - \frac{P}{3}\right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{-5P}{6E} \quad (\mu\varepsilon)\end{aligned}$$

Ya están determinados todas las componentes de ambos tensores. Por tanto, el tensor de tensión y el tensor de deformación han quedado de la siguiente forma:

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0,423 K \\ 0 & \frac{-5P}{6E} & 0 \\ 0,423 K & 0 & -K \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} (\mu\varepsilon) \quad [\sigma]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 800 K - \frac{P}{3} & 0 & 338,4 K \\ 0 & -P & 0 \\ 338,4 K & 0 & -800 K - \frac{P}{3} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \text{ (MPa)}$$

- c) **¿Cuál es el valor de P que produce la plastificación en el punto R según el criterio de Von Mises para $K=200$?**

El criterio de Von-Mises expresado en función de las tensiones principales está dado por la fórmula siguiente:

$$\sigma_{eq} = S_y \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

Las tensiones principales son los autovalores del tensor de tensiones. Analizando el mismo, la tensión $\sigma_{yy} = \sigma_2$ es una tensión principal. Por tanto, se puede realizar la diagonalización en el plano (x-z) para obtener las deformaciones principales asociadas al mismo.

$$\begin{vmatrix} K - \lambda & 0,423 K \\ 0,423 K & -K - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Las deformaciones principales obtenidas son:

$$\varepsilon_1 = K\sqrt{1^2 + 0,423^2} = 217,156 \quad (\mu\varepsilon) \quad \varepsilon_3 = -K\sqrt{1^2 + 0,423^2} = -217,156 \quad (\mu\varepsilon)$$

Las tensiones principales se obtienen de aplicar la ecuación de Lamé en ejes principales ($\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0$):

$$\sigma_1 = 2 G\varepsilon_1 + \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 2 G\varepsilon_1 + \lambda (\varepsilon_2) \quad \text{Ecuación III}$$

$$\sigma_3 = 2 G\varepsilon_3 + \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 2 G\varepsilon_3 + \lambda (\varepsilon_2) \quad \text{Ecuación IV}$$

Siendo las constantes de la ecuación de Lamé:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 400 \quad \text{(MPa)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = 400 \quad \text{(MPa)}$$

Previamente, se calculará la componente ε_2 ($\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0$) al conocer la σ_2 :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= 2G\varepsilon_2 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \sigma_2 &= -P \text{ (MPa)}; \quad \varepsilon_2 = \frac{-P - \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{2G + \lambda} \\ \varepsilon_2 &= \frac{-P}{2G + \lambda} = \frac{-P}{1200} \text{ (}\mu\varepsilon\text{)}\end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (III) y (IV):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0,173 - \frac{P}{3} \text{ (MPa)} \\ \sigma_3 &= -0,173 - \frac{P}{3} \text{ (MPa)}\end{aligned}$$

Reordenando, las tensiones principales de mayor a menor:

$$\sigma_1 = 0,173 - \frac{P}{3} \text{ (MPa)} > \sigma_2 = -0,173 - \frac{P}{3} \text{ (MPa)} > \sigma_3 = -P \text{ (MPa)}$$

Aplicando el criterio de Von Mises:

$$\begin{aligned}\sigma_{eq} = S_y &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \\ S_y &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(0,173 - \frac{P}{3} - \left(-0,173 - \frac{P}{3}\right)\right)^2 + \left(-0,173 - \frac{P}{3} - (-P)\right)^2 + \left(0,173 - \frac{P}{3} - (-P)\right)^2} \\ S_y &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3 \cdot (0,173)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2P}{3}\right)^2} \text{ (MPa)} \\ -1,46 &= -\sqrt{\frac{((S_y)^2 - 3 \cdot (0,173)^2) \cdot 9}{8}} \leq P \leq \sqrt{\frac{((S_y)^2 - 3 \cdot (0,173)^2) \cdot 9}{8}} = 1,46 \text{ (MPa)}\end{aligned}$$

d) Vector tensión asociado al plano octaédrico.

El vector tensión se obtiene aplicando el Lema de Cauchy. En este caso, al referirse al plano octaédrico la n^{ext} asociada a dicho plano es aquella que forma ángulos iguales respecto a los tres ejes principales.

$$\mathbf{n}_{ext} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}_{\mathbf{P}}$$

El tensor tensión asociado al plano octaédrico será:

$$t_{\pi^{oct}} = \begin{bmatrix} 0,173 - \frac{P}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -0,173 - \frac{P}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix}_{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(0,173 - \frac{P}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-0,173 - \frac{P}{3}\right) \\ \frac{-P}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}_{\mathbf{P}} \text{ (MPa)}$$

e) **La parte esférica y desviadora del tensor de deformaciones.**

El tensor de deformación se descompone en la parte volumétrica (asociados a los cambios de volumen) y en la parte desviadora (asociados a los cambios de forma):

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} = [\varepsilon^V]_{\mathbf{X}} + [\varepsilon^D]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0,423 K \\ 0 & \frac{-5P}{6E} & 0 \\ 0,423 K & 0 & -K \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} (\mu\varepsilon)$$

El tensor volumétrico será:

$$[\varepsilon^V]_{\mathbf{X}} = \frac{\text{traza}(\varepsilon)}{3} = \begin{bmatrix} \frac{-5P}{18E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-5P}{18E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-5P}{18E} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} (\mu\varepsilon)$$

El tensor de deformación desviador se obtendría de la resta de ambos tensores:

$$[\varepsilon^D]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} K + \frac{5P}{18E} & 0 & 0,423 K \\ 0 & \frac{-5P}{9E} & 0 \\ 0,423 K & 0 & -K + \frac{5P}{18E} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} (\mu\varepsilon)$$

Nota: La traza del tensor desviador debe ser nula.

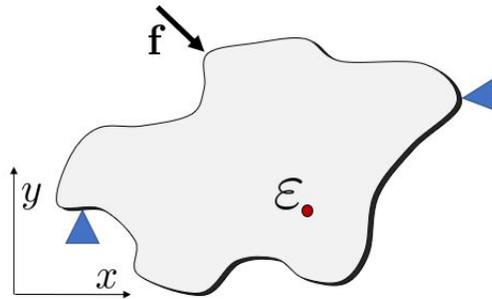
7. En la figura se muestra una sólido elástico, lineal, isótropo, plano y continuo, con una geometría indeterminada en el plano $x-y$, y un pequeño espesor constante. Está sometido a ciertas condiciones de contorno y una carga de módulo variable, pero orientación y sentido constantes.

Se ha podido medir que una fuerza \mathbf{f} genera un desplazamiento en la estructura de δ , ambos vectoriales y no necesariamente paralelos. Al mismo tiempo, se ha medido mediante extensímetros el tensor de deformación ϵ en un punto de la estructura. Este es:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}_X$$

Constantes de Lamé:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



Si el volumen de la estructura es V_s , y asumiendo que la densidad de energía elástica en el punto donde hemos medido ϵ es igual a la media del sólido en su volumen, se pide:

1. Propiedades mecánicas del sólido (λ , μ , E y ν).

Solución

Observando el tensor de tensiones sabemos que sólo tendremos tensiones en la diagonal:

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\epsilon)\mathbf{I} + 2\mu\epsilon \tag{5.42}$$

De la condición de tensión plana sabemos:

$$\sigma_{33} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2\mu\epsilon_{33} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-2\mu\epsilon_{33}}{\text{tr}(\epsilon)} \tag{5.43}$$

Por otro lado, existirá equilibrio entre el trabajo externo de F y la energía elástica acumulada por el sólido.

La energía elástica del sólido será:

$$W_{int} = \frac{V_s}{2} \left(\varepsilon_{11} \left(\frac{-2\mu\varepsilon_{33}}{\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu\varepsilon_{11} \right) + \varepsilon_{22} \left(\frac{-2\mu\varepsilon_{33}}{\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu\varepsilon_{22} \right) \right) \quad (5.44)$$

Simplificando:

$$W_{int} = 2\mu \frac{V_s}{2} (\varepsilon_{11}(-\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}) + \varepsilon_{22}(-\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22})) \quad (5.45)$$

El trabajo externo es:

$$W_{ext} = \frac{\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\delta}}{2} \quad (5.46)$$

Igualando:

$$W_{ext} = W_{int} \quad (5.47)$$

Y despejando:

$$\Rightarrow \mu = \frac{\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\delta}}{2V_s (\varepsilon_{11}(-\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}) + \varepsilon_{22}(-\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}))} \quad (5.48)$$

Con este valor, volvemos a la ecuación 5.43 para obtener λ :

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-2\mu\varepsilon_{33}}{\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})} \quad (5.49)$$

Usando las ecuaciones 5.43 y 5.48, y las definiciones de las constantes de Lamé, podemos calcular las constantes E y ν :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{2\nu}{(1-2\nu)} \quad (5.50)$$

Y despejando ν :

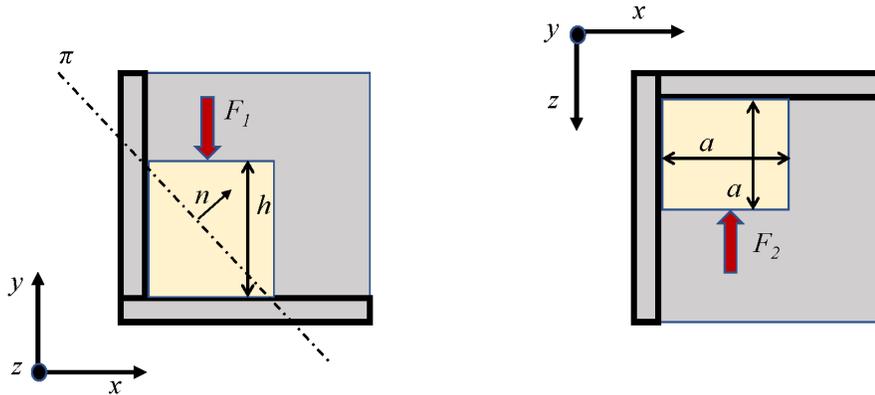
$$\Rightarrow \nu = \frac{\lambda}{\mu} \left(2 + 2\frac{\lambda}{\mu} \right)^{-1} \quad (5.51)$$

Y tras obtener ν , por la definición de μ :

$$\Rightarrow E = 2\mu(1+\nu) \quad (5.52)$$

8. Hay un bloque (amarillo) de base cuadrada (de lado $a = a$ m) y altura $h = h$ m, de un material elástico de propiedades $E = E$ MPa, $\nu = \nu$ y $\alpha = \alpha K^{-1}$, situado en la esquina de una caja (gris) de material indeformable que se puede suponer infinita. Todas las propiedades de los materiales y los tensores asociados a las deformaciones y tensiones se pueden suponer homogéneos.

En la cara superior se le aplica una fuerza de valor $F_1 = F_1$ N y en otra de las caras, hay otra fuerza desconocida, F_2 . Los efectos de las fuerzas se consideran repartidos de forma homogénea en toda la cara de aplicación. Además, existe un incremento de temperatura de $\Delta T = \Delta T^\circ C$.



Se pide (suponer direcciones y sentidos de los vectores según la figura):

- La fuerza F_2 para que no haya deformación en su cara.
- Los tensores de deformaciones y tensiones en los ejes marcados. Las componentes volumétricas de ambos tensores.
- Los tensores de deformaciones y tensiones en los ejes principales y las direcciones principales.
- La componente normal del vector de tracción en el plano π .
- Las lecturas en una roseta de tres galgas, la central a 45 grados de las otras dos (que forman 90° entre sí), situada en el plano π , en el punto medio del sólido cortado por dicho plano y con la galga intermedia alienada con el eje z .

Solución

a) **(a) La fuerza F_2 para que no haya deformación en su cara.**

Los tensores de tensiones y deformaciones son:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Por la simetría del problema (la caja y donde están las fuerzas no permiten cambios angulares) tenemos:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = 0$$

y la configuración de las fuerzas y restricciones tenemos

$$\sigma_{xx} = 0$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{F_1}{a^2}$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{F_2}{ah}$$

Aplicando la condición ε_{zz} a partir de la ley de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_{zz} = 0 = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E} + \alpha\Delta T = -\frac{F_2}{Eah} + \frac{\nu F_1}{Ea^2} + \alpha\Delta T$$

De donde obtenemos:

$$F_2 = \nu F_1 \frac{h}{a} + \alpha Eah\Delta T$$

- b) **Los tensores de deformaciones y tensiones en los ejes marcados. Los componentes volumétricas de ambos tensores.**

Sustituyendo lo sabido en los tensores dados

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu F_1 \frac{h}{a} + \alpha Eah\Delta T}{ah} \end{pmatrix}$$

El valor de σ_H (al no existir componente x) es

$$\sigma_H = \frac{\sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

Falta usar la ley de Hooke generalizada para obtener ε_{xx} y ε_{yy} , que nos da

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu\sigma_{zz}}{E} + \alpha\Delta T$$

donde sustituimos los datos ya obtenidos y obtenemos el tensor

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y así el termino volumétrico ε_V (al no existir componente z) es:

$$\varepsilon_V = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{3}$$

- c) **Los tensores de deformaciones y tensiones en los ejes principales y las direcciones principales.**

Con los datos expresados en el problema los tensores están expresados en los ejes principales (podría haber permutación entre ejes, pero no sale con los datos usados en las versiones)

- d) **La componente normal del vector de tracción al plano π .** Aquí se busca el componente del tensor de tensiones en la dirección \hat{n} . Para ello, calculamos primero el vector tangente al plano, que como va de arista a arista es

$$\hat{v}^T = \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} [-a \ h \ 0]$$

\hat{n} viene dado así por $\hat{n} = \hat{v} \times \hat{z}$ y da

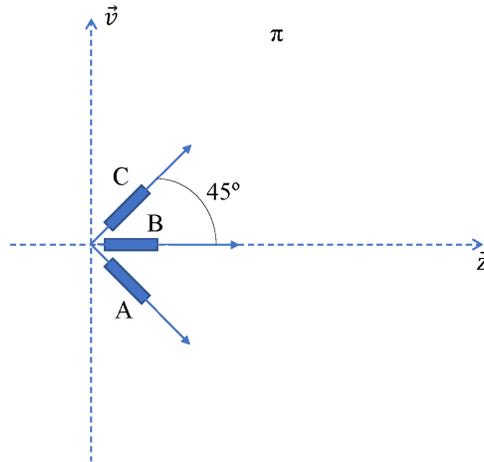
$$\hat{n}^T = \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} [h \ a \ 0]$$

El resultado es así

$$\sigma_{\hat{n}} = \hat{n}^T \sigma \hat{n} = \frac{a^2 \sigma_{yy}}{a^2 + h^2}$$

- e) **Las lecturas en una roseta de tres galgas, la central a 45 grados de las otras dos (que forman 90° entre sí), situada en el plano π , en el punto medio del solido cortado por dicho plano y con la galga intermedia alienada con el eje z.**

la configuración de las galgas en el plano π se puede observar en la siguiente figura



La galga leerá en cada dirección el componente del tensor de deformaciones alineado en esa dirección, calculando los vectores unitarios en cada dirección de la galga tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{n}_C &= \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{v} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z} \\ \hat{n}_B &= \hat{z} \\ \hat{n}_A &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{v} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}\end{aligned}$$

Así obtenemos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_C &= \hat{n}_C^T \boldsymbol{\varepsilon} \hat{n}_C = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 + h^2} (a^2 \varepsilon_{xx} + h^2 \varepsilon_{yy}) \\ \varepsilon_B &= \hat{n}_B^T \boldsymbol{\varepsilon} \hat{n}_B = \hat{z}^T \boldsymbol{\varepsilon} \hat{z} = 0 \\ \varepsilon_A &= \hat{n}_A^T \boldsymbol{\varepsilon} \hat{n}_A = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 + h^2} (a^2 \varepsilon_{xx} + h^2 \varepsilon_{yy}) = \varepsilon_C\end{aligned}$$

En caso que se construyera un círculo de Mohr usando las direcciones \vec{v} y \vec{z} , se llegaría al mismo resultado, ya que las lecturas de A y C corresponden al punto centro de dicho círculo pero hay ciertas restricciones teóricas que habría que considerar con cuidado.

Datos y respuestas correcta del test por versión

Versión	a(m)	h(m)	E (GPa)	ν	α ($10^{-6}K^{-1}$)	F_1 (kN)	$\Delta T(^{\circ}C)$	1	2	3	4	5
1	0,1	0,15	200	0.3	20	2	25	b	a	c	a	d
2	0,1	0,15	70	0,35	20	5	10	c	b	e	a	d
3	0,1	0,15	100	0.25	12	10	20	d	e	a	c	a
4	0,1	0,15	170	0.2	36	30	5	a	a	d	b	c

6. Desplazamientos

6.1	Enunciados de ejercicios de Campo de Desplazamientos	de 129
6.2	Solución de ejercicios de Campo de Desplazamientos	de 134



6.1. Enunciados de ejercicios de Campo de Desplazamientos

1. Dentro de un cuerpo con forma hexaedro de dimensiones $a=0.2$ m en dirección x , $b=1$ m en dirección y (la vertical) y $c=0.3$ m en dirección z , con el origen de coordenadas situado en el centro de la cara superior del cuerpo (plano xz).

Se han registrado las siguientes fuerzas volumétricas:

$$\mathbf{b}_x = -5 \sin\left(\pi \frac{2x}{a}\right) \frac{kN}{m^3}$$

$$\mathbf{b}_y = -10 \sin\left(\pi \frac{y}{2b}\right) \frac{kN}{m^3}$$

$$\mathbf{b}_z = 0 \frac{kN}{m^3}$$

Se acepta comportamiento elástico y que la solución en desplazamientos viene descrito de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_x(x, y, z) = a_1 + a_2 \sin\left(\pi \frac{2x}{a}\right) + a_3 \sin\left(\pi \frac{y}{2b}\right) + a_4 \sin\left(\pi \frac{z}{2c}\right)$$

$$\mathbf{u}_y(x, y, z) = b_1 + b_2 \sin\left(\pi \frac{2x}{a}\right) + b_3 \sin\left(\pi \frac{y}{2b}\right) + b_4 \sin\left(\pi \frac{z}{2c}\right)$$

$$\mathbf{u}_z(x, y, z) = c_1 + c_2 \sin\left(\pi \frac{2x}{a}\right) + c_3 \sin\left(\pi \frac{y}{2b}\right) + c_4 \sin\left(\pi \frac{z}{2c}\right)$$

donde a_i, b_i, c_i son coeficientes a averiguar. Se saben además las siguientes condiciones de contorno:

$$\mathbf{u}_x(0, y, z) = 0$$

$$\mathbf{u}_y(x, 0, z) = 0$$

$$\mathbf{u}_z(x, y, -c) = 0$$

Se pide:

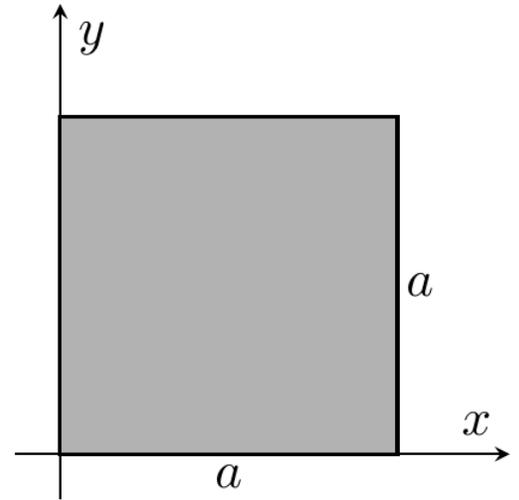
- calcular el campo de desplazamientos que describen esas fuerzas volumétricas.
- Calcular el tensor de deformaciones y tensiones en función de las coordenadas.
- calcular los autovalores y autovectores de los tensores de tensiones y deformaciones en el punto central del hexaedro.

Datos: $E=100$ MPa, $\nu=0.25$

El campo de desplazamientos \mathbf{u} asociado a un ensayo de "cortante simple" se describe de la siguiente manera:

$$2. \quad \begin{aligned} u &= c_1 y \\ v &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

Para el cuadrado de la figura (cuya dimensión perpendicular es muy grande en comparación con las dimensiones del cuadrado a), se pide:



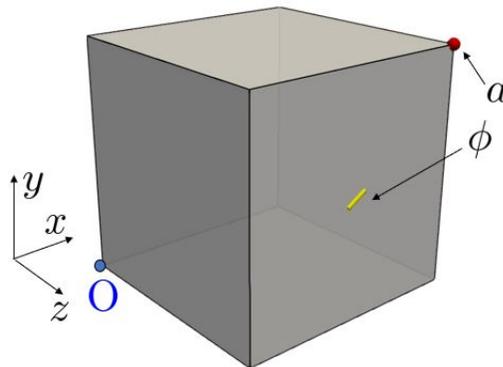
- Calcular el tensor de gradiente de desplazamientos $\nabla \mathbf{u}$ y su parte simétrica $\text{sym}(\nabla \mathbf{u})$ y antisimétrica $\text{skw}(\nabla \mathbf{u})$. Expresarlo en la configuración de referencia de la figura
- Representar gráficamente el estado deformado final
- Hallar las deformaciones y direcciones principales del ensayo. Representar gráficamente estos resultados sobre el estado deformado final

Datos: $a = 10 \text{ mm}$, $c_1 = 0,1$

- En el cubo de la figura no existen cargas puntuales, ni térmicas, ni de superficie, sólo una carga volumétrica \mathbf{f}_v de valor y dirección desconocidos. Lo que se ha podido medir en el cubo es el campo vectorial de desplazamientos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, definido como:

$$u_1 = Cxy/l, \quad u_2 = Cy^2/l, \quad u_3 = Czy/l$$

El material del cubo tiene unas propiedades elásticas lineales, y el cubo una arista l .



Se pide:

- Calcular el tensor de deformación en el punto rojo (a).

- b) Calcular el valor del extensímetro ϕ , localizado en el centro de la cara que se muestra en la figura y que forma un ángulo de 45° con respecto al plano formado por los ejes x y z .
- c) Calcular el vector de fuerzas volumétricas en el centro del cubo, ¿es el mismo en todo el cubo?.
- d) Considerando que la única fuerza volumétrica actuante en el cubo es la gravedad $\mathbf{f}_v = (0, -\rho g, 0)^T$, calcular el valor de la constante C .

4. El vector desplazamiento en el entorno de un punto O de un cuerpo, tiene por componentes:

$$u = 4C_1xy \cdot 10^{-4}$$

$$v = 3C_2xy^2 \cdot 10^{-4}$$

$$w = C_3xz \cdot 10^{-4}$$

$$x, y, z \text{ (m)} \quad C_1 \text{ (m}^{-1}\text{)} \quad C_2 \text{ (m}^{-2}\text{)} \quad C_3 \text{ (m}^{-1}\text{)}$$

- a) Tensores de deformación y giro.
- b) El giro según el eje z , correspondiente a la matriz de giro, en el entorno del punto $P(1, 2, 0)$.
- c) Parte desviadora del tensor de deformación.
- d) Deformaciones principales en el entorno del punto $P(1, 2, 0)$.
- e) Direcciones principales de deformación en el entorno del punto $P(1, 2, 0)$.
- f) Alargamiento del segmento definido por los puntos $O(0, 0, 0)$ y $P(3, 1, 2)$.

5. El paralelepípedo deformable de la figura, está sometido a un campo de desplazamiento \mathbf{u} cuyas componentes respecto al sistema de representación $\mathbf{X} Oxyz$ se indican abajo. Las dimensiones del paralelepípedo, a, b, c corresponden a las direcciones indicadas en la figura.

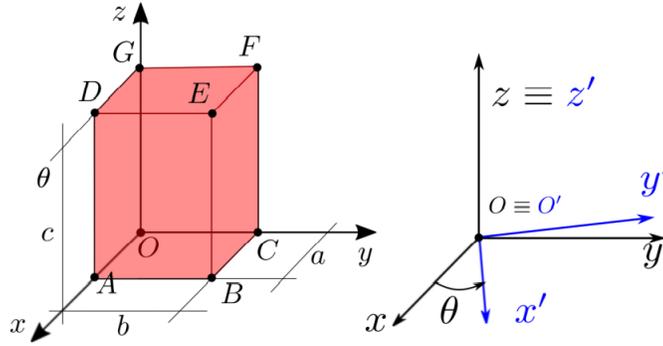
$$\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]_{\mathbf{X}}^T$$

$$u_x = u = c_1 \cdot x$$

$$u_y = v = 2c_2 \cdot x + c_3 \cdot y$$

$$u_z = w = c_4 \cdot z$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \text{ctes } x, y, z \text{ (m)} ; u, v, w \text{ (m)};$$



Datos: $a = 1 \text{ m}$; $b = 1,5 \text{ m}$; $c = 1 \text{ m}$ $c_1 = 2 \times 10^{-3}$; $c_2 = 1,5 \times 10^{-3}$; $c_3 = 2 \times 10^{-3}$; $c_4 = 0$
 $\theta = 60^\circ$

- Determinar el tensor de deformaciones cuyas coordenadas se referirán al sistema de representación \mathbf{X} ($Oxyz$) ($m\epsilon$).
 - Determinar la parte volumétrica del tensor en el sistema de representación \mathbf{X}' ($O'x'y'z'$) ($m\epsilon$).
 - Variación de longitud del segmento AB expresada en mm .
 - Variación del ángulo formado entre las aristas OA y OF (mrad).
 - Determinar el tensor de deformaciones infinitesimal en el sistema de representación \mathbf{X}' ($O'x'y'z'$). El sistema \mathbf{X}' ($O'x'y'z'$) se obtiene mediante una rotación de ángulo θ del sistema \mathbf{X} ($Oxyz$) ($m\epsilon$).
6. El campo de desplazamientos en el entorno de un punto 0 tiene las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} u &= (ax + by + cz) \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ v &= (dx + fy + gz) \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ w &= (hx + iy + jz) \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

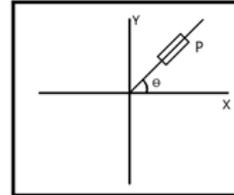
- Componentes de la primera fila del tensor de deformaciones ($\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}$) (ϵ).
 - Componentes del tensor de rotación (rad).
 - Incremento unitario de volumen $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$ (ϵ).
 - Alargamiento del segmento definido por los puntos O (0,0,0) y P (r,s,t) (mm).
7. El vector desplazamiento en el entorno de un punto O de un cuerpo tiene las componentes (x, y, z en m)

$$\begin{aligned} u &= (Axy + Bxz) \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ v &= (Cyx + Dyz) \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ w &= (Fzx + Hzy) \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

Datos: A=0; B=20; C=0; D=10; F=0; H=30

- a) El alargamiento del segmento OP ($O = (0, 0, 0)$ $P = (1, 0, 1)$). (mm)
- b) El elemento situado en la fila 1 y en la columna 1 de la parte desviadora del tensor de deformaciones en el entorno del punto $P = (1, 0, 1)$ (ε)
- c) En el centro de una placa cuadrada de pequeño espesor se adhiere una galga (banda extensométrica) como se indica en la figura. Si sobre dicha placa se realiza un ensayo se obtiene el tensor de deformaciones adjunto:

$$[\varepsilon]_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 75 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}} \cdot 10^{-4}$$



Calcular la lectura de la galga (banda extensométrica) situada en el punto P sabiendo que el punto P está situado a $\theta = 30^\circ$ del eje x . ($\mu\varepsilon$)

6.2. Solución de ejercicios de Campo de Desplazamientos

1. Dentro de un cuerpo con forma hexaedro de dimensiones $a=0.2$ m en dirección x , $b=1$ m en dirección y (la vertical) y $c=0.3$ m en dirección z , con el origen de coordenadas situado en el centro de la cara superior del cuerpo (plano xz).

Se han registrado las siguientes fuerzas volumétricas:

$$\mathbf{b}_x = -5 \sin\left(\pi \frac{2x}{a}\right) \frac{kN}{m^3}$$

$$\mathbf{b}_y = -10 \sin\left(\pi \frac{y}{2b}\right) \frac{kN}{m^3}$$

$$\mathbf{b}_z = 0 \frac{kN}{m^3}$$

Se acepta comportamiento elástico y que la solución en desplazamientos viene descrito de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_x(x, y, z) = a_1 + a_2 \sin\left(\pi \frac{2x}{a}\right) + a_3 \sin\left(\pi \frac{y}{2b}\right) + a_4 \sin\left(\pi \frac{z}{2c}\right)$$

$$\mathbf{u}_y(x, y, z) = b_1 + b_2 \sin\left(\pi \frac{2x}{a}\right) + b_3 \sin\left(\pi \frac{y}{2b}\right) + b_4 \sin\left(\pi \frac{z}{2c}\right)$$

$$\mathbf{u}_z(x, y, z) = c_1 + c_2 \sin\left(\pi \frac{2x}{a}\right) + c_3 \sin\left(\pi \frac{y}{2b}\right) + c_4 \sin\left(\pi \frac{z}{2c}\right)$$

donde a_i, b_i, c_i son coeficientes a averiguar. Se saben además las siguientes condiciones de contorno:

$$\mathbf{u}_x(0, y, z) = 0$$

$$\mathbf{u}_y(x, 0, z) = 0$$

$$\mathbf{u}_z(x, y, -c) = 0$$

Se pide:

- calcular el campo de desplazamientos que describen esas fuerzas volumétricas.
- Calcular el tensor de deformaciones y tensiones en función de las coordenadas.
- calcular los autovalores y autovectores de los tensores de tensiones y deformaciones en el punto central del hexaedro.

Datos: $E=100$ MPa, $\nu=0.25$

Solución

Las ecuaciones de Navier para la elasticidad de forma explícita vienen dadas por:

$$(G + \lambda) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial z \partial x} \right) + G \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial z^2} \right) + \mathbf{b}_x = 0$$

$$(G + \lambda) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial z \partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_y}{\partial z^2} \right) + \mathbf{b}_y = 0$$

$$(G + \lambda) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial z^2} \right) + G \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial z^2} \right) + \mathbf{b}_z = 0$$

donde

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 40 \text{ MPa}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = 40 \text{ MPa}$$

sustituyendo las fuerzas volumétricas, los campos de solución de desplazamientos que se da en el enunciado y haciendo las derivadas parciales, llegamos a los siguientes resultados:

$$a_2 = \frac{-5a^2}{4\pi^2(\lambda + 2G)} = -42,2 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$$

$$b_3 = \frac{-40b^2}{\pi^2(\lambda + 2G)} = -33,77 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

$$a_3 = a_4 = b_2 = b_4 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

Nos falta averiguar a_1 , b_1 y c_1 , que se obtienen de aplicar las condiciones de contorno, siendo nulos.

Así los campos de desplazamiento solución que se ajustan a la forma dada y las fuerzas volumétricas, son:

$$\mathbf{u}_x(x, y, z) = \frac{-5a^2}{4\pi^2(\lambda + 2G)} \sin\left(\pi \frac{2x}{a}\right) = -42,2 \cdot 10^{-6} \sin\left(\pi \frac{2x}{a}\right) \text{ mm}$$

$$\mathbf{u}_y(x, y, z) = \frac{-40b^2}{\pi^2(\lambda + 2G)} \sin\left(\pi \frac{y}{2b}\right) = -33,77 \cdot 10^{-3} \sin\left(\pi \frac{y}{2b}\right) \text{ mm}$$

$$\mathbf{u}_z(x, y, z) = 0$$

las deformaciones se pueden calcular a partir de las expresiones obtenidas para los campos de desplazamientos, así:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial x} = \frac{-5a}{2\pi(\lambda + 2G)} \cos\left(\pi \frac{2x}{a}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial y} = \frac{-20b}{\pi(\lambda + 2G)} \cos\left(\pi \frac{y}{2b}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

Siendo pues el tensor de deformación

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{-5a}{2\pi(\lambda+2G)} \cos(\pi \frac{2x}{a}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-20b}{\pi(\lambda+2G)} \cos(\pi \frac{y}{2b}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

El campo de tensiones se puede obtener a partir de las ecuaciones de Lamé, así:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = \frac{\mathbf{u}_x}{x} = \frac{-5a}{2\pi} \cos(\pi \frac{2x}{a}) - \frac{20b\lambda}{\pi(\lambda+2G)} \cos(\pi \frac{y}{2b}) \\ \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = \frac{\mathbf{u}_y}{y} = \frac{-5a\lambda}{2\pi(\lambda-2G)} \cos(\pi \frac{2x}{a}) + \frac{20b}{\pi} \cos(\pi \frac{y}{2b}) \\ \sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = \frac{-\lambda}{(\lambda+2G)\pi} \left(\frac{5a}{2} \cos(\pi \frac{2x}{a}) + 20b \cos(\pi \frac{y}{2b}) \right) \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \end{aligned}$$

Siendo pues el tensor de tensiones:

$$[\sigma]_{\mathbf{X}} = - \begin{bmatrix} \frac{5a}{2\pi} A + \frac{20b\lambda}{\pi(\lambda+2G)} B & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5a\lambda}{2\pi(\lambda+2G)} A + \frac{20b}{\pi} B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{(\lambda+2G)\pi} \left(\frac{5a}{2} A + 20b B \right) \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

$$A = \cos(\pi \frac{2x}{a})$$

$$B = \cos(\pi \frac{y}{2b})$$

Para el punto central del cubo, sustituyendo las coordenadas, tenemos

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}}(0, -\frac{b}{2}, 0) = - \begin{bmatrix} \frac{5a}{2\pi(\lambda+2G)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20b\sqrt{2}}{2\pi(\lambda+2G)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = - \begin{bmatrix} 1,33 & 0 & 0 \\ 0 & 37,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} (\mu\varepsilon)$$

$$[\sigma]_{\mathbf{X}}(0, -\frac{b}{2}, 0) = - \begin{bmatrix} \frac{5a}{2\pi} + \frac{20b\sqrt{2}\lambda}{2\pi(\lambda+2G)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5a\lambda}{2\pi(\lambda+2G)} + \frac{10\sqrt{2}b}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{(\lambda+2G)\pi} \left(\frac{5a}{2} + 10\sqrt{2}b \right) \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

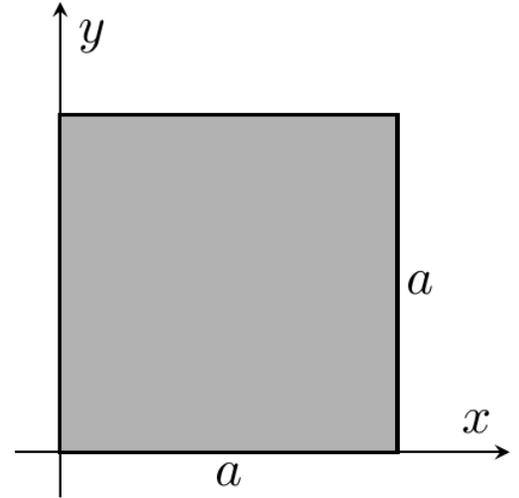
$$[\sigma]_{\mathbf{X}}(0, -\frac{b}{2}, 0) = - \begin{bmatrix} 1,66 & 0 & 0 \\ 0 & 4,55 & 0 \\ 0 & 0 & 1,55 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \cdot 10^{-3} \text{ (MPa)}$$

Al ser los tensores diagonales, sus valores en la diagonal ordenados son los autovalores y los autovectores son los vectores de la base \mathbf{X} ordenados de la misma forma.

El campo de desplazamientos \mathbf{u} asociado a un ensayo de "cortante simple" se describe de la siguiente manera:

2.
$$\begin{aligned} u &= c_1 y \\ v &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

Para el cuadrado de la figura (cuya dimensión perpendicular es muy grande en comparación con las dimensiones del cuadrado a), se pide:



- Calcular el tensor de gradiente de desplazamientos $\nabla \mathbf{u}$ y su parte simétrica $\text{sym}(\nabla \mathbf{u})$ y antisimétrica $\text{skw}(\nabla \mathbf{u})$. Expresarlo en la configuración de referencia de la figura
- Representar gráficamente el estado deformado final
- Hallar las deformaciones y direcciones principales del ensayo. Representar gráficamente estos resultados sobre el estado deformado final

Datos: $a = 10 \text{ mm}$, $c_1 = 0,1$

Solución

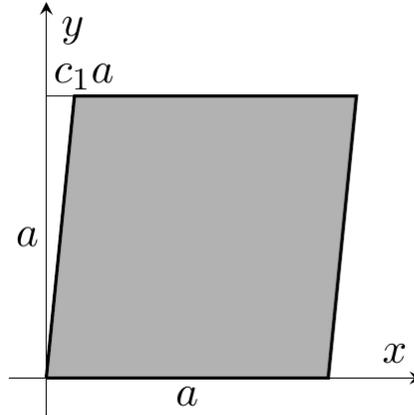
- El tensor de gradiente de desplazamientos, su parte simétrica y antisimétrica, son

$$[\nabla \mathbf{u}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

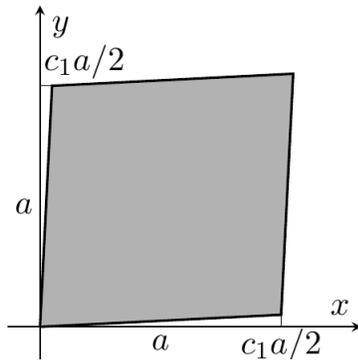
$$[\text{sym}(\nabla \mathbf{u})]_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \begin{bmatrix} 0 & c_1/2 & 0 \\ c_1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

$$[\text{skw}(\nabla \mathbf{u})]_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T) = \begin{bmatrix} 0 & c_1/2 & 0 \\ -c_1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

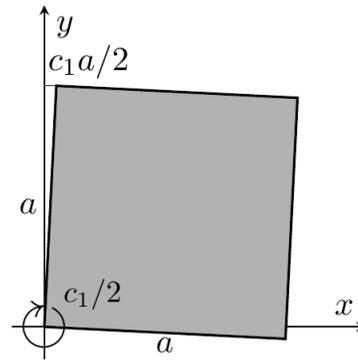
- El estado deformado final, correspondiente a un cortante simple, es el siguiente



Este estado es la composición de un cortante puro (distorsión angular de $c_1/2$ en todas las caras del cuadrado) y un giro de $-c_1/2$ como sólido rígido alrededor del eje z (sentido horario).



(a)



(b)

La figura (a), de cortante puro, es la representación de la parte simétrica del tensor de gradiente de desplazamientos (i.e. el tensor de deformaciones infinitesimales):

$$[\text{sym}(\nabla \mathbf{u})]_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \begin{bmatrix} 0 & c_1/2 & 0 \\ c_1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

Los términos (1,2) y (2,1) representan esta distorsión angular de $c_1/2$. Asimismo, la figura (b) es la representación de la parte antisimétrica del tensor de gradiente de desplazamientos:

$$[\text{skw}(\nabla \mathbf{u})]_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T) = \begin{bmatrix} 0 & c_1/2 & 0 \\ -c_1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

Como se vio en teoría, todo tensor antisimétrico $\mathbf{\Omega}$ tiene asociado un vector $\boldsymbol{\omega}$ tal que

$$\mathbf{\Omega} \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$$

De forma genérica,

$$[\mathbf{\Omega}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ -\omega_{xz} & -\omega_{yz} & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -\omega_{yz} \\ \omega_{xz} \\ -\omega_{xy} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

Por lo que se demuestra que el vector $\boldsymbol{\omega}$ obtenido de $\text{skw}(\nabla \mathbf{u})$ es un giro de $-c_1/2$ alrededor del eje z –tal y como se había obtenido gráficamente.

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_1/2 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

c) La ecuación característica se obtiene de imponer $|\varepsilon - \lambda \mathbf{I}| = 0$,

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon^3 + \varepsilon \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 &= 0; \\ \varepsilon \left[\varepsilon^2 - \left(\frac{c_1}{2}\right)^2\right] &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varepsilon &= 0, \\ \varepsilon &= \pm \frac{c_1}{2} \end{aligned}$$

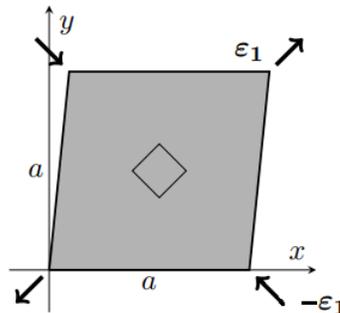
Así,

$$\varepsilon_1 = c_1/2, \quad [\mathbf{n}_1]_{\mathbf{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

$$\varepsilon_2 = 0, \quad [\mathbf{n}_2]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 = -c_1/2, \quad [\mathbf{n}_3]_{\mathbf{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

La representación gráfica de las deformaciones principales es

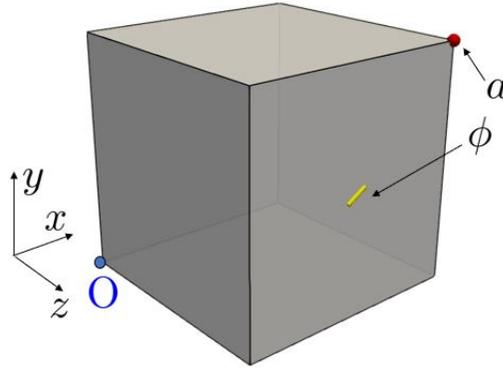


En la figura puede interpretarse cómo generar un estado de cortante a partir de una sollicitación biaxial

3. En el cubo de la figura no existen cargas puntuales, ni térmicas, ni de superficie, sólo una carga volumétrica \mathbf{f}_v de valor y dirección desconocidos. Lo que se ha podido medir en el cubo es el campo vectorial de desplazamientos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, definido como:

$$u_1 = Cxy/l, \quad u_2 = Cy^2/l, \quad u_3 = Czy/l$$

El material del cubo tiene unas propiedades elásticas lineales, y el cubo una arista l .



Se pide:

- Calcular el tensor de deformación en el punto rojo (a).
- Calcular el valor del extensímetro ϕ , localizado en el centro de la cara que se muestra en la figura y que forma un ángulo de 45° con respecto al plano formado por los ejes x y z .
- Calcular el vector de fuerzas volumétricas en el centro del cubo, ¿es el mismo en todo el cubo?.
- Considerando que la única fuerza volumétrica actuante en el cubo es la gravedad $\mathbf{f}_v = (0, -\rho g, 0)^T$, calcular el valor de la constante C .

Solución

El primer paso es calcular el tensor de deformación $[\varepsilon]_{\mathbf{x}}$ para un punto genérico del cubo:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.1)$$

Con esto tenemos:

$$[\varepsilon]_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} Cy/l & Cx/(2l) & 0 \\ Cx/(2l) & 2Cy/l & Cz/(2l) \\ 0 & Cz/(2l) & Cy/l \end{bmatrix}_{\mathbf{x}} \quad (6.2)$$

Y puesto que el punto a tiene coordenadas (l, l, l) , particularizamos el tensor de deformación:

$$\Rightarrow [\varepsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} C & C/2 & 0 \\ C/2 & 2C & C/2 \\ 0 & C/2 & C \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (6.3)$$

La galga extensométrica tiene coordenadas $(l/2, l/2, l)$, por lo que el tensor de deformación en ese punto será:

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} C/2 & C/4 & 0 \\ C/4 & C & C/2 \\ 0 & C/2 & C/2 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (6.4)$$

El vector longitudinal del extensómetro es $\mathbf{n} = (\cos(45), \sin(45), 0)^T$ ($\mathbf{n} = (\sqrt{0,5}, \sqrt{0,5}, 0)^T$) y para calcular el valor de la deformación en la dirección:

$$\Rightarrow \varepsilon_{\phi} = [\mathbf{n}]_{\mathbf{X}}^T \cdot [\varepsilon]_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{n}]_{\mathbf{X}} = C \quad (6.5)$$

Para calcular las fuerzas volumétricas tenemos que calcular el tensor de tensiones de forma genérica partiendo de la definición del tensor de deformaciones de 6.2, ambos con los ejes \mathbf{X} , como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.6)$$

Puesto que la relación entre el tensor de tensiones y el de fuerzas volumétricas es:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = 0 \quad (6.7)$$

Y,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\nabla \cdot \mathbf{I} + 2\mu\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.8)$$

Donde $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 4Cy/l$, con lo que tenemos:

$$\lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\nabla \cdot \mathbf{I} = (0, 4\lambda C/l, 0)^T \quad (6.9)$$

Y $\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ será:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = (0, 3C/l, 0)^T \quad (6.10)$$

Por lo que:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = (0, 4\lambda C/l, 0)^T + 2\mu(0, 3C/l, 0)^T = -\mathbf{f}_v \quad (6.11)$$

Y,

$$\Rightarrow \mathbf{f}_v = (0, -4\lambda C/l - 6\mu C/l, 0)^T \quad (6.12)$$

Las fuerzas volumétricas son constantes en todo el cubo. Si consideramos que $\mathbf{f}_v = (0, -\rho g, 0)^T$, tenemos:

$$\mathbf{f}_v = (0, -\rho g, 0)^T = (0, -4\lambda C/l - 6\mu C/l, 0)^T \quad (6.13)$$

E igualando,

$$-\rho g = -4\lambda C/l - 6\mu C/l \quad (6.14)$$

$$\Rightarrow C = \frac{\rho g l}{4\lambda + 6\mu} \quad (6.15)$$

4. El vector desplazamiento en el entorno de un punto O de un cuerpo, tiene por componentes:

$$u = 4C_1xy \cdot 10^{-4}$$

$$v = 3C_2xy^2 \cdot 10^{-4}$$

$$w = C_3xz \cdot 10^{-4}$$

$$x, y, z \text{ (m)} \quad C_1 \text{ (m}^{-1}\text{)} \quad C_2 \text{ (m}^{-2}\text{)} \quad C_3 \text{ (m}^{-1}\text{)}$$

- Tensores de deformación y giro.
- El giro según el eje z , correspondiente a la matriz de giro, en el entorno del punto $P(1, 2, 0)$.
- Parte desviadora del tensor de deformación.
- Deformaciones principales en el entorno del punto $P(1, 2, 0)$.
- Direcciones principales de deformación en el entorno del punto $P(1, 2, 0)$.
- Alargamiento del segmento definido por los puntos $O(0, 0, 0)$ y $P(3, 1, 2)$.

Solución

- a) **Tensores de deformación y giro.**

Calculamos las componentes del tensor de deformación a partir de su relaciones cinemáticas con los desplazamientos.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 4C_1y \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 6C_2xy \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = C_3x \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (4C_1x + 3C_2y^2) \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} C_3z \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

Finalmente, el tensor de deformación será

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 4C_1y & \frac{1}{2}(4C_1x + 3C_2y^2) & \frac{1}{2}C_3z \\ \frac{1}{2}(4C_1x + 3C_2y^2) & 6C_2xy & 0 \\ \frac{1}{2}C_3z & 0 & C_3x \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} \quad (\varepsilon)$$

Calculamos las componentes del tensor de giro.

$$\omega_{xx} = 0$$

$$\omega_{yy} = 0$$

$$\omega_{zz} = 0$$

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\omega_{yx} = \frac{1}{2} (4C_1x - 3C_2y^2) \cdot 10^{-4}$$

$$\omega_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\omega_{zx} = \frac{1}{2} (-C_3z) \cdot 10^{-4}$$

$$\omega_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\omega_{zy} = 0$$

Finalmente, el tensor de giro será

$$[\mathbf{\Omega}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(4C_1x - 3C_2y^2) & -\frac{1}{2}C_3z \\ \frac{1}{2}(-4C_1x + 3C_2y^2) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(C_3z) & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} \text{ (rad)}$$

b) **El giro según el eje z, correspondiente a la matriz de giro, en el entorno del punto $P(1, 2, 0)$ ($C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 1$).**

El giro respecto al eje Z se obtiene de sustituir las coordenadas del punto en la componente ω_{yx} de la matriz de giro

$$\omega_{yx} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (-4C_1x + 3C_2y^2) \cdot 10^{-4}$$

$$\omega_{yx} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ (rad)}$$

c) **Parte desviadora del tensor de deformación.**

El tensor de deformación se puede descomponer en la parte volumétrica (V) y la parte desviadora:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{\mathbf{X}} = [\boldsymbol{\varepsilon}^V]_{\mathbf{X}} + [\boldsymbol{\varepsilon}^D]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} \text{ } (\boldsymbol{\varepsilon})$$

El tensor de deformación volumétrico se obtendría:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^V]_{\mathbf{X}} = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})}{3} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} \text{ } (\boldsymbol{\varepsilon})$$

El tensor de deformación desviador se obtendría:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^D]_{\mathbf{X}} = [\boldsymbol{\varepsilon}]_{\mathbf{X}} - [\boldsymbol{\varepsilon}^V]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} \text{ } (\boldsymbol{\varepsilon})$$

- d) **Deformaciones principales en el entorno del punto $P(1,2,0)$**
 ($C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 1$).

Las deformaciones principales son los autovalores del tensor de deformación en el entorno del punto $P(1,2,0)$ ordenados de mayor a menor:

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} \quad (\varepsilon)$$

$$|\varepsilon - \varepsilon \delta_{ij}|_{\mathbf{X}} = \begin{vmatrix} 8 - \varepsilon & 8 & 0 \\ 8 & 12 - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \varepsilon \end{vmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} \quad (\varepsilon)$$

Las direcciones principales serán para el punto P:

$$\varepsilon_1 = 18,24 \cdot 10^{-4} \quad (\varepsilon) > \varepsilon_2 = 1,754 \cdot 10^{-4} \quad (\varepsilon) > \varepsilon_3 = 1 \cdot 10^{-4} \quad (\varepsilon)$$

- e) **Direcciones principales de deformación en el entorno del punto $P(1,2,0)$**
 ($C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 1$).

La dirección principal de deformación está asociada a cada deformación principal (autovectores).

$$\varepsilon_1 = 18,24 \cdot 10^{-4} \quad (\varepsilon)$$

$$[\varepsilon - \varepsilon_1 \delta_{ij}]_{\mathbf{X}} = \begin{vmatrix} 8 - \varepsilon_1 & 8 & 0 \\ 8 & 12 - \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \varepsilon_1 \end{vmatrix}_{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} n_I^1 \\ n_{II}^1 \\ n_{III}^1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

La dirección obtenida será:

$$\begin{bmatrix} n_I^1 \\ n_{II}^1 \\ n_{III}^1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0,7813 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

Toda dirección asociada a una dirección principal será unitaria. Por tanto, dicho vector será dividido por la norma del mismo:

$$\begin{bmatrix} n_I^1 \\ n_{II}^1 \\ n_{III}^1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0,6157 \\ 0,7880 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

Realizando un razonamiento idéntico para las otras dos direcciones asociadas a las direcciones principales, los valores obtenidos serán: (Nota: Las direcciones deben cumplir que sean perpendiculares entre sí)

$$\varepsilon_2 = 1,754 \cdot 10^{-4} \quad (\varepsilon) \quad \begin{bmatrix} n_I^2 \\ n_{II}^2 \\ n_{III}^2 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -0,7880 \\ 0,6157 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

$$\varepsilon_3 = 1 \cdot 10^{-4} \quad (\varepsilon) \quad \begin{bmatrix} n_I^3 \\ n_{II}^3 \\ n_{III}^3 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}}$$

f) **Alargamiento del segmento definido por los puntos $O(0,0,0)$ y $P(3,1,2)$ ($C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 1$).**

1.- Sustituir los puntos O y P en el campo de desplazamientos.

$$\mathbf{u}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_X (m) \quad \mathbf{u}_P = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}_X \cdot 10^{-4} (m)$$

2.- Calcular la normal unitaria en la dirección del alargamiento:

$$\mathbf{n}_{OP} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_X$$

3.- El alargamiento será:

$$\Delta L_{OP} = [\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_O]^T \mathbf{n}_{OP} = 15,339 \cdot 10^{-4} (m)$$

5. El paralelepípedo deformable de la figura, está sometido a un campo de desplazamiento \mathbf{u} cuyas componentes respecto al sistema de representación \mathbf{X} Oxyz se indican abajo. Las dimensiones del paralelepípedo, a,b,c corresponden a las direcciones indicadas en la figura.

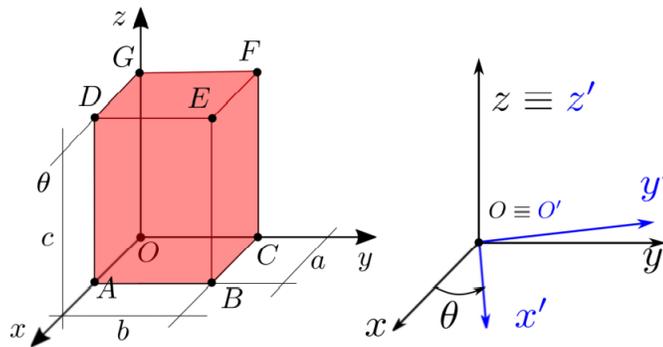
$$\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]_{\mathbf{X}}^T$$

$$u_x = u = c_1 \cdot x$$

$$u_y = v = 2c_2 \cdot x + c_3 \cdot y$$

$$u_z = w = c_4 \cdot z$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c \text{ es } x, y, z \text{ (m)} ; u, v, w \text{ (m)};$$



Datos: $a = 1 \text{ m}; b = 1,5 \text{ m}; c = 1 \text{ m}$ $c_1 = 2 \times 10^{-3}; c_2 = 1,5 \times 10^{-3}; c_3 = 2 \times 10^{-3}; c_4 = 0$
 $\theta = 60^\circ$

- Determinar el tensor de deformaciones cuyas coordenadas se referirán al sistema de representación \mathbf{X} (Oxyz) ($m\epsilon$).
- Determinar la parte volumétrica del tensor en el sistema de representación \mathbf{X}' (O'x'y'z') ($m\epsilon$).
- Variación de la longitud del segmento AB expresada en mm.
- Variación del ángulo formado entre las aristas OA y OF (mrad).
- Determinar el tensor de deformaciones infinitesimal en el sistema de representación \mathbf{X}' (O'x'y'z'). El sistema \mathbf{X}' (O'x'y'z') se obtiene mediante una rotación de ángulo θ del sistema \mathbf{X} (Oxyz) ($m\epsilon$).

Solución

- Determinar el tensor de deformaciones cuyas coordenadas se referirán al sistema de representación XOxyz ($m\epsilon$).**
 Para los datos antes mencionados:

$$u_x = u = (2 \cdot x) \times 10^{-3}$$

$$u_y = v = (3 \cdot x + 2 \cdot y) \times 10^{-3}$$

$$u_z = w = 0$$

siendo las componentes del tensor de deformaciones,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \times 10^{-3} = 2 \text{ m}\varepsilon$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \times 10^{-3} = 2 \text{ m}\varepsilon$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ m}\varepsilon$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{3}{2} \times 10^{-3} = \frac{3}{2} \text{ m}\varepsilon$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \text{ m}\varepsilon$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \text{ m}\varepsilon$$

- b) **Determinar la parte volumétrica del tensor en el sistema de representación $X'O'x'y'z'$ ($\text{m}\varepsilon$).**

Las coordenadas de la parte volumétrica con invariantes frente a las rotaciones, por tanto son las mismas para \mathbf{X} y para \mathbf{X}'

$$[\varepsilon^x] = \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon)[\mathbf{I}] = \frac{1}{3}(2+2+0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad (\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1,33 & 0 & 0 \\ 8 & 1,33 & 0 \\ 0 & 0 & 1,33 \end{bmatrix} \text{ m}\varepsilon$$

- c) **Variación de longitud del segmento AB expresada en mm.**

$$[\mathbf{AB}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (\text{m}) \quad [\mathbf{n}_{AB}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (\text{m})$$

$$[\varepsilon_{AB}] = n_{AB} \cdot (\varepsilon n_{AB}) = 2 \text{ m}\varepsilon$$

$$[\Delta l_{AB}] = \varepsilon_{AB} \cdot l_{AB} = 1,5 \cdot 2 \times 10^{-3} \text{ m} = 3 \text{ mm}$$

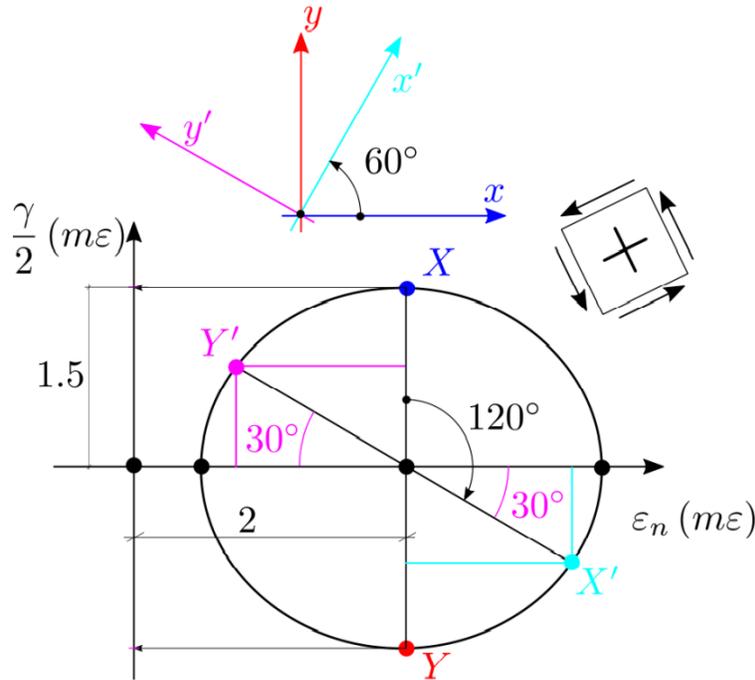
- d) **Variación del ángulo formado entre las aristas OA y OF (mrad).**

$$[\mathbf{OA}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (\text{m}) \quad [\mathbf{OF}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (\text{m})$$

$$n_{[OA]_X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_X \quad (m) \quad n_{[OF]_X} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} + 1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix}_X \quad (m)$$

$$\gamma_{OA,OF} = 2n_{OA} \cdot (\varepsilon n_{OF}) = \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 1,5}{\sqrt{\frac{13}{4}}} \times 10^{-3} \text{ rad} = 2,5 \text{ mrad}$$

- e) **Determinar el tensor de deformaciones infinitesimal en el sistema de representación $X'O'x'y'z'$. El sistema $X'O'x'y'z'$ se obtiene mediante una rotación de ángulo θ del sistema $XOxyz$ ($m\varepsilon$).**
 Puesto que $\varepsilon_{xz}=0$ y $\varepsilon_{yz}=0$, la dirección z es principal. Esto permite resolver el problema de la rotación entorno al eje z (que hemos dicho que es una dirección principal) con el círculo de Mohr del plano x - y .



Por tanto, el centro del círculo de Mohr $\sigma_c = \varepsilon_x = \varepsilon_y = 2 \text{ m}\varepsilon$, y el radio $R_c = \varepsilon_{xy} = 1,5 \varepsilon_{xy} = 1,5 \text{ m}\varepsilon$

$$\varepsilon_{x'} = \sigma_c + R_c \cdot \cos(30^\circ) = (2 + 1,5 \cdot \cos(30^\circ)) \text{ m}\varepsilon = 3,30 \text{ mrad}$$

$$\varepsilon_{y'} = \sigma_c - R_c \cdot \cos(30^\circ) = (2 - 1,5 \cdot \cos(30^\circ)) \text{ m}\varepsilon = 0,70 \text{ mrad}$$

$$\varepsilon_{z'} = 0 \text{ mrad}$$

$$\varepsilon_{y'} = R_c \cdot \sin(30^\circ) = 1,5 \cdot \sin(30^\circ) \text{ m}\varepsilon = -0,75 \text{ mrad}$$

$$\varepsilon_{x'z'} = 0 \text{ mrad}$$

$$\varepsilon_{y'z'} = 0 \text{ mrad}$$

6. El campo de desplazamientos en el entorno de un punto 0 tiene las siguientes componentes:

$$u = (ax + by + cz) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$v = (dx + fy + gz) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$w = (hx + iy + jz) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

- Componentes de la primera fila del tensor de deformaciones $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz})(\varepsilon)$.
- Componentes del tensor de rotación (rad).
- Incremento unitario de volumen $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)(\varepsilon)$.
- Alargamiento del segmento definido por los puntos O (0,0,0) y P (r,s,t) (mm).

Solución

- a) **Componentes de la primera fila del tensor de deformaciones $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz})(\varepsilon)$.**

Calculamos las componentes de la primera fila del tensor de deformaciones se obtienen derivando el campo de desplazamientos a partir de las relaciones cinemáticas,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = a \cdot 10^{-3} \quad (\varepsilon)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{b+d}{2} \cdot 10^{-3} \quad (\varepsilon)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{c+h}{2} \cdot 10^{-3} \quad (\varepsilon)$$

- b) **Componentes del tensor de rotación (rad).**

El tensor de giro se obtiene derivando el campo de desplazamientos a partir de las relaciones cinemáticas:

$$\omega_{xx} = 0 \quad \omega_{yy} = 0 \quad \omega_{zz} = 0$$

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{b-d}{2} \cdot 10^{-3} \quad (rad) \quad \omega_{yx} = -\omega_{xy}$$

$$\omega_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{c-h}{2} \cdot 10^{-3} \quad (rad) \quad \omega_{zx} = -\omega_{xz}$$

$$\omega_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{g-i}{2} \cdot 10^{-3} \quad (rad) \quad \omega_{zy} = -\omega_{yz}$$

Por tanto, el tensor de rotación será:

$$[\mathbf{\Omega}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \omega_{xx} & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & \omega_{yy} & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & \omega_{zz} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b-d}{2} & \frac{c-h}{2} \\ \frac{d-b}{2} & 0 & \frac{g-i}{2} \\ \frac{h-c}{2} & \frac{i-g}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (rad)$$

c) **Incremento unitario de volumen** $\left(\frac{\Delta V}{V}\right) (\varepsilon)$

El incremento unitario de volumen es la traza del tensor de deformación.

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (a + f + j) \cdot 10^{-3} (\varepsilon)$$

d) **Alargamiento del segmento definido por los puntos O (0,0,0) y P (r,s,t).** (mm)

P1.- Vector unitario en la dirección OP. El punto O está en el origen mientras que el punto P tiene las coordenadas (r,s,t) m.

$$\bar{\mathbf{n}}^{\text{alargamiento}} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$\|\bar{\mathbf{n}}\|^{\text{alargamiento}} = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}$$

$$\frac{\bar{\mathbf{n}}^{\text{alargamiento}}}{\|\bar{\mathbf{n}}\|^{\text{alargamiento}}} = \begin{bmatrix} \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2 + t^2}} \\ \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2 + t^2}} \\ \frac{t}{\sqrt{r^2 + s^2 + t^2}} \end{bmatrix}$$

P2.- Calculamos el campo de desplazamientos para el punto O y el punto P.

$$\bar{\mathbf{u}}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (m)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_P = \begin{bmatrix} a \cdot r + b \cdot s + c \cdot t \\ d \cdot r + f \cdot s + g \cdot t \\ h \cdot r + i \cdot s + j \cdot t \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} (m)$$

P3.- Determinar el alargamiento OP.

$$\Delta L_{OP} = (\bar{\mathbf{u}}_P - \bar{\mathbf{u}}_O)^T \cdot \frac{\bar{\mathbf{n}}^{\text{alargamiento}}}{\|\bar{\mathbf{n}}\|^{\text{alargamiento}}}$$

$$\Delta L_{OP} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 + t^2}} [(a \cdot r + b \cdot s + c \cdot t)r + (d \cdot r + f \cdot s + g \cdot t)s + (h \cdot r + i \cdot s + j \cdot t)t] (mm)$$

Resultados de las versiones

Versión	a	b	c	d	f	g	h	i	j	r	s	t
V1	2	2	0	0	3	7	2	0	5	1	1	1
V2	4	0	8	9	3	0	0	7	2	1	1	0
V3	7	5	0	0	8	2	6	0	3	0	1	1
V4	3	0	5	7	4	0	0	9	6	1	0	1

Cuadro 6.1: Parámetros de cada versión

Versión	$\varepsilon_{xx}(\varepsilon)$	$\varepsilon_{xy}(\varepsilon)$	$\varepsilon_{xz}(\varepsilon)$	$[\Omega]_X$ (rad)	$\frac{\Delta V}{V}(\varepsilon)$	ΔL_{OP} (mm)
V1	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$[\Omega]_X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{-7}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-3}$	12.12
V2	$4 \cdot 10^{-3}$	$\frac{9}{2} \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$[\Omega]_X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-9}{2} & 4 \\ \frac{9}{2} & 0 & \frac{-7}{2} \\ -4 & \frac{7}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$	11.31
V3	$7 \cdot 10^{-3}$	$\frac{5}{2} \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$[\Omega]_X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & -3 \\ \frac{-5}{2} & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$	$18 \cdot 10^{-3}$	9.19
V4	$3 \cdot 10^{-3}$	$\frac{7}{2} \cdot 10^{-3}$	$\frac{5}{2} \cdot 10^{-3}$	$[\Omega]_X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{-9}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$	$13 \cdot 10^{-3}$	9.90

Cuadro 6.2: Resultados de los apartados de cada versión

7. El vector desplazamiento en el entorno de un punto O de un cuerpo tiene las componentes (x, y, z en m)

$$\begin{aligned}u &= (Axy + Bxz) \cdot 10^{-4} \text{ m} \\v &= (Cyx + Dyz) \cdot 10^{-4} \text{ m} \\w &= (Fzx + Hzy) \cdot 10^{-4} \text{ m}\end{aligned}$$

Datos: A=0; B=20; C=0; D=10; F=0; H=30

- a) El alargamiento del segmento OP (O = (0, 0, 0) P = (1, 0, 1)). (mm)
b) El elemento situado en la fila 1 y en la columna 1 de la parte desviadora del tensor de deformaciones en el entorno del punto P = (1, 0, 1) ($\mu\epsilon$)

Solución

Al sustituir los datos del problema el campo de desplazamientos es,

$$\begin{aligned}u &= (20xz) \cdot 10^{-4} \text{ m} \\v &= (10yz) \cdot 10^{-4} \text{ m} \\w &= (30zy) \cdot 10^{-4} \text{ m}\end{aligned}$$

- 1) **El alargamiento del segmento OP (O = (0, 0, 0) P = (1, 0, 1)). (mm)**

A partir de dicho campo de desplazamientos, se calcula el alargamiento del segmento. Para ello, realizamos los siguientes pasos

- 1.- Sustituir los puntos O y P en el campo de desplazamientos.

$$\mathbf{u}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_X \text{ (m)} \quad \mathbf{u}_P = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_X \cdot 10^{-4} \text{ (m)}$$

- 2.- Calcular la normal unitaria en la dirección del alargamiento:

$$\mathbf{n}_{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_X$$

- 3.- El alargamiento será:

$$\Delta L_{OP} = [\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_O]^T \mathbf{n}_{OP} = 14,14 \cdot 10^{-4} \text{ (m)} = 1,41 \text{ (mm)}$$

- 2) **El elemento situado en la fila 1 y en la columna 1 de la parte desviadora del tensor de deformaciones en el entorno del punto P = (1, 0, 1) (ϵ)**

Calculamos las componentes del tensor de deformación a partir de sus relaciones cinemáticas con los desplazamientos.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 20x \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 10z \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 30y \cdot 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = (5y + 15z) \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

El tensor de deformación será al sustituir el punto

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 20x & 0 & 0 \\ 0 & 10z & 5y + 15z \\ 0 & 5y + 15z & 30y \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} \quad (\varepsilon) = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} \quad (\varepsilon)$$

Finalmente, descomponemos el tensor de tensiones en su parte volumétrica y su parte desviadora,

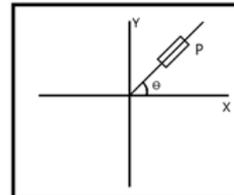
$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} = [\varepsilon^V]_{\mathbf{X}} + [\varepsilon^D]_{\mathbf{X}}$$

$$[\varepsilon^V]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} \quad (\varepsilon); \quad [\varepsilon^D]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} 10^{-4} \quad (\varepsilon)$$

siendo el elemento pedido el elemento que ocupa la primera fila y la primera columna del tensor de deformaciones desviador.

- c) En el centro de una placa cuadrada de pequeño espesor se adhiere una galga (banda extensométrica) como se indica en la figura. Si sobre dicha placa se realiza un ensayo se obtiene el tensor de deformaciones adjunto:

$$[\varepsilon]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 75 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \cdot 10^{-4}$$



Calcular la lectura de la galga (banda extensométrica) situada en el punto P sabiendo que el punto P está situado a $\theta = 30^\circ$ del eje x . ($\mu\varepsilon$)

Solución

Para obtener la lectura de una banda extensométrica se utiliza la relación, siendo la

$$n_p = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_p] = n_p^T [\varepsilon]_{\mathbf{X}} n_p = 8,08 m\varepsilon$$

Parte III

Flexión Compuesta y Desviada

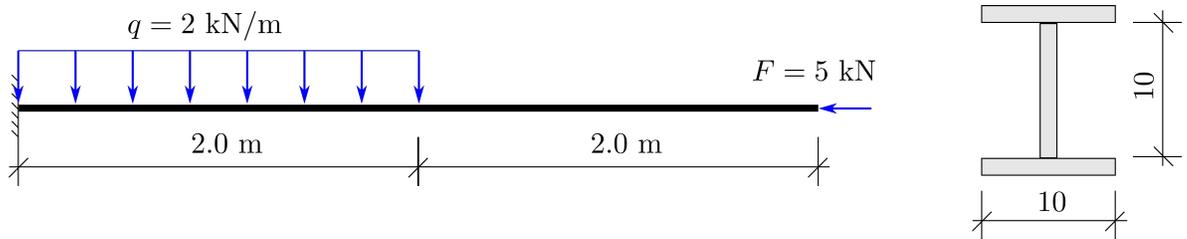
7. Flexión Compuesta

7.1	Enunciados de ejercicios de Flexión Compuesta	158
7.2	Solución de ejercicios de Flexión Compuesta	159

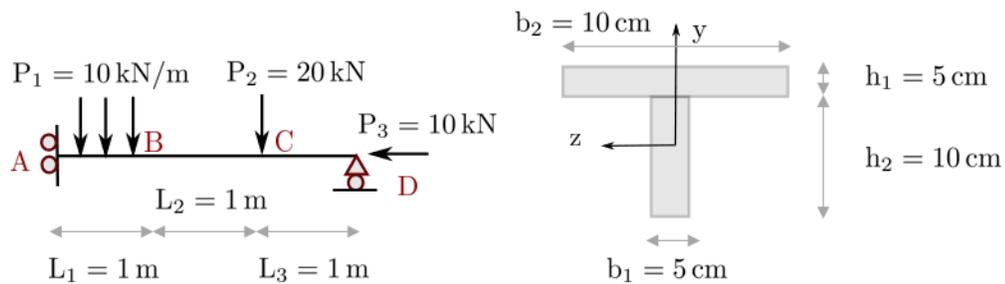


7.1. Enunciados de ejercicios de Flexión Compuesta

- Una viga empotrada está sometida a cargas como se muestran en la figura. La viga tiene una sección del perfil I de espesor de 2 cm y es de acero con $E = 210 \text{ GPa}$ (las dimensiones de la sección están en cm). Se pide
 - Diagrama de momentos flectores y cortantes.
 - Determinar el eje neutro en el punto medio de tramo que se aplica la carga distribuida.
 - Valor de tensiones normales máximas a compresión.
 - La flecha en el punto extremo libre de la viga



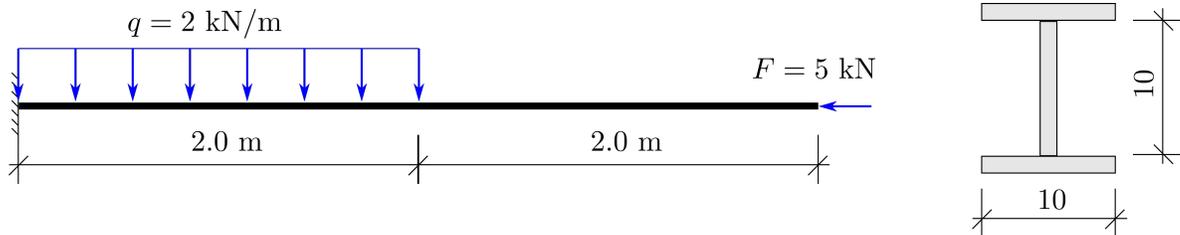
- La viga de la figura está sometida a una carga distribuida y a dos cargas puntuales. Calcular y dibujar (indicando la línea neutra):



- σ_{xx} provocada por el esfuerzo axial.
- σ_{xx} provocada por el momento flector.
- σ_{xx} provocada por la suma del esfuerzo axial y flector. ¿A qué distancia está situada la línea neutra respecto al caso b?

7.2. Solución de ejercicios de Flexión Compuesta

1. Una viga empotrada está sometida a cargas como se muestran en la figura. La viga tiene una sección del perfil I de espesor de 2 cm y es de acero con $E = 210 \text{ GPa}$ (las dimensiones de la sección están en cm). Se pide
 - a) Diagrama de momentos flectores y cortantes.
 - b) Determinar el eje neutro en el punto medio de tramo que se aplica la carga distribuida.
 - c) Valor de tensiones normales máximas a compresión.
 - d) La flecha en el punto extremo libre de la viga



Solución

- a) Se determinan las reacciones en el apoyo empotrado mediante las ecuaciones de equilibrio:

$$V_A = ql_1 = 2 \times 2 = 4 \text{ kN}$$

$$M_A = ql_1^2/2 = 2 \times 2^2/2 = 4 \text{ kNm}$$

$$H_A = F = 5 \text{ kN}$$

Se determinan las leyes de momento flector y cortante

- Tramo 1: $0 \leq x \leq l_1$

$$M = ql_1x - M_A - qx^2/2$$

$$V = -ql_1 + qx$$

- Tramo 2: $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$

$$M = ql_1x - M_A - ql_1(x - l_1/2) = 0$$

$$V = 0$$

Los diagramas del momentos flector y cortante son:



- b) En el punto medio de tramo de carga distribuida, el momento flector es de $-ql_1^2/8$. Aplicando la ley de Navier, se puede determinar la tensión normal en la sección de la viga en este punto como:

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_z}y + \frac{N}{A}$$

El eje neutro se determina al imponer que la tensión normal es igual a cero ($\sigma_{xx} = 0$), o sea

$$-\frac{M_z}{I_z}y + \frac{N}{A} = -\frac{-1}{I_z}y + \frac{-5}{A} = 0 \implies y = \frac{5I_z}{A}$$

- c) La tensión normal máxima se produce en la sección que tiene el mayor momento flector. Para este caso, la sección en el empotrado tiene el mayor momento flector. La tensión normal en esta sección es:

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_z}y + \frac{N}{A} = -\frac{-4}{I_z} - \frac{5}{A}$$

La tensión máxima en compresión se encuentra en el punto de sección con $y = -7$ cm.

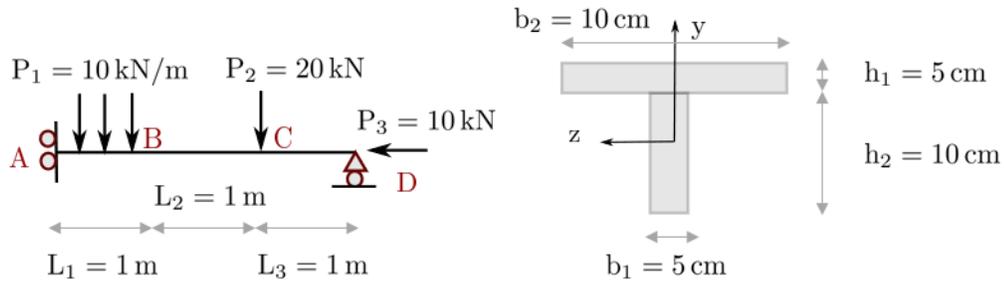
- d) Para determinar la flecha en el punto extremo libre de la viga, se aplica el PTV, es decir aplicamos una carga virtual $\delta P = 1$ en este punto. La ley de momento flector virtual es

$$\delta M = x - 4$$

La flecha es:

$$w = \int_0^{l_1} \frac{M\delta M}{EI_z} dx = \int_0^2 \frac{(4x - 4 - x^2)(x - 4)}{EI_z} dx = \frac{28}{3EI_z}$$

2. La viga de la figura está sometida a una carga distribuida y a dos cargas puntuales. Calcular y dibujar (indicando la línea neutra):



- a) σ_{xx} provocada por el esfuerzo axial.
- b) σ_{xx} provocada por el momento flector.
- c) σ_{xx} provocada por la suma del esfuerzo axial y flector. ¿A qué distancia está situada la línea neutra respecto al caso b)?

Solución

- a) σ_{xx} **provocada por el esfuerzo axial.**

En primer lugar se van a calcular los diagramas de esfuerzos de la viga. Para ello, se aplican los pasos siguientes:

P1.- El orden de hiperestaticidad de la estructura:

$$\mathbf{o.h. = Reacciones - Ecuaciones = 3 - 3 = 0}$$

P2.- Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0; H_A - P_3 = 0; \boxed{H_A = 30 \text{ (kN)}} \quad (7.1)$$

$$\sum F_y = 0; -P_2 - P_1 L_1 + V_D = 0; \boxed{V_D = 30 \text{ (kN)}} \quad (7.2)$$

$$\sum M_A = 0; M_A - P_1 \frac{L_1^2}{2} - P_2(L_1 + L_2) + V_D(L_1 + L_2 + L_3) = 0 \quad \boxed{M_A = -45 \text{ (kNm)}} \quad (7.3)$$

P3.- Leyes de esfuerzos:

Barra DC: $(0 \leq x < L_3 = 1 \text{ m})$

$$\sum F_x = 0; N_x(x) = -P_3$$

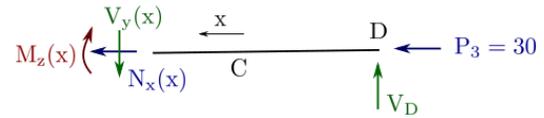
$$\sum F_y = 0; V_y(x) = V_D$$

$$\sum M_p = 0; M_z(x) = V_D x$$



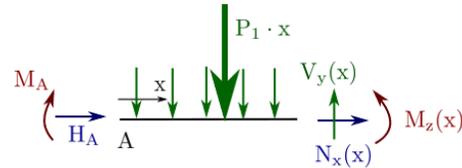
Barra CB: $(0 \leq x < L_2 = 1 \text{ m})$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; N_x(x) &= -P_3 \\ \sum F_y = 0; V_y(x) &= V_D - P_2 \\ \sum M_p = 0; M_z(x) &= V_D(x + 1) - P_2 x \end{aligned}$$

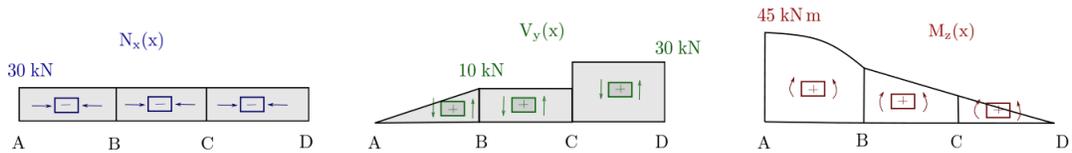


Barra AB: $(0 \leq x < L_1 = 1 \text{ m})$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; N_x(x) &= -H_A \\ \sum F_y = 0; V_y(x) &= P_1 x \\ \sum M_p = 0; M_z(x) &= -P_1 \frac{x^2}{2} + M_A \end{aligned}$$



La figura representa los diagramas de esfuerzos del axil, cortante y momento flector:

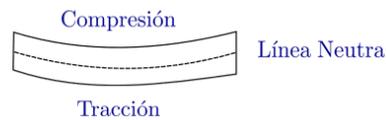


Analizando los diagramas, se elige el punto más desfavorable para calcular las tensiones normales (σ_{xx})

$$N_{x,max} = P_3 = \boxed{30 \text{ kN}} \text{ (Compresión)}$$

$$V_{y,max} = V_D = \boxed{30 \text{ kN}}$$

$$M_{z,max} = M_A = \boxed{45 \text{ kNm}}$$



P4.-Propiedades geométricas de la sección. Para ello, en primer lugar, se deben de posicionar los ejes de la figura en el centro de geometría. El eje y es un eje de simetría por tanto está en la mitad de la figura mientras que el eje z se posicionará a partir de una referencia y utilizando la fórmula siguiente:

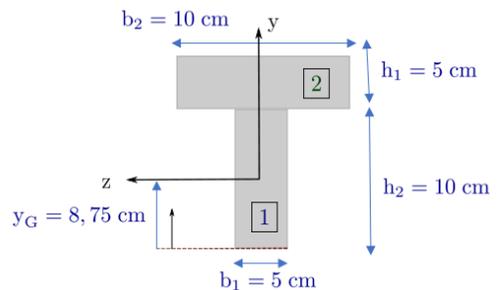
$$A_T \cdot y_G = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2$$

$$A_T = (A_1 + A_2)$$

$$A_1 = 50 \text{ cm}^2 \quad y_1 = 5 \text{ cm}$$

$$A_2 = 50 \text{ cm}^2 \quad y_2 = 12,5 \text{ cm}$$

$$\boxed{y_G = 8,75 \text{ cm}}$$



Una vez situadas los centros de masa de la figura las inercias se calculan utilizando la fórmula siguiente:

$$I = \frac{1}{12}(\text{Lado perpendicular al eje})^3 \cdot \text{Lado} + \text{Area} \cdot d^2$$

En este problema, se calculará sólo la inercia necesaria para el cálculo de las tensiones σ_{xx} que es la inercia respecto al eje z:

$$I_{zz} = I_{zz_1} + I_{zz_2}$$

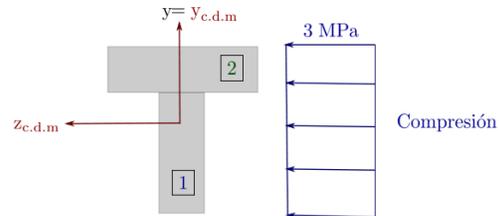
$$I_{zz_1} = \frac{1}{12}(10^3) \cdot (5) + (5) \cdot (10) \cdot (8,75 - 5)^2 = 1119,79 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz_2} = \frac{1}{12}(5^3) \cdot (10) + (5) \cdot (10) \cdot (12,5 - 8,75)^2 = 807,29 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz} = 1927,08 \text{ cm}^4$$

Finalmente, la tensión normal σ_{xx} debida al esfuerzo axial se obtiene aplicando la ley de Navier utilizando el axial máximo, quedando dicha tensión:

$$\sigma_{xx}^C = \frac{N_{x,max}}{A} = 3 \text{ MPa}$$



b) σ_{xx} provocada por el momento flector.

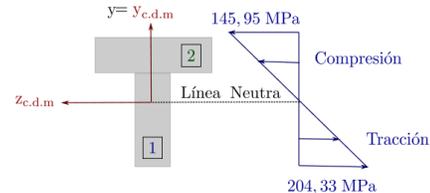
Aplicación de la Ley de Navier utilizando el término del momento flector,

$$\sigma_{xx} = \left| -\frac{M_z}{I_z} y \right|$$

siendo las máximas a tracción y a compresión en los puntos más alejados del perfil al centro de geometría (centroide) y cuyos valores son:

$$\sigma_{xx}^C = \frac{45 \text{ kNm}}{1927,08 \text{ cm}^4} 6,25 \text{ cm} = 145,95 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xx}^T = \frac{45 \text{ kNm}}{1927,08 \text{ cm}^4} 8,75 \text{ cm} = 204,33 \text{ MPa}$$



c) σ_{xx} provocada por la suma del esfuerzo axial y flector. ¿A qué distancia está situada la línea neutra respecto al caso b)?

Aplicación de la ley de Navier utilizando el término asociado al esfuerzo axial y al momento flector siendo las máximas a tracción y compresión en los puntos del perfil más alejados del centro de geometría,

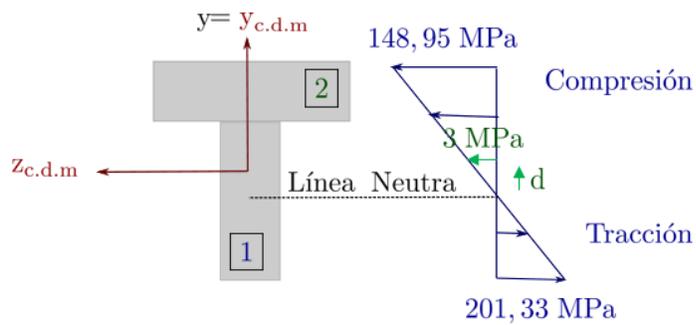
$$\sigma_{xx}^C = 145,95 \text{ MPa} + 3 \text{ MPa} = 148,95 \text{ MPa} \text{ (Compresión)}$$

$$\sigma_{xx}^T = 204,33 \text{ MPa} - 3 \text{ MPa} = 201,33 \text{ MPa} \text{ (Tracción)}$$

El punto donde está situada la nueva línea neutra se puede calcular utilizando geometría:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{148,95 \text{ MPa}}{(6,25 + d) \text{ cm}} = \frac{3 \text{ MPa}}{(d) \text{ cm}}$$

$$d = 0,128 \text{ cm}$$



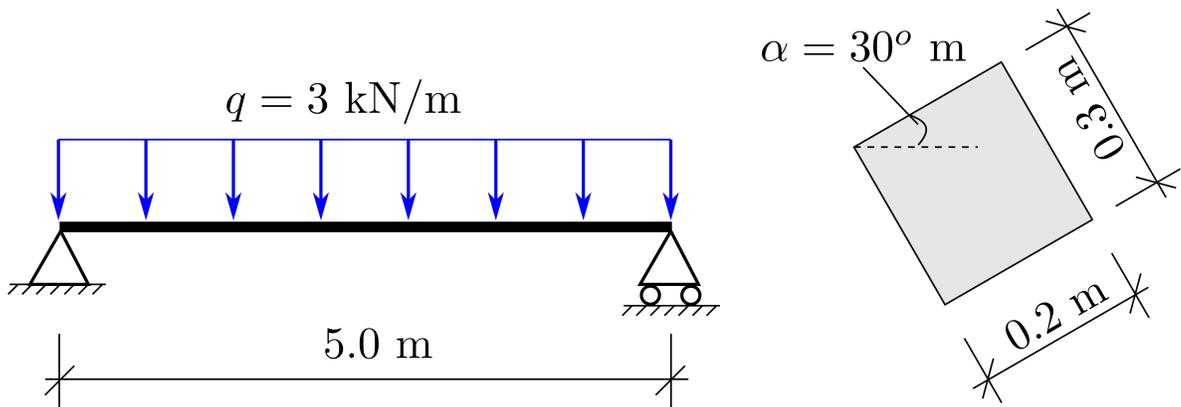
8. Flexión Desviada

8.1	Enunciados de ejercicios de Flexión Desviada	166
8.2	Solución de ejercicios de Flexión Desviada	172



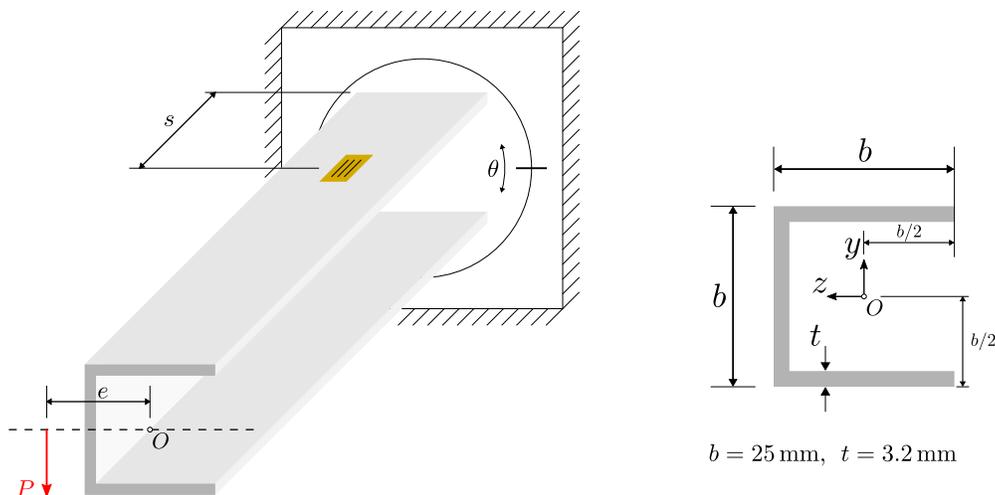
8.1. Enunciados de ejercicios de Flexión Desviada

1. Dada una estructura como se muestra en la figura, compuesta de una viga de hormigón armado de sección rectangular, inclinada un ángulo $\alpha = 30^\circ$. La estructura está sometida a una carga uniforme $q = 3 \text{ kN/m}$. Se pide:
 - a) Diagramas de momentos flectores y cortantes.
 - b) Calcular la energía interna de deformaciones.
 - c) Determinar el valor de flecha en el centro de vano.



Datos: $E = 32 \text{ GPa}$

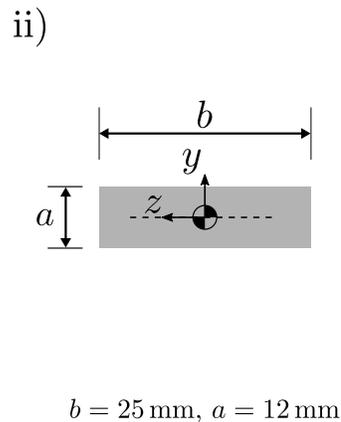
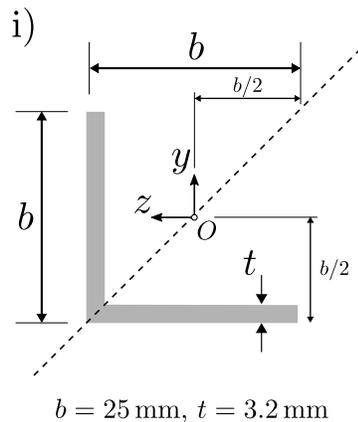
2. Sea la estructura de la figura una viga empotrada de longitud L y hecha de un material conocido (i.e. constantes E y GJ dadas) sometida a una carga P variable en magnitud y en punto de aplicación (posición e a lo largo de su eje de simetría, con origen en el punto de referencia O destacado en la figura). Adicionalmente, se ha colocado un extensómetro situado a una distancia s del empotramiento. Por último, el sistema puede rotarse a lo largo del eje longitudinal de la viga un ángulo θ (definido positivo en sentido antihorario).



Calcular:

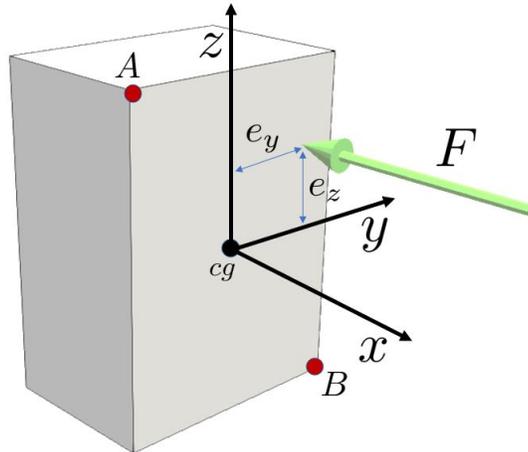
- Propiedades de la viga: inercias a flexión EI_{yy} , EI_{zz} (considérense y y z los ejes locales de la viga).
- Distribuciones y leyes de momento flector y fuerza cortante
- Centro de cortadura de la sección, referido al sistema de referencia Oyz indicado en la figura
- Flecha y giro de la viga, y ángulo de torsión del extremo donde está aplicada la carga P en función de la excentricidad e , con $\theta = 0$ rad. Particularizar para $P = 1$ kg y $e = 0$.
- Lectura del extensímetro en función de su posición s respecto al empotramiento, de la excentricidad de la carga e y del ángulo de rotación θ . Nótese que la carga P es un peso aplicado, por lo que actúa según la gravedad i.e. su dirección no varía con θ . Particularizar para $P = 1$ kg, $s = L/4$ y $\theta = 0$.
- Repetir los apartados 1 a 3 para la sección i), rotada $\theta = 45^\circ$ en sentido horario. La línea discontinua representa el eje a lo largo del cual puede desplazarse la carga aplicada.
- Repetir los apartados 1 a 3 para la sección ii), donde la línea discontinua representa el eje a lo largo del cual puede desplazarse la carga aplicada.

Datos: $E = 55$ GPa, $GJ = 12,4$ Nm², $L = 0,5$ m



- En este problema se van a usar conceptos de flexión compuesta desviada (o esviada), sobre una sección con ejes de flexión coincidentes con sus principales de inercia, y su influencia en la distribución de las tensiones normales a la sección.

Tenemos una sección rectangular como la mostrada en la figura, a la cual se le aplica una carga en la dirección x y sentido tal que genera una compresión en la pieza. La fuerza se aplica de manera excéntrica con respecto al centro de gravedad.

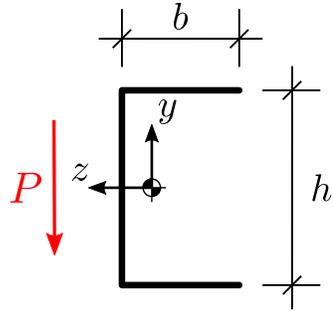


Se pide:

- Características de la sección.
- Ecuación genérica de la tensión normal a la cara producida por la carga excéntrica.
- Ecuación genérica del eje neutro de la sección ante la carga excéntrica.
- Evaluar si el punto ($e_y = b/4$, $e_z = -h/4$) pertenece al núcleo central. Calcular la ecuación del eje neutro, y calcular la tensión normal en los puntos A y B de la sección.
- Evaluar si el punto ($e_y = 0$, $e_z = h/6$) pertenece al núcleo central. Calcular la ecuación del eje neutro, y calcular la tensión normal en los puntos A y B de la sección.
- Calcular el núcleo central de la sección.
- Calcular la tensión normal en el punto A dado por la actuación simultánea de una carga F aplicada en ($e_y = 0$, $e_z = h/2$), un momento M aplicado en un eje que forma un ángulo $\theta = 30^\circ$ con el eje y de la figura, un cortante V_y y un momento torsor M_T en el eje x . Determinar el tensor de tensiones considerando el momento de inercia a torsión como conocido e igual a J_0 (operar con este valor en simbólico). Se pide determinar el valor del momento torsor para que la tensión de Von Mises sea igual a la de plastificación en el punto A

Nota: este mismo problema, para cualquier otra sección cuyos ejes de flexión coincidan con los ejes principales de inercia, sería exactamente igual salvo el cálculo de los valores característicos de la sección (i.e. área, centro de gravedad, e inercias en los ejes principales).

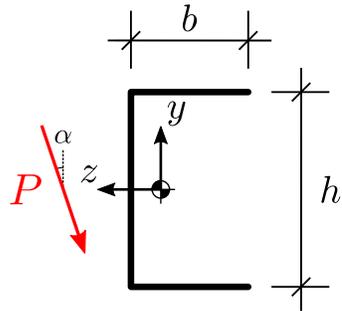
- Sea un perfil de pared delgada en "C" de espesor t , con alas (tramos horizontales) de longitud b y alma (tramo vertical) de longitud h , sometido a una carga P . En todo momento se considera la carga aplicada en el centro de cortadura, y se asume que $b/t \gg 1$, con $b \sim h$.



Para la sollicitación mostrada en la figura anterior, se pide:

- a) Tensión cortante máxima en valor absoluto, $\tau_{\text{máx}}$ (MPa)

Posteriormente, se rota la carga respecto a la vertical $\alpha = 30^\circ$ tal y como se indica en la siguiente figura:

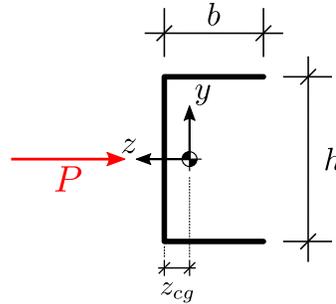


Ante la nueva sollicitación, se pide:

- a) Tensión cortante en el punto medio del alma en valor absoluto, $\tau_{xy}(y = 0)$ (MPa)
- b) Sabiendo que el centro de cortadura de la sección está en $z = c$ (respecto a ejes centroidales), ¿cómo será la nueva posición c' del centro de cortadura al **augmentar** la longitud b de las alas?
- 1) $c' > c$
 - 2) $c' < c$
 - 3) $c' = c$
 - 4) Faltan datos para determinar la nueva posición
 - 5) Ninguna de las anteriores

Datos: P, b, h, t

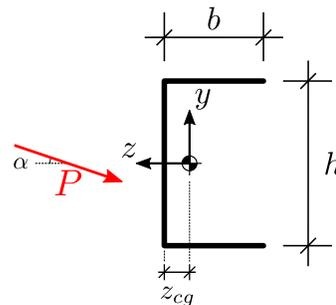
5. Sea un perfil de pared delgada en "C" de espesor t , con alas (tramos horizontales) de longitud b y alma (tramo vertical) de longitud h , sometido a una carga P . En todo momento se considera la carga aplicada en el centro de cortadura, y se asume que $b/t \gg 1$, con $b \sim h$. La distancia del centroide de la sección a la línea media del alma es z_{cg} mm.



Para la sollicitación mostrada en la figura anterior, se pide:

- a) Tensión cortante máxima en valor absoluto, $\tau_{\text{máx}}$ (MPa)

Posteriormente, se rota la carga respecto a la horizontal $\alpha = 30^\circ$ tal y como se indica en la siguiente figura:

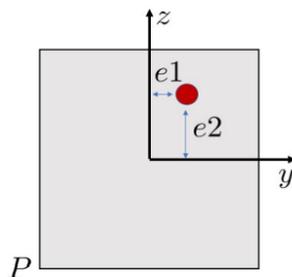


Ante la nueva sollicitación, se pide:

- a) Tensión cortante en el punto medio del alma en valor absoluto, $\tau_{xy}(y = 0)$ (MPa)
- b) Sabiendo que el centro de cortadura de la sección está en $z = c$ (respecto a ejes centroidales), ¿cómo será la nueva posición c' del centro de cortadura al **disminuir** la longitud b de las alas?
- 1) $c' > c$
 - 2) $c' < c$
 - 3) $c' = c$
 - 4) Faltan datos para determinar la nueva posición
 - 5) Ninguna de las anteriores

Datos: P, b, h, t, z_{cg}

6. Sobre la sección cuadrada de la figura, de lado $l=40$ mm, se aplica una carga $F=10$ kN de compresión en el punto rojo. Este punto está situado a una distancia $e_1=8$ mm del eje z y una distancia $e_2=20$ mm del eje y .

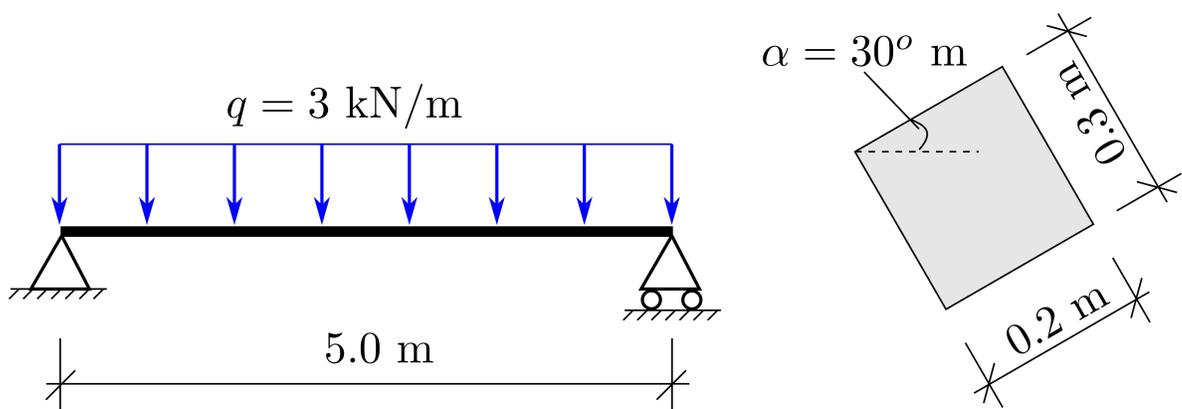


Se pide,

- Ecuación del eje neutro.
- Tensión en el punto P (MPa) considerando las tracciones positivas y las compresiones negativas.
- Mayor tensión (MPa) en la sección (en valor absoluto.)

8.2. Solución de ejercicios de Flexión Desviada

1. Dada una estructura como se muestra en la figura, compuesta de una viga de hormigón armado de sección rectangular, inclinada un ángulo $\alpha = 30^\circ$. La estructura está sometida a una carga uniforme $q = 3 \text{ kN/m}$. Se pide:
 - a) Diagramas de momentos flectores y cortantes.
 - b) Calcular la energía interna de deformaciones.
 - c) Determinar el valor de flecha en el centro de vano.



Datos: $E = 32 \text{ GPa}$

Solución

- a) Primero, se determinan las reacciones en los apoyos a través de las ecuaciones de equilibrio estático

$$V_A = V_B = \frac{ql}{2} = 7,5 \text{ kN}$$

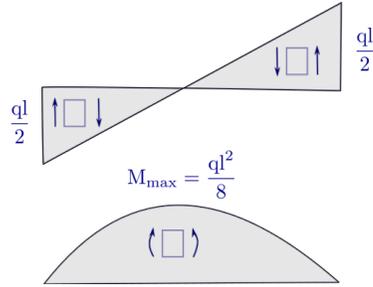
Determina la ley de momento flector:

$$M = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Determina la ley de cortante:

$$V = -\frac{ql}{2} + qx$$

Con las leyes obtenidas anteriormente, se dibujan los diagramas correspondientes.



- b) Determinan los momentos de inercia respecto a los ejes z y y del sistema de coordenadas local de la sección de la viga.

$$I_z = 0,00045 \text{ m}^4; I_y = 0,0002 \text{ m}^4$$

Debido a que la sección está inclinada un ángulo de 30° , por tanto el momento flector determinado anteriormente puede entenderse como el resultante de los dos momentos flectores aplicados sobre los dos ejes y y z :

$$M_z = M \cos \alpha \quad M_y = M \sin \alpha$$

La energía interna de deformación se puede determinar como:

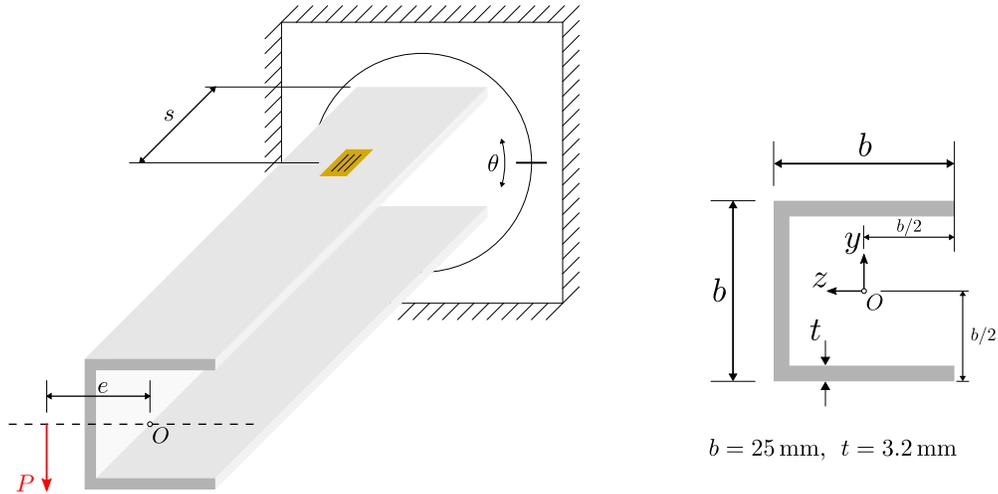
$$U = \int_0^l \frac{M_y^2}{2EI_y} dx + \int_0^l \frac{M_z^2}{2EI_z} dx = \frac{q^2 l^5 \sin^2 \alpha}{240EI_y} + \frac{q^2 l^5 \cos^2 \alpha}{240EI_z}$$

- c) Las flechas se presentan en la sección del centro de vano que son los correspondientes debido a cada componente de momento flector:

$$\delta_y = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_z} \cos \alpha$$

$$\delta_z = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_y} \sin \alpha$$

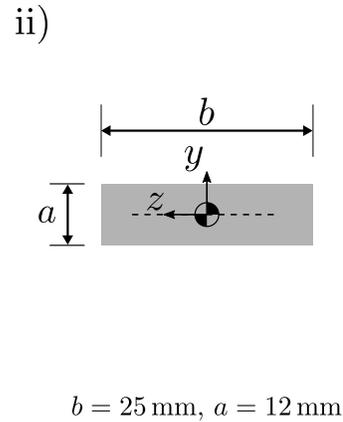
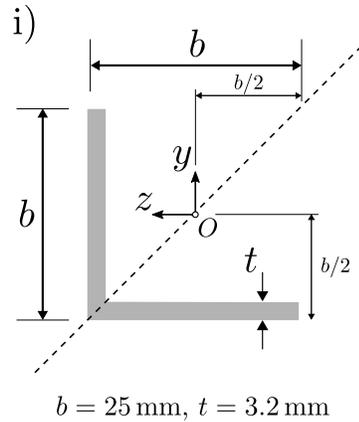
2. Sea la estructura de la figura una viga empotrada de longitud L y hecha de un material conocido (i.e. constantes E y GJ dadas) sometida a una carga P variable en magnitud y en punto de aplicación (posición e a lo largo de su eje de simetría, con origen en el punto de referencia O destacado en la figura). Adicionalmente, se ha colocado un extensómetro situado a una distancia s del empotramiento. Por último, el sistema puede rotarse a lo largo del eje longitudinal de la viga un ángulo θ (definido positivo en sentido antihorario).



Calcular:

- Propiedades de la viga: inercias a flexión EI_{yy} , EI_{zz} (considérense y y z los ejes locales de la viga).
- Distribuciones y leyes de momento flector y fuerza cortante
- Centro de cortadura de la sección, referido al sistema de referencia Oyz indicado en la figura
- Flecha y giro de la viga, y ángulo de torsión del extremo donde está aplicada la carga P en función de la excentricidad e , con $\theta = 0$ rad. Particularizar para $P = 1$ kg y $e = 0$.
- Lectura del extensómetro en función de su posición s respecto al empotramiento, de la excentricidad de la carga e y del ángulo de rotación θ . Nótese que la carga P es un peso aplicado, por lo que actúa según la gravedad i.e. su dirección no varía con θ . Particularizar para $P = 1$ kg, $s = L/4$ y $\theta = 0$.
- Repetir los apartados 1 a 3 para la sección i), rotada $\theta = 45^\circ$ en sentido horario. La línea discontinua representa el eje a lo largo del cual puede desplazarse la carga aplicada.
- Repetir los apartados 1 a 3 para la sección ii), donde la línea discontinua representa el eje a lo largo del cual puede desplazarse la carga aplicada.

Datos: $E = 55$ GPa, $GJ = 12,4$ Nm², $L = 0,5$ m



Solución

- a) Para calcular las propiedades de la sección, se calcula en primer lugar el centro de gravedad de la sección. Como la sección es simétrica respecto al eje z mostrado en la figura, y_{CG} es $y = 0$ en el eje de la figura. Para el cálculo de z_{CG} se sitúa un sistema auxiliar en el eje de simetría, en el punto medio exterior del tramo vertical del perfil. Así, la expresión de z_{CG} puede expresarse como:

$$z_{CG} = \frac{\sum_i z_{CG,i} \cdot A_i}{\sum_i A_i} = \frac{0 \cdot (b - 2t)t + (b/2 - t/2) \cdot 2bt}{(b - 2t)t + 2bt} = 7,945 \text{ mm} \quad (8.1)$$

Calculado el centro de áreas de la sección, se pueden obtener los momentos de inercia, sabiendo que $I_{yy} = \int_A z^2 dA$ y que $I_{zz} = \int_A y^2 dA$:

$$I_{yy} = \frac{1}{12} t^3 (b - 2t) + t(b - 2t) z_{CG}^2 + \frac{1}{6} b^3 t + 2bt \left(\frac{b}{2} - \frac{t}{2} - z_{CG} \right)^2 = 13538,33 \text{ mm}^4$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} (b - 2t)^3 t + \frac{1}{6} b t^3 + 2bt \left(\frac{b}{2} - \frac{t}{2} \right)^2 = 20862,095 \text{ mm}^4 \quad (8.2)$$

- b) Las distribuciones de momento flector y fuerza cortante están determinadas sin necesidad de imponer condición adicional debido a que la estructura es isostática:

$$\begin{aligned} V_y(x) &= P \\ M_z(x) &= -Px \end{aligned} \quad (8.3)$$

situando el origen de x en el extremo libre de la viga.

- c) Para el cálculo del centro de cortadura se deben obtener las fuerzas resultantes de la distribución de esfuerzo cortante, obtenidas a su vez a partir del Teorema de Colignon. En las alas superior e inferior, la expresión adquiere la misma forma (problema antisimétrico):

$$\tau_{xz}(\tilde{z}) = \frac{\bar{V}_y Q_z^*(\tilde{z})}{b(\tilde{z}) I_{zz}} = \frac{P(b - t/2 - \tilde{z})(b/2 - t/2)}{I_{zz}} \quad (8.4)$$

donde $\bar{V}_y = V_y = P$ debido a que la sección posee un eje de simetría, y $b(z) = t$. Se ha escogido \bar{z} con origen en la línea media de la sección vertical (alma) por simplicidad en la expresión. Como puede observarse, la evolución es lineal. De este modo, el cortante es máximo en $\bar{z} = 0$ i.e.

$$\tau_{xz, \text{máx}} = \tau_{xz}(\bar{z} = 0) = \frac{P(b - t/2)(b - t)}{2I_{zz}} \quad (8.5)$$

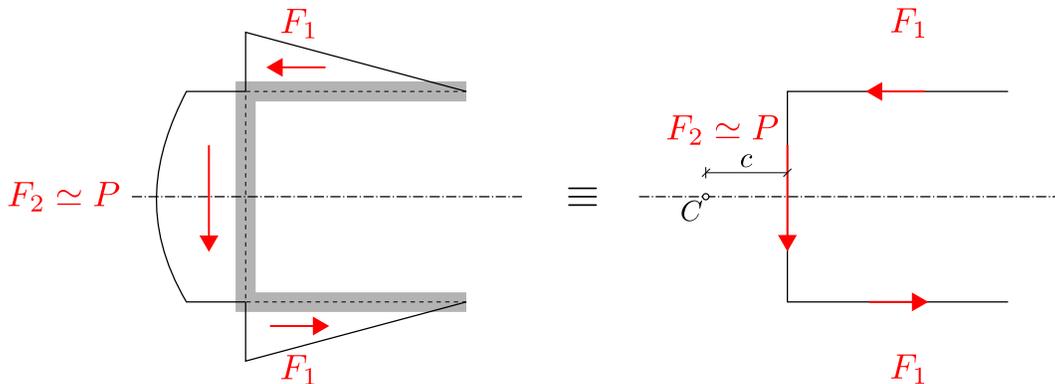
La fuerza resultante en las alas es, por tanto,

$$F_1 = \int_A \tau_{xz} dA = \int_0^{b-t/2} \tau_{xz}(\bar{z}) t d\bar{z} = \frac{1}{2} \tau_{xz, \text{máx}} (b - t/2) t = \frac{P(b - t/2)^2 t (b - t)}{4I_{zz}} \quad (8.6)$$

y es antisimétrica respecto al eje de simetría del perfil. Respecto a la distribución de cortante $\tau_{xy}(y)$ en el eje vertical, se conoce que es cuadrática, sin embargo, no es necesario calcular su distribución dado que la resultante es la fuerza a la que se encuentra sometida el perfil, P (al ser el único tramo con contribución relevante τ_{xy}). En otras palabras,

$$F_2 = \int_A \tau_{xy}(y) dA \simeq P \quad (8.7)$$

Lo anterior puede verse reflejado en la siguiente figura:



Así, estableciendo la equivalencia entre el sistema con una carga P aplicada y la distribución de resultantes mostrada en la figura anterior, se plantea la ecuación de equilibrio de momentos en el centro de cortadura C para calcular su posición c respecto a la línea media del alma del perfil:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow cP = 2F_1(b/2 - t/2); \quad c = \frac{(b - t/2)^2 t (b - t)}{4I_{zz}} = 9,98 \text{ mm} \quad (8.8)$$

En parámetros del enunciado, aplicando la carga en $e = c + b/2 - t/2$, no existe torsión en la pieza

$$e = c + b/2 - t/2 = 20,88 \text{ mm} \quad (8.9)$$

- d) La flecha y el giro de la sección en su extremo se obtiene directamente de la formulación para vigas empotradas en un extremo, con el otro extremo libre (isostáticas)

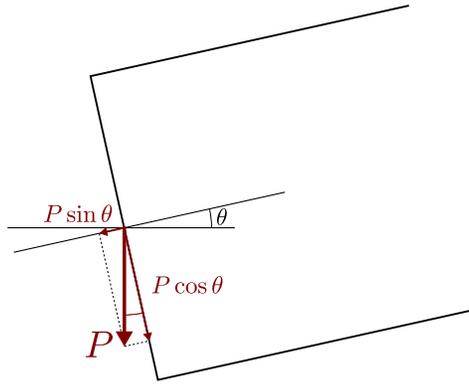
$$\begin{aligned}
 \text{Flecha: } v &= \frac{PL^3}{3EI_{zz}} = 0,36\text{mm} \\
 \text{Giro: } v' &= \frac{PL^2}{2EI_{zz}} = 1,07 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\
 \text{Ángulo torsión: } \varphi_{AB} &= \frac{TL}{GJ} = \frac{P(c + b/2 - t/2 - e)L}{GJ} = 1,65 \cdot 10^{-2} \text{ rad}
 \end{aligned}
 \tag{8.10}$$

- e) La ley de Hooke generalizada para este caso determina que $\epsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E$. Obteniendo σ_{xx} de la Ley de Navier, se llega a

$$\epsilon_{xx}(x, y, z) = -\frac{M_z(x)}{EI_{zz}}y - \frac{M_y(x)}{EI_{yy}}z
 \tag{8.11}$$

Se han mantenido las contribuciones de momento flector en ambos ejes (locales) debido a que ahora el giro θ es un parámetro que puede modificarse. Nótese que la anterior ley se ha aplicado teniendo en cuenta que la flexión es simple (ausencia de esfuerzo axial i.e. $N = 0$).

La variación de θ da lugar a una flexión desviada. Para calcular las contribuciones en cada eje local, se descompone la carga P aplicada según estos ejes, tal y como indica la siguiente figura



Con ello, la ley de momento flector en función de x (con origen en el extremo libre) es:

$$\begin{aligned}
 M_z(x) &= -Px \cos \theta \quad (\text{Tracción fibras superiores}) \\
 M_y(x) &= Px \sin \theta \quad (\text{Tracción fibras extremo libre de las alas})
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$

El criterio de signo de M_y es el seguido en los apuntes de la asignatura (positivo según $-y$), y es el tenido en cuenta para la derivación de la Ley de Navier aquí utilizada.

El extensímetro está situado en la siguiente posición:

$$\begin{aligned}x &= L - s \\y &= b/2 \\z &= b/2 - t/2 - z_{CG}\end{aligned}$$

Así, la lectura del extensómetro arrojaría el siguiente valor:

$$\boxed{\epsilon_{xx} = \frac{P(L-s)}{2E} \left[\frac{b \cos \theta}{I_{zz}} - \frac{(b-t-2z_{CG}) \sin \theta}{I_{yy}} \right] = 40 \mu\epsilon} \quad (8.13)$$

f) Sección i)

1) Propiedades de la sección:

Rotando la sección 45 grados en sentido horario, los ejes y y z pasan a ser ejes principales de inercia debido a que el eje z es eje de simetría. De este modo, las propiedades de la sección se calculan a continuación. Los cálculos se realizan tomando un cuadrado de lado b y restándole un cuadrado de lado $b-t$. Para situar el centro de gravedad, se toma el vértice de la sección (esquina izquierda):

$$z_{cg} = \frac{b^2 \cdot b/\sqrt{2} - (b-t)^2 \left(\sqrt{2}t + \frac{b-t}{\sqrt{2}} \right)}{b^2 - (b-t)^2} = 10,497 \text{ mm} \quad (8.14)$$

Así, el momento de inercia respecto al eje z , I_{zz} , se obtiene como

$$I_{zz} = \frac{1}{12} b^4 - \frac{1}{12} (b-t)^4 = 13730,99 \text{ mm}^4, \quad (8.15)$$

donde se ha tenido en cuenta que el momento de inercia de un cuadrado de lado b respecto a cualquier dirección de su plano es $b^4/12$. Igualmente, la expresión para I_{yy} es

$$I_{yy} = \frac{1}{12} b^4 + b^2 \left(\frac{b}{\sqrt{2}} - z_{cg} \right)^2 - \frac{1}{12} (b-t)^4 - (b-t)^2 \left(\sqrt{2}t + \frac{b-t}{\sqrt{2}} - z_{cg} \right)^2 = 3576,29 \text{ mm}^4 \quad (8.16)$$

$$\boxed{\begin{aligned}I_{yy} &= 3576,29 \text{ mm}^4 \\I_{zz} &= 13731 \text{ mm}^4\end{aligned}} \quad (8.17)$$

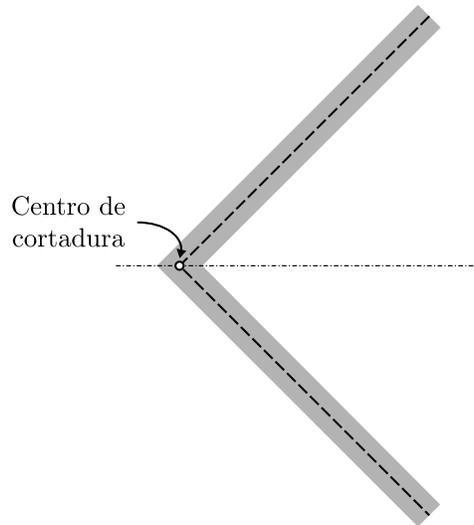
2) Distribuciones y leyes de momento flector y fuerza cortante:

Iguales (no dependen de la sección)

3) Centro de cortadura:

El centro de cortadura se encuentra en la esquina del perfil, a la altura de la línea media, por ser el punto donde concurren todas las resultantes de fuerzas de la distribución de esfuerzos cortantes.

g) Sección ii)



1) Propiedades de la sección:

$$\begin{aligned}
 I_{yy} &= \frac{1}{12} b^3 a = 15\,625 \text{ mm}^4 \\
 I_{zz} &= \frac{1}{12} b a^3 = 3\,600 \text{ mm}^4
 \end{aligned}
 \tag{8.18}$$

2) Distribuciones y leyes de momento flector y fuerza cortante:

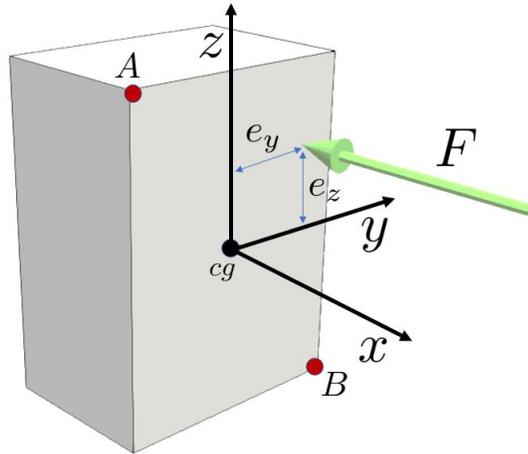
Iguales (no dependen de la sección)

3) Centro de cortadura:

El centro de cortadura coincide con el centroide de la sección

3. En este problema se van a usar conceptos de flexión compuesta desviada (o esviada), sobre una sección con ejes de flexión coincidentes con sus principales de inercia, y su influencia en la distribución de las tensiones normales a la sección.

Tenemos una sección rectangular como la mostrada en la figura, a la cual se le aplica una carga en la dirección x y sentido tal que genera una compresión en la pieza. La fuerza se aplica de manera excéntrica con respecto al centro de gravedad.



Se pide:

- Características de la sección.
- Ecuación genérica de la tensión normal a la cara producida por la carga excéntrica.
- Ecuación genérica del eje neutro de la sección ante la carga excéntrica.
- Evaluar si el punto $(e_y = b/4, e_z = -h/4)$ pertenece al núcleo central. Calcular la ecuación del eje neutro, y calcular la tensión normal en los puntos A y B de la sección.
- Evaluar si el punto $(e_y = 0, e_z = h/6)$ pertenece al núcleo central. Calcular la ecuación del eje neutro, y calcular la tensión normal en los puntos A y B de la sección.
- Calcular el núcleo central de la sección.
- Calcular la tensión normal en el punto A dado por la actuación simultánea de una carga F aplicada en $(e_y = 0, e_z = h/2)$, un momento M aplicado en un eje que forma un ángulo $\theta = 30^\circ$ con el eje y de la figura, un cortante V_y y un momento torsor M_T en el eje x . Determinar el tensor de tensiones considerando el momento de inercia a torsión como conocido e igual a J_0 (operar con este valor en simbólico). Se pide determinar el valor del momento torsor para que la tensión de Von Mises sea igual a la de plastificación en el punto A

Nota: este mismo problema, para cualquier otra sección cuyos ejes de flexión coincidan con los ejes principales de inercia, sería exactamente igual salvo el cálculo de los valores característicos de la sección (i.e. área, centro de gravedad, e inercias en los ejes principales).

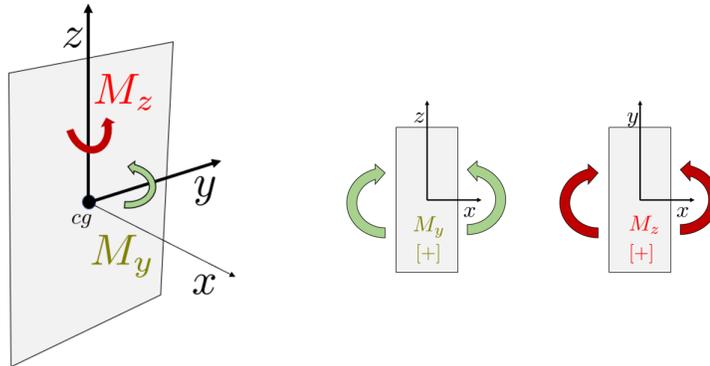
Solución

Lo primero que tenemos que definir es el criterio de signos para el axil N y los momentos M_y y M_z . Para ello, los asociamos a la repercusión que tendrán en el estado tensional de la pieza prismática, y su relación con los ejes que hemos elegido. Si usamos la ecuación de Navier que relaciona la tensión σ_{xx} con, por ejemplo, el momento flector M_y de esta forma:

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_y z}{I_{yy}} \tag{8.19}$$

Implica que el momento flector M_y será positivo cuando actuando de forma aislada (principio de superposición) produzca compresiones en la zona del eje z positivo. Con esto, y siguiendo la disposición mostrada en la Figura 7, el momento flector M_y será positivo cuando de los dos momentos que lo componen (iguales y de signo contrario), el negativo esté en la cara con una coordenada x mayor.

De igual modo, si analizamos el momento flector M_z , este será positivo cuando de los dos momentos que lo componen, el positivo esté en la cara con una mayor coordenada x . La cara con una mayor coordenada x es la que se muestra en la Figura 7 en primer plano, con los ejes y la carga dibujados sobre ella. En la Figura 3 se muestra el sentido de los momentos en la cara con mayor x del diferencia para considerar positivos los momentos flectores:



Respuesta a

Las propiedades seccionales que necesitamos serán el área y las inercias en ejes principales, cuyos valores son $A = hb$, $I_{yy} = h^3b/12$ y $I_{zz} = hb^3/12$.

Respuesta b

Con esto, la tensión σ_{xx} dada por una carga F excéntrica, y considerando que el axil es de compresión (negativo) y el criterio de signos expresado para los momentos, será:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} - \frac{M_y z}{I_{yy}} - \frac{M_z y}{I_{zz}} = -\frac{F}{hb} - \left(\frac{12F e_z}{h^3 b}\right)z - \left(\frac{12F e_y}{hb^3}\right)y \tag{8.20}$$

Respuesta c

La ecuación del eje neutro vendrá dada por el lugar geométrico de las tensiones normales nulas, esto viene de igualar a 0 la ecuación 11.39:

$$\sigma_{xx} = -\frac{F}{hb} - \left(\frac{12F e_z}{h^3 b}\right)z - \left(\frac{12F e_y}{hb^3}\right)y = 0 \quad (8.21)$$

Que podremos simplificar como:

$$-1 - \left(\frac{12 e_z}{h^2}\right)z - \left(\frac{12 e_y}{b^2}\right)y = 0 \quad (8.22)$$

Aquí, se puede ver como para diferentes valores de las excentricidades de aplicación de la carga e_y y e_z , el eje central variará de posición y orientación.

Respuesta d

Un punto pertenece al núcleo central cuando una carga de compresión aplicada en dicho punto hace que toda la sección esté a compresión, no necesariamente con el mismo valor tensional. Para eso usamos la ecuación general del eje neutro definida por la ecuación 8.22, con lo que queda:

$$-1 + \left(\frac{3h}{h^2}\right)z - \left(\frac{3b}{b^2}\right)y = 0 \quad (8.23)$$

Y despejando, la recta que define el eje neutro es:

$$y = -\frac{b}{3} + \left(\frac{b}{h}\right)z \quad (8.24)$$

Que corta la sección, por lo que no pertenece al núcleo central el punto evaluado. Eso se comprueba verificando que la ecuación 8.24 corta el eje z en $z = h/3$, y el eje y en $y = -b/3$. Ambos puntos dentro de la sección rectangular de la figura.

Usando la ecuación 11.39, la tensión en el punto A será:

$$\sigma_{xx} = -\frac{4F}{hb} < 0 \quad (8.25)$$

Y en el punto B :

$$\sigma_{xx} = \frac{2F}{hb} > 0 \quad (8.26)$$

Respuesta e

Este punto se evalúa de la misma forma que el anterior, con lo que tenemos sustituyendo los valores del punto dado como excentricidad de la carga:

$$-1 - \left(\frac{2h}{h^2}\right)z - 0 = 0 \quad (8.27)$$

Que queda simplificando:

$$z = -\frac{h}{2} \quad (8.28)$$

que es una recta horizontal tangente a la sección de la viga que no la corta, por lo que este punto sí pertenece al núcleo central. La tensión en el punto A es:

$$\sigma_{xx} = -\frac{F}{hb} - \frac{F}{hb} = -2\frac{F}{hb} \quad (8.29)$$

Y la tensión en el punto B es nula, ya que está en el eje neutro.

Respuesta f

El núcleo central es la región de la sección donde podemos aplicar una carga de compresión y toda la sección estará en compresión, aunque con valores variables como en el punto anterior. Para ello, vamos a darle la vuelta al problema y a asumir cuatro estados donde en cada uno la tensión la imponemos nula en cada uno (calculamos la excentricidad que hace que la tensión sea nula en un vértice diferente, es decir, que el eje neutro pase por el vértice). Cada vértice nos dará una ecuación de una recta para las excentricidades e_y y e_z . Para ello usamos la ecuación 8.22 y sustituimos.

Vértice 1 ($y = -b/2, z = h/2$):

$$-1 - \frac{6e_z}{h} + \frac{6e_y}{b} = 0 \quad (8.30)$$

$$e_y = \frac{b}{6} + \frac{b}{h}e_z \quad (8.31)$$

Vértice 2 ($y = b/2, z = h/2$):

$$-1 - \frac{6e_z}{h} - \frac{6e_y}{b} = 0 \quad (8.32)$$

$$e_y = -\frac{b}{6} - \frac{b}{h}e_z \quad (8.33)$$

Vértice 3 ($y = b/2, z = -h/2$):

$$-1 + \frac{6e_z}{h} - \frac{6e_y}{b} = 0 \quad (8.34)$$

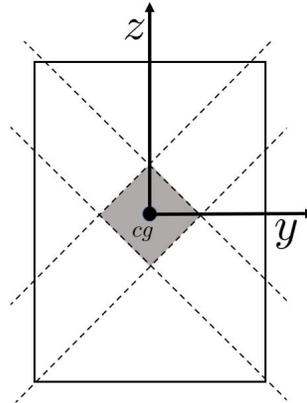
$$e_y = -\frac{b}{6} + \frac{b}{h}e_z \quad (8.35)$$

Vértice 4 ($y = -b/2, z = -h/2$):

$$-1 + \frac{6e_z}{h} + \frac{6e_y}{b} = 0 \quad (8.36)$$

$$e_y = \frac{b}{6} - \frac{b}{h}e_z \quad (8.37)$$

Cada una de estas ecuaciones definida para cada vértice divide la sección en dos partes. Sobre la línea una fuerza aplicada en cualquier punto de la misma hará que la tensión normal en el vértice sea nula. Y a un lado de esta (el lado al cual está el centro de gravedad) cualquier punto hará que la tensión en el vértice estudiado sea negativa, de mayor o menor valor. Siempre considerando que la fuerza produce un axil de compresión, como es el caso. Aunque en el caso de un axil de tracción sería análogo. Con ello, el núcleo central sería la región que cumple las condiciones para los cuatro vértices y que harán que todos los puntos de la sección estén a compresión ante una carga colocada en esa región. Eso es el polígono definido por las rectas y que contiene al centro de gravedad de la figura, como puede verse en la siguiente figura:



Respuesta g

Para el cálculo del tensor de tensiones debemos de considerar todas las tensiones actuantes. Sabemos que la tensión σ_{xx} va a estar definida por la acción de la carga F , tanto de manera axial, como por los momentos generados por la excentricidad, y por el momento M aplicado. Por otro lado, el cortante V_y va a influenciar a las tensiones tangenciales τ_{xy} y τ_{xz} , pero como el momento de área para el punto A es nulo tanto en

y como en z , las tensiones tangenciales producida por V_y serán nulas. Por último, el momento torsor sí generará tensiones τ_{xy} y τ_{xz} no nulas.

Comenzamos con el cálculo de σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} - \frac{M_y z}{I_{yy}} - \frac{M_z y}{I_{zz}} = \frac{N}{hb} - \frac{M_y h}{2I_{yy}} + \frac{M_z b}{2I_{zz}} \quad (8.38)$$

Donde el axil será $N = -F$ al ser de compresión, y los momentos:

$$M_y = F e_z + M \cos(\theta) = \frac{Fh}{2} + M \cos(\theta) \quad (8.39)$$

Y:

$$M_z = F e_y + M \sin(\theta) = M \sin(\theta) \quad (8.40)$$

Por otro lado, los cortantes dados por la torsión serán, considerando las coordenadas de A

$$\tau_{xy} = \frac{M_T z}{J_0} = \frac{M_T h}{2J_0} \quad (8.41)$$

$$\tau_{xz} = \frac{M_T y}{J_0} = -\frac{M_T b}{2J_0} \quad (8.42)$$

Y salvo σ_{xx} , τ_{xy} y τ_{xz} , todas las componentes del tensor de tensiones serán nulas. Y con ello la tensión de Von Mises, con los valores ya calculados, será:

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{2\sigma_{xx}^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{xz}^2}{2}} \quad (8.43)$$

De aquí vamos a calcular el valor de M_T para que la tensión de Von Mises sea igual a la de plastificación:

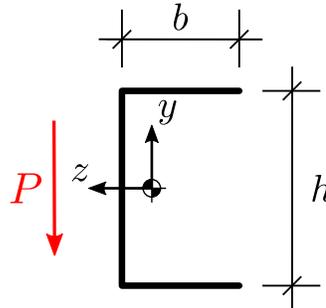
$$2\sigma_{vM}^2 = 2\sigma_y^2 = 2\sigma_{xx}^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{xz}^2 \quad (8.44)$$

$$2\sigma_y^2 = 2\sigma_{xx}^2 + 6M_T^2((h/2J_0)^2 + (-b/2J_0)^2) \quad (8.45)$$

Y el momento torsor que produce la plastificación en el punto A , será:

$$M_T = J_0 \sqrt{\frac{8}{6} \left(\frac{\sigma_y^2 - \sigma_{xx}^2}{h^2 + b^2} \right)} \quad (8.46)$$

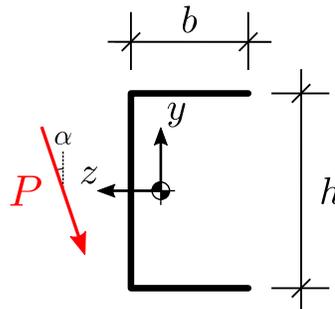
4. Sea un perfil de pared delgada en "C" de espesor t , con alas (tramos horizontales) de longitud b y alma (tramo vertical) de longitud h , sometido a una carga P . En todo momento se considera la carga aplicada en el centro de cortadura, y se asume que $b/t \gg 1$, con $b \sim h$.



Para la sollicitación mostrada en la figura anterior, se pide:

- a) Tensión cortante máxima en valor absoluto, $\tau_{\text{máx}}$ (MPa)

Posteriormente, se rota la carga respecto a la vertical $\alpha = 30^\circ$ tal y como se indica en la siguiente figura:



Ante la nueva sollicitación, se pide:

- a) Tensión cortante en el punto medio del alma en valor absoluto, $\tau_{xy}(y = 0)$ (MPa)
- b) Sabiendo que el centro de cortadura de la sección está en $z = c$ (respecto a ejes centroidales), ¿cómo será la nueva posición c' del centro de cortadura al **augmentar** la longitud b de las alas?
- 1) $c' > c$
 - 2) $c' < c$
 - 3) $c' = c$
 - 4) Faltan datos para determinar la nueva posición
 - 5) Ninguna de las anteriores

Datos: P, b, h, t

Solución

Apartado 1. El momento de inercia de la sección en “C” de pared delgada puede calcularse como (despreciando los términos de inercia de las alas $bt^3/12$)

$$I_{zz} = \frac{1}{12}h^3t + 2bt\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}h^3t + \frac{bth^2}{2} \quad (8.47)$$

El cortante máximo aparece en el centroide de la sección ($\tau_{xy,\text{máx}}$). Para calcularlo, primero se obtiene la contribución al cortante del ala. Según el teorema de Colignon,

$$\tau_{xz}(z) = \frac{V_y Q_z^*(z)}{I_{zz} b(z)}, \quad (8.48)$$

por lo que particularizando en la esquina ($Q_z^*(z) = bt \cdot h/2$, $b(z) = t$),

$$\tau_{xz,\text{máx}} = \frac{V_y bh}{2I_{zz}} \quad (8.49)$$

Así, $\tau_{xy}(y)$ en el alma obedece la siguiente ley

$$\tau_{xy}(y) = \frac{V_y bh}{2I_{zz}} + \frac{V_y Q_z^*(y)}{I_{zz} b(y)} \quad (8.50)$$

El cortante máximo $\tau_{xy,\text{máx}}$ se encuentra a la altura del centroide ($y = 0$), por lo que se toma un área barrida A^* hasta dicho punto ($Q_z^*(0) = ht/2 \cdot h/4$, $b(0) = t$), siendo

$$\tau_{xy,\text{máx}} = \frac{V_y bh}{2I_{zz}} + \frac{V_y h^2}{8I_{zz}} = \frac{Ph^2}{8I_{zz}} \left(1 + 4\frac{b}{h}\right) \quad (8.51)$$

Apartado 2. Para el punto solicitado ($y = 0$), la tensión tangencial que aparece es únicamente debida a la componente vertical de la carga (por simetría en la pieza y en la carga, la contribución de la componente horizontal de la fuerza es nula en el punto medio del ala).

Así, $\tau_{xy}(y = 0)$ es el resultado de antes, teniendo en cuenta ahora que $V_y = P \cos \alpha$.

$$\tau_{xy}(y = 0) = \tau_{xy,\text{máx}}^{\text{previo}} \cos \alpha = \frac{Ph^2 \cos \alpha}{8I_{zz}} \left(1 + 4\frac{b}{h}\right) \quad (8.52)$$

Apartado 3. La distancia c al centro de cortadura respecto al centroide (considerada positiva hacia la izquierda) se halla en

$$c = \frac{b^2 h^2 t}{4I_{zz}} + z_{cg}, \quad (8.53)$$

siendo z_{cg} la distancia del alma al centro de gravedad. Sustituyendo los valores de I_{zz} y $z_{cg} = b^2/(h + 2b)$,

$$c = \frac{3b^2}{h+6b} + \frac{b^2}{h+2b}, \quad (8.54)$$

la cual es monótona creciente con b para $b > 0$. Por tanto, la respuesta correcta es

$$\boxed{c' > c} \quad (8.55)$$

Físicamente, puede observarse que la distancia c' aumenta por dos efectos:

- El primer término de la Ecuación (8.64) indica que el centro de cortadura se desplaza a la izquierda del alma debido al incremento de la fuerza horizontal F resultante de la distribución de tensión tangencial en las alas (para este perfil, dicha distancia es Fh/V_y)
- Por otro lado, en el segundo término de la Ecuación (8.64) se observa que el centro de gravedad se desplaza a la derecha del alma conforme aumenta b

Resultados de las versiones

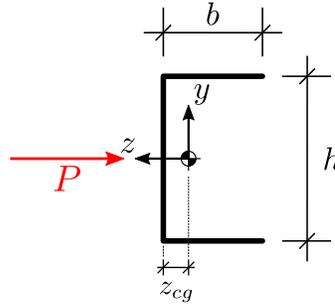
	V1	V2	V3	V4	V5
P [N]	1000	500	850	2000	1500
b [mm]	50	30	40	80	100
h [mm]	100	70	90	150	200
t [mm]	3	1	2	4	5

Cuadro 8.1: Datos del enunciado.

	V1	V2	V3	V4	V5
$\tau_{xy, \text{máx}}$ [MPa]	3.750	8.143	5.366	3.73	1.688
$\tau_{xy}(y=0)$ [MPa]	3.248	7.052	4.647	3.23	1.461
c' [-]	$c' > c$				

Cuadro 8.2: Resultados de las versiones.

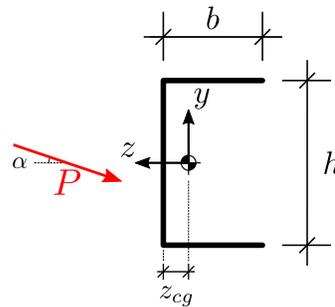
5. Sea un perfil de pared delgada en “C” de espesor t , con alas (tramos horizontales) de longitud b y alma (tramo vertical) de longitud h , sometido a una carga P . En todo momento se considera la carga aplicada en el centro de cortadura, y se asume que $b/t \gg 1$, con $b \sim h$. La distancia del centroide de la sección a la línea media del alma es z_{cg} mm.



Para la sollicitación mostrada en la figura anterior, se pide:

- a) Tensión cortante máxima en valor absoluto, $\tau_{\text{máx}}$ (MPa)

Posteriormente, se rota la carga respecto a la horizontal $\alpha = 30^\circ$ tal y como se indica en la siguiente figura:



Ante la nueva sollicitación, se pide:

- a) Tensión cortante en el punto medio del alma en valor absoluto, $\tau_{xy}(y = 0)$ (MPa)
- b) Sabiendo que el centro de cortadura de la sección está en $z = c$ (respecto a ejes centroidales), ¿cómo será la nueva posición c' del centro de cortadura al **disminuir** la longitud b de las alas?
- 1) $c' > c$
 - 2) $c' < c$
 - 3) $c' = c$
 - 4) Faltan datos para determinar la nueva posición
 - 5) Ninguna de las anteriores

Datos: P, b, h, t, z_{cg}

Solución

Apartado 1. Para una sollicitación horizontal de una sección en "C", el cortante máximo se halla en el ala, a la altura del centroide. Para su cálculo, se obtiene el momento de inercia I_{yy} (despreciando el término de inercia del alma $ht^3/12$)

$$I_{yy} = \frac{1}{6}b^3t + ht \cdot z_{cg}^2 + 2bt \left(\frac{b}{2} - z_{cg} \right)^2 \quad (8.56)$$

Tomando el teorema de Colignon

$$\tau_{xz}(z) = \frac{V_z Q_y^*(z)}{I_{yy} b(z)}, \quad (8.57)$$

y particularizándolo en $z = 0$,

$$\tau_{xz, \text{máx}} = \frac{P(b - z_{cg})^2}{2I_{yy}} \quad (8.58)$$

Apartado 2. Para el punto sollicitado ($y = 0$), la tensión tangencial que aparece es únicamente debida a la componente vertical de la carga (por simetría en la pieza y en la carga, la contribución de la componente horizontal de la fuerza es nula en el punto medio del ala).

Así, $\tau_{xy}(y = 0)$ se obtiene teniendo en cuenta únicamente $V_y = P \sin \alpha$. El cortante en la esquina es

$$\tau_{xz} = \frac{V_y bh}{2I_{zz}} \quad (8.59)$$

Y $\tau_{xy}(y)$ en el alma obedece la siguiente ley

$$\tau_{xy}(y) = \frac{V_y bh}{2I_{zz}} + \frac{V_y Q_z^*(y)}{I_{zz} b(y)} \quad (8.60)$$

Particularizando para $y = 0$ se obtiene la respuesta a este apartado

$$\tau_{xy}(y = 0) = \frac{V_y bh}{2I_{zz}} + \frac{V_y h^2}{8I_{zz}} = \frac{Ph^2 \sin \alpha}{8I_{zz}} \left(4 \frac{b}{h} + 1 \right) \quad (8.61)$$

Donde

$$I_{zz} = \frac{1}{12}h^3t + 2bt \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{12}h^3t + \frac{bth^2}{2} \quad (8.62)$$

Apartado 3. La distancia c al centro de cortadura respecto al centroide (considerada positiva hacia la izquierda) se halla en

$$c = \frac{b^2 h^2 t}{4I_{zz}} + z_{cg}, \quad (8.63)$$

siendo z_{cg} la distancia del alma al centro de gravedad. Sustituyendo los valores de I_{zz} y $z_{cg} = b^2/(h + 2b)$,

$$c = \frac{3b^2}{h + 6b} + \frac{b^2}{h + 2b}, \quad (8.64)$$

la cual es monótona creciente con b para $b > 0$. Por tanto, la respuesta correcta es

$$\boxed{c' < c} \quad (8.65)$$

Físicamente, puede observarse que la distancia c' disminuye por dos efectos:

- El primer término de la Ecuación (8.64) indica que el centro de cortadura se acerca al alma debido al decremento de la fuerza horizontal F resultante de la distribución de tensión tangencial en las alas (para este perfil, dicha distancia es Fh/V_y)
- Por otro lado, en el segundo término de la Ecuación (8.64) se observa que el centro de gravedad también se acerca alma conforme disminuye b

Nótese que en el límite $b \rightarrow 0$ (perfil rectangular, sin alas), el centro de cortadura tiende a situarse en el punto medio del alma (centro de doble simetría) i.e.

$$\lim_{b \rightarrow 0} c'(b) = 0 \quad (8.66)$$

Resultados de las versiones

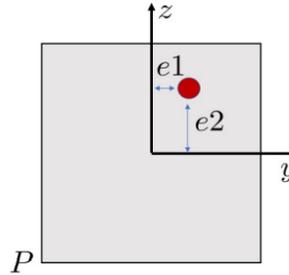
	V1	V2	V3	V4
P [N]	1000	500	850	2000
b [mm]	50	30	40	80
h [mm]	100	60	80	160
t [mm]	3	1	2	4
z_{cg} [mm]	12.5	7.5	10.0	20.0

Cuadro 8.3: Datos del enunciado.

	V1	V2	V3	V4
$\tau_{xz, \text{máx}}$ [MPa]	4.500	11.250	7.172	4.219
$\tau_{xy}(y = 0)$ [MPa]	1.875	4.687	2.988	1.758
c' [-]	$c' < c$			

Cuadro 8.4: Resultados de las versiones.

6. Sobre la sección cuadrada de la figura, de lado $l=40$ mm, se aplica una carga $F=10$ kN de compresión en el punto rojo. Este punto está situado a una distancia $e_1=8$ mm del eje z y una distancia $e_2=20$ mm del eje y .



Se pide,

- Ecuación del eje neutro.
- Tensión en el punto P (MPa) considerando las tracciones positivas y las compresiones negativas.
- Mayor tensión (MPa) en la sección (en valor absoluto)

Solución

a) Ecuación del eje neutro.

La sección está sometida a una fuerza de compresión que provoca en la sección una fuerza y unos momentos al estar aplicada fuera del eje de la figura,

$$N_x(x) = -F; \quad M_y(x) = Fe_2; \quad M_z(x) = Fe_1;$$

siendo las propiedades geométricas de la misma

$$I_{yy} = \frac{1}{12}L^4 = I_{zz}; \quad A = L^2$$

La ecuación del eje neutro se caracteriza porque las tensiones normales en el eje x son nulas,

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{I_{yy}}z - \frac{M_z}{I_{zz}}y = 0$$

sustituyendo las fuerzas y los momentos, así como la geometría de la sección se obtiene,

$$\sigma_{xx} = L^2 + 12e_2z + 12e_1y = 0$$

quedando la **Ecuación de la línea neutra** al sustituir los datos del enunciado,

$$\boxed{96y + 240z + 1600 = 0}$$

- b) Tensión en el punto P (MPa) considerando las tracciones positivas y las compresiones negativas.**

El punto P de la figura está situado en la posición.

$$y = -\frac{L}{2}; \quad z = -\frac{L}{2}$$

La tensión normal en el eje x al sustituir el punto P quedará,

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{I_{yy}}z - \frac{M_z}{I_{zz}}y = -\frac{F}{L^2} + \frac{6Fe2}{L^3} + \frac{6Fe1}{L^3} = \boxed{20\text{MPa}}$$

- c) Mayor tensión (MPa) en la sección (en valor absoluto.)**

La mayor tensión se producirá en el extremo opuesto al punto P

$$y = \frac{L}{2}; \quad z = \frac{L}{2}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{I_{yy}}z - \frac{M_z}{I_{zz}}y = -\frac{F}{L^2} + \frac{6Fe2}{L^3} + \frac{6Fe1}{L^3} = \boxed{-32,5\text{MPa}}$$

al ser una tensión de compresión siendo en valor absoluto,

$$\boxed{\sigma_{xx} = 32,5\text{MPa}}$$

Parte IV
Cortante

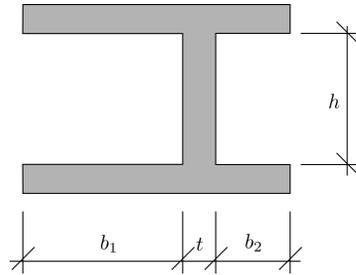
9. Cortante

9.1	Enunciados de ejercicios de Cortante	196
9.2	Solución de ejercicios de Cortante	198



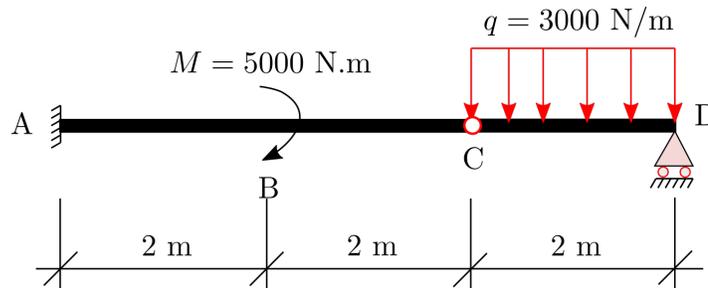
9.1. Enunciados de ejercicios de Cortante

1. Un perfil de acero mostrado en la siguiente figura



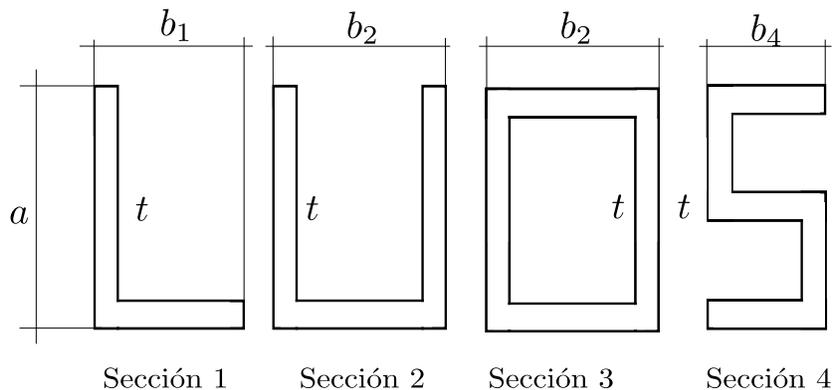
Se pide:

- Determinar los momentos de inercias y sus correspondientes momentos resistentes ante sollicitación flectora vertical y horizontal.
- Determinar el centro de cortadura
- Al usar este perfil para la siguiente estructura sometida a las cargas como se muestra en la siguiente figura

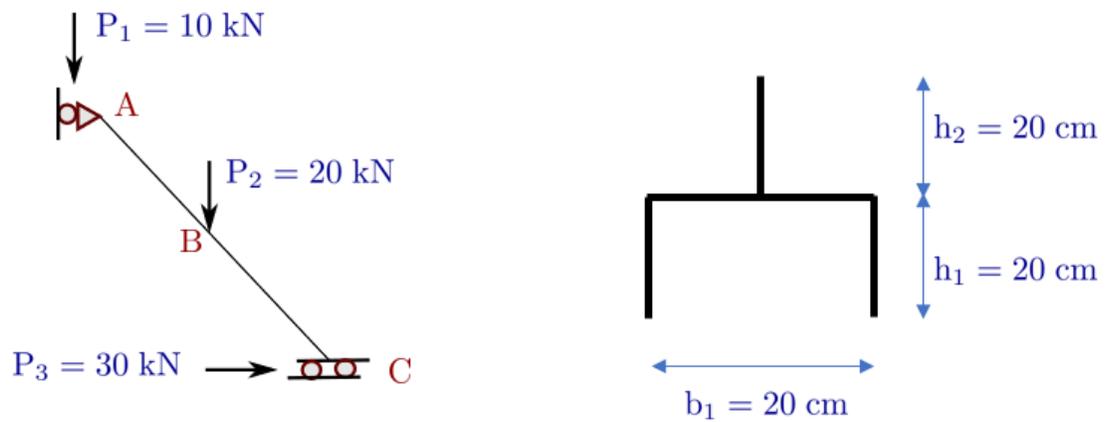


Determinar la tensión tangencial máxima, sabiendo las dimensiones del perfil: $h = 200 \text{ mm}$, $b_1 = 150 \text{ mm}$, $b_2 = 50 \text{ mm}$, $t = 15 \text{ mm}$. Las propiedades mecánicas del acero: $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,25$.

- Determine la posición del centro de cortadura de las siguientes secciones y justifique por qué lo ha colocado donde indica, en caso de necesitar algún cálculo detállelo. Para la realización del ejercicio considere $t \ll a$ y $a \sim b_i$:

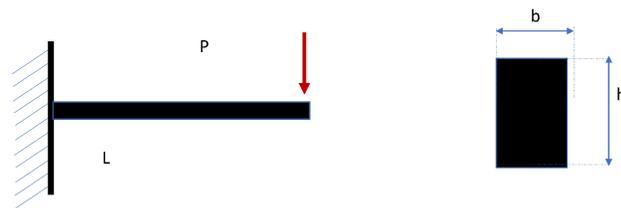


3. La viga inclinada de longitud $L=1\text{m}$ forma 45° con el eje horizontal. Dicha viga está sometida a tres cargas puntuales estando la carga P_2 aplicada en la mitad de la misma.



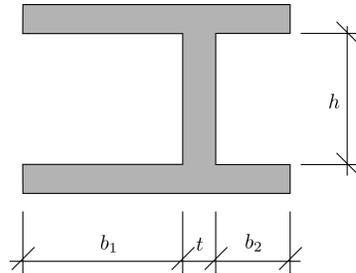
Calcular:

- Diagrama de esfuerzos.
 - Inercias (I_{zz} , I_{yy}) para el perfil de pared delgada de espesor $t=2\text{ cm}$.
 - Tensiones tangenciales (σ_{xz} , σ_{xy}) para el perfil de pared delgada de espesor $t=2\text{ cm}$
4. Dada la viga de la figura, de un material caracterizado por E y ν , con una fuerza en el extremo. Comparar la flecha máxima considerando la aproximación con solo esfuerzos de momentos flectores y la aproximación considerando también esfuerzos cortantes. Ante los resultados, discutir si es valida la aproximación usando solo los esfuerzos de momentos flectores en su cálculo.



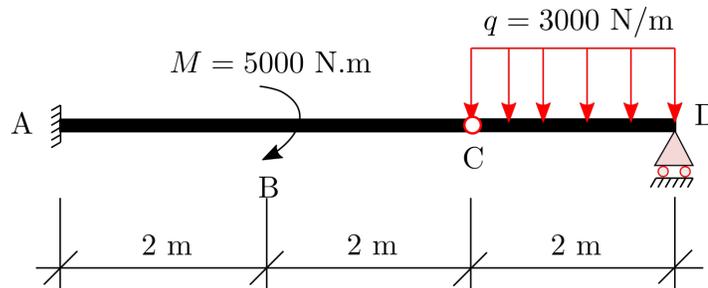
9.2. Solución de ejercicios de Cortante

1. Un perfil de acero mostrado en la siguiente figura



Se pide:

- Determinar los momentos de inercias y sus correspondientes momentos resistentes ante sollicitación flectora vertical y horizontal.
- Determinar el centro de cortadura
- Al usar este perfil para la siguiente estructura sometida a las cargas como se muestra en la siguiente figura



Determinar la tensión tangencial máxima, sabiendo las dimensiones del perfil: $h = 200$ mm, $b_1 = 150$ mm, $b_2 = 50$ mm, $t = 15$ mm. Las propiedades mecánicas del acero: $E = 210$ GPa, $\nu = 0,25$.

Solución

Para determinar los momentos de inercia, se va a determinar primero el centroide de esta sección. Para esto, se divide la sección en 3 partes rectangulares (2 alas y el alma). Por la simetría del eje z , el centroide debe estar en este eje, buscamos su coordenada respecto al punto O que es origen de sistema de coordenadas.

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^3 y_i A_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{(b_1 - b_2)(b_1 + b_2 + t)}{2(b_1 + b_2 + t) + h} = 34,12 \text{ mm}$$

El momento de inercia respecto al eje z que pasa por el centroide:

$$I_{zz} = I_{zz}^{\text{completa}} - I_{zz}^{\text{hueca}} = \frac{1}{12}(b_1 + b_2 + t)(h + 2t)^3 - \frac{1}{12}b_1 h^3 - \frac{1}{12}b_2 h^3 = 8465,875 \text{ cm}^4$$

El momento de inercia respecto al eje y que pasa por el centroide:

$$I_{yy} = I_{yy}^{completa} - I_{yy}^{hueca} = 3002,123 \text{ cm}^4$$

Momento resistente:

$$W_z = \frac{I_{zz}}{y_{max}} = \frac{8465,875}{10 + 1,5} = 736,16 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_{yy}}{z_{max}} = \frac{3002,123}{123,37} = 243,3 \text{ cm}^3$$

Centro de cortadura:

Momento estático:

- Ala izquierda:

$$Q'_z = t(b_1 - t/2 - z)(h/2 + t/2)$$

- Ala derecha:

$$Q'_z = t(b_2 - t/2 - z)(h/2 + t/2)$$

Tensión tangencial en las alas:

- Ala izquierda:

$$\tau_{xz} = \frac{V_y(b_1 + t/2 - z)(h/2 + t/2)}{I_{zz}}$$

- Ala derecha:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y(b_2 + t/2 - z)(h/2 + t/2)}{I_{zz}}$$

La fuerza resultante del flujo de cortante en cada parte del ala:

$$F_1 = \int q dz = \frac{V_y t (b_1 + t/2)^2 (h/2 + t/2)}{I_{zz}}$$

$$F_2 = \int q dz = \frac{V_y t (b_2 + t/2)^2 (h/2 + t/2)}{I_{zz}}$$

El momento respecto al punto O:

$$M_O = -F_1(h + t) + F_2(h + t)$$

Distancia entre O y C:

$$OC = \frac{M_O}{V_y} = \frac{t(h + t)^2 (b_1^2 + b_1 t - b_2^2 - b_2 t)}{2I_{zz}} = 88,045 \text{ mm}$$

La estructura que se va a usar este perfil para las vigas, es una estructura isostática $GH = 0$, por tanto, por las ecuaciones de equilibrio estático y de parte de la rótula, tenemos:

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\implies V_A + V_D = 6000 \\ \sum M_A = 0 &\implies -M_A - M_B - 30000 + 6V_D = 0 \\ \sum M_C^D = 0 &\implies 2V_D - 6000 = 0 \implies V_D = 3000 \text{ (N)}\end{aligned}$$

Ley de cortante:

- Tramo AC: $V = -3000 \text{ N}$
- Tramo CD: $V = 3000 \text{ N}$

Tensión tangencial máxima en el ala:

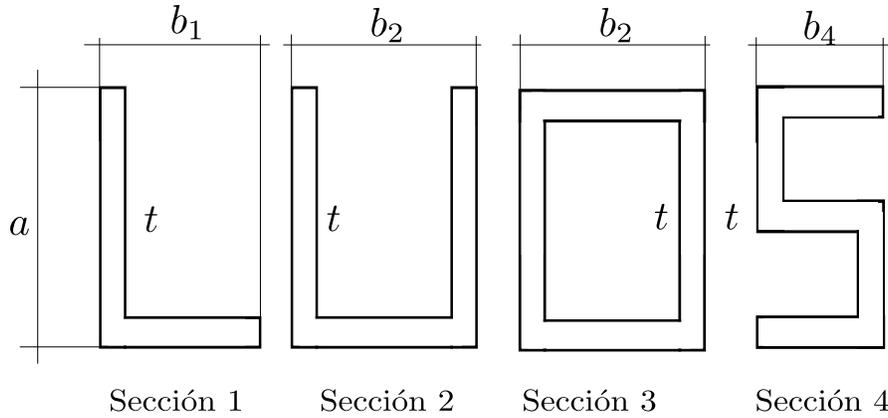
$$\tau_{xz} = \frac{V_y(b_1 + t/2)(h + t)}{2I_{zz}} = 60 \text{ N/cm}^2$$

Tensión tangencial máxima en el alma:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y[(b_1 + b_2 + t)(h + t)/2 + th^2/8]}{I_{zz}} = 99,62 \text{ N/cm}^2$$

Por tanto, la tensión tangencial máxima es $99,62 \text{ N/cm}^2$.

2. Determine la posición del centro de cortadura de las siguientes secciones y justifique por qué lo ha colocado donde indica, en caso de necesitar algún cálculo detallado. Para la realización del ejercicio considere $t \ll a$ y $a \sim b_i$:



Solución

Del equilibrio de momentos sabemos que:

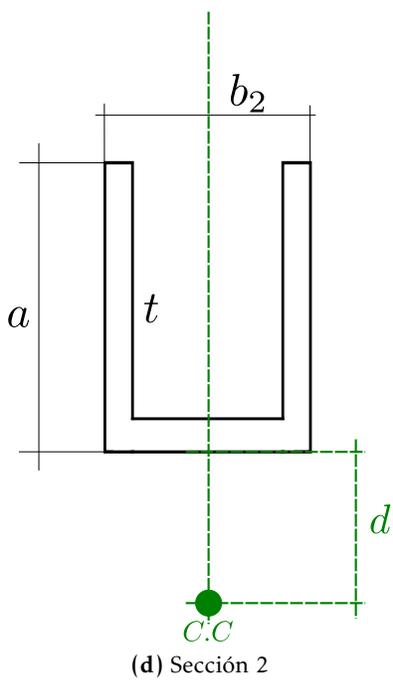
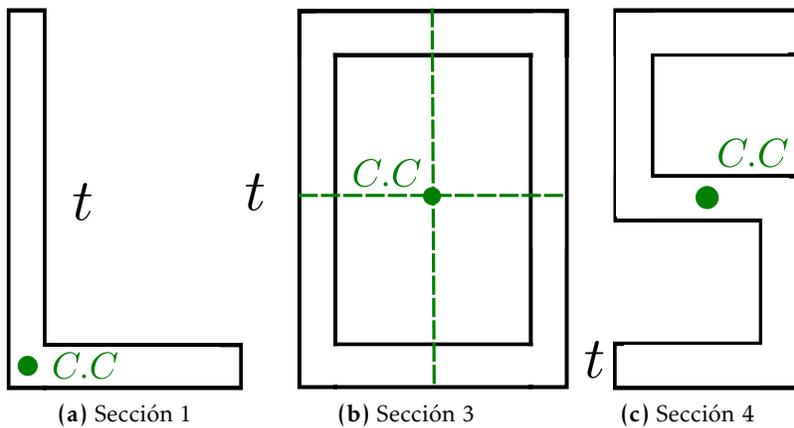
$$F_a \cdot b_2 - F_{b_2} \cdot d = 0$$

Donde F_a es la fuerza que actúa sobre el tramo de longitud a y F_{b_2} es la fuerza que actúa sobre el tramo de longitud b_2 , ambas fuerzas se pueden obtener integrando la ley de flujo cortante a lo largo de la longitud que corresponda:

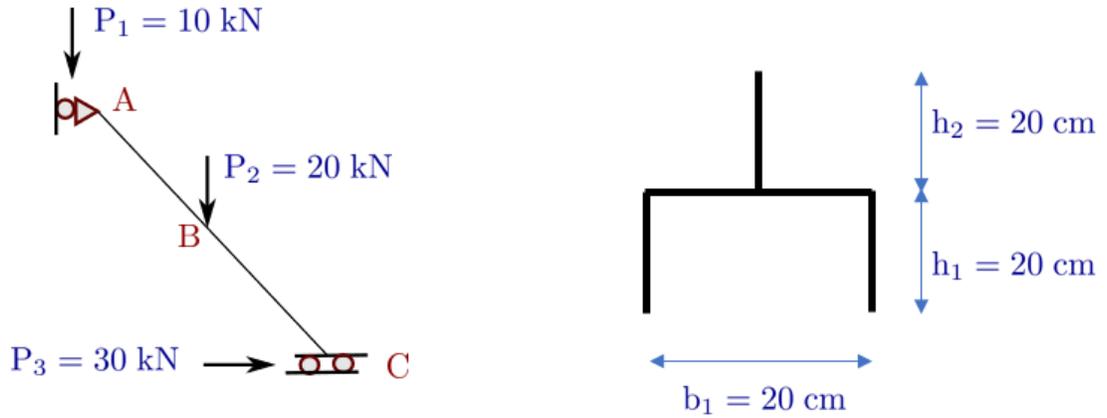
$$F_a = \int_0^a q_a(s) ds; \quad F_{b_2} = \int_0^{b_2} q_{b_2}(s) ds$$

Las leyes de flujo se obtienen aplicando el teorema de Colignon $q_i(s) = V \cdot Q_i(s)/I$. Donde V es el cortante, I es el momento de inercia y $Q(s)$ es la ley de momento estático del área. Con todo esto se llega a la siguiente expresión para d :

$$d = \frac{F_a \cdot b_2}{F_{b_2}} = \frac{b_2 \int_0^a q_a(s) ds}{\int_0^{b_2} q_{b_2}(s) ds} = \frac{b_2 \int_0^a Q_a(s) ds}{\int_0^{b_2} Q_{b_2}(s) ds}$$



3. La viga inclinada de longitud $L=1\text{m}$ forma 45° con el eje horizontal. Dicha viga está sometida a tres cargas puntuales estando la carga P_2 aplicada en la mitad de la misma.



Calcular:

- Diagrama de esfuerzos.
- Inercias (I_{zz} , I_{yy}) para el perfil de pared delgada de espesor $t=2\text{ cm}$.
- Tensiones tangenciales (σ_{xz} , σ_{xy}) para el perfil de pared delgada de espesor $t=2\text{ cm}$

Solución

a) Diagrama de esfuerzos.

En primer lugar se van a calcular los diagramas de esfuerzos de la viga. Para ello, se aplican los pasos siguientes:

P1.- El orden de hiperestaticidad de la estructura:

$$\text{o.h.} = \text{Reacciones} - \text{Ecuaciones} = 3 - 3 = 0$$

P2.- Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0; H_A + P_3 = 0; \quad H_A = -30 \text{ (kN)} \quad (9.1)$$

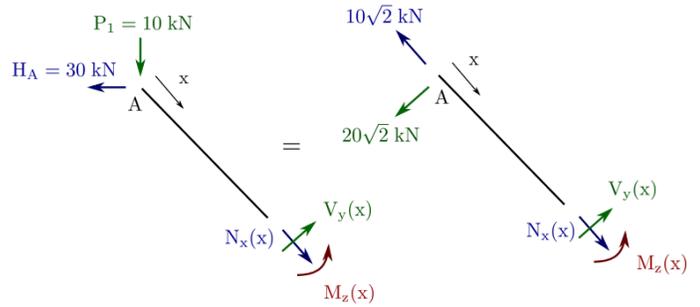
$$\sum F_y = 0; -P_1 - P_2 + V_C = 0; \quad V_C = 30 \text{ (kN)} \quad (9.2)$$

$$\sum M_A = 0; M_C - P_2 \frac{L}{2} \cos(45^\circ) - P_3 L \cos(45^\circ) + V_C L \cos(45^\circ) = 0; \quad M_C = -35,35 \text{ (kNm)} \quad (9.3)$$

P3.- Leyes de esfuerzos:

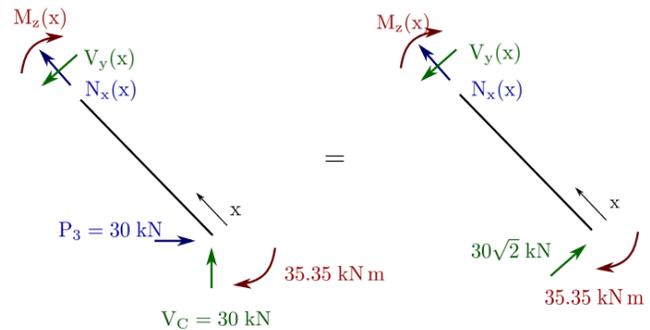
Barra AB: $(0 \leq x < L = \frac{1}{2} \text{ m})$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; N_x(x) &= 10\sqrt{2} \\ \sum F_y = 0; V_y(x) &= 20\sqrt{2} \\ \sum M_p = 0; M_z(x) &= 20\sqrt{2}x \end{aligned}$$

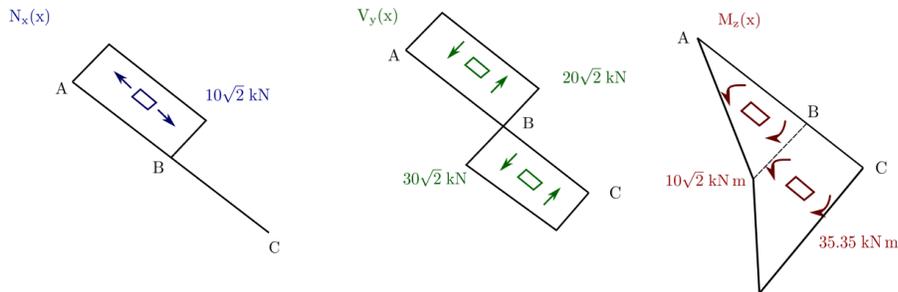


Barra CB: $(0 \leq x < L = \frac{1}{2} \text{ m})$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; N_x(x) &= 0 \\ \sum F_y = 0; V_y(x) &= 30\sqrt{2} \\ \sum M_p = 0; \\ M_z(x) &= -35,35 + 30\sqrt{2}x \end{aligned}$$



El diagrama de esfuerzos de la viga es,



b) Inercias (I_{zz}, I_{yy}) para el perfil de pared delgada de espesor $t=2\text{cm}$.

Para calcular las propiedades geométricas se posicionarán los ejes (y,z) en la figura dada. El eje y es un eje de simetría, por tanto, está en la mitad de la figura mientras que el eje z se posicionará a partir de una referencia utilizando la fórmula siguiente:

$$A_T \cdot y_G = 2A_1 \cdot y_1 + A_3 \cdot y_3 + A_4 \cdot$$

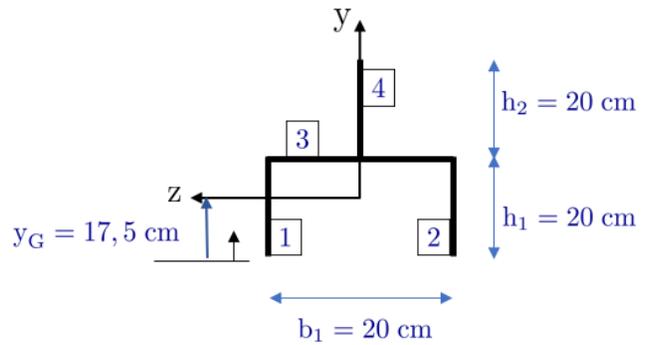
$$A_T = (2A_1 + A_3 + A_4)$$

$$A_1 = 40 \text{ cm}^2 \quad y_1 = 10 \text{ cm}$$

$$A_3 = 40 \text{ cm}^2 \quad y_3 = 20 \text{ cm}$$

$$A_4 = 40 \text{ cm}^2 \quad y_4 = 30 \text{ cm}$$

$$y_G = 17,5 \text{ cm}$$



Una vez situados los ejes de la figura se calculan la inercia respecto al eje z siendo está la inercia necesaria al estar el cortante situado en el eje y:

$$I = \frac{1}{12}(\text{Lado perpendicular al eje})^3 \cdot \text{Lado} + \text{Area} \cdot d^2$$

Inercia respecto al eje z:

$$I_{zz} = 2I_{zz_1} + I_{zz_3} + I_{zz_4}$$

$$I_{zz_1} = I_{zz_2} = \frac{1}{12}20^3 \cdot 2 \text{ cm}^4 + 2 \cdot 20 \cdot (17,5 - 10)^2 \text{ cm}^4 = 3583,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz_3} = \frac{1}{12}2^3 \cdot 20 \text{ cm}^4 + 20 \cdot 2 \cdot (17,5 - 20)^2 \text{ cm}^4 = 263,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz_4} = \frac{1}{12}20^3 \cdot 2 \text{ cm}^4 + 2 \cdot 20 \cdot (30 - 17,5)^2 \text{ cm}^4 = 7583,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz} = 15013,32 \text{ cm}^4$$

Inercia respecto al eje y:

$$I_{yy} = 2I_{yy_1} + I_{yy_3} + I_{yy_4}$$

$$I_{yy_1} = I_{yy_2} = \frac{1}{12}20^3 \cdot 2 \text{ cm}^4 + 2 \cdot 20 \cdot (10)^2 \text{ cm}^4 = 4013,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy_3} = \frac{1}{12}20^3 \cdot 2 \text{ cm}^4 = 1333,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy_4} = \frac{1}{12}2^3 \cdot 20 \text{ cm}^4 = 13,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = 9373,32 \text{ cm}^4$$

- c) **Tensiones tangenciales (σ_{xz}, σ_{xy}) para el perfil de pared delgada de espesor $t=2$ cm.**

Las tensiones tangenciales se calculan utilizando el teorema de Colignon.

$$\tau = \frac{V_{y,\max}}{I_{zz}} \frac{A^* y^*}{b}$$

siendo, $Q=A^*y^*$ el momento estático de la figura donde A^* es el área creada e y^* es la distancia del centro de gravedad al eje de la sección. Para la resolución del apartado se utilizarán tanto las referencias marcadas en la figura final como la coordenada s .

Tramo 12:

$$\tau^{12} = \tau^1 + \frac{V_{y,\max}}{I_{zz}} \frac{A^* y^*}{b}$$

$$\frac{V_{y,\max}}{I_{zz}} = 2,85 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^4} \right)$$

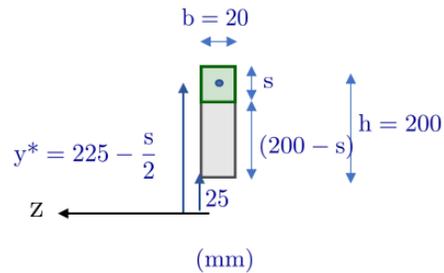
$$\tau_{xy}^1 = 0 \text{ MPa (Extremo del perfil)}$$

$$\tau_{xy}^2 = \tau_{xy}^1 + \frac{V_{y,\max}}{I_{zz}} \frac{A^* y^*}{b} = 7,07 \text{ MPa}$$

$$A^* = 20 s \text{ (mm}^2\text{)}$$

$$y^* = 225 - \frac{s}{2} \text{ (mm)}$$

$$b = 20 \text{ (mm)}$$



Tramo 23=Tramo 24:

$$\tau^{23} = \tau^2 + \frac{V_{y,\max}}{I_{zz}} \frac{A^* y^*}{b}$$

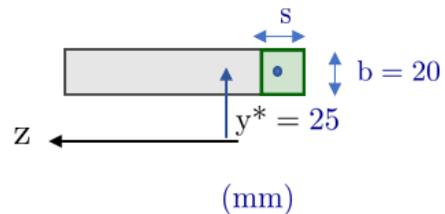
$$\tau_{xz}^2 = \frac{\tau_{xy}^2}{2} = 3,53 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz}^3 = \tau_{xz}^2 + \frac{V_{y,\max}}{I_{zz}} \frac{A^* y^*}{b} = 4,23 \text{ MPa}$$

$$A^* = 20 s \text{ (mm}^2\text{)}$$

$$y^* = 25 \text{ (mm)}$$

$$b = 20 \text{ (mm)}$$



Tramo 35=Tramo 46:

$$\tau^{35} = \tau^3 + \frac{V_{y,\max}}{I_{zz}} \frac{A^* y^*}{b}$$

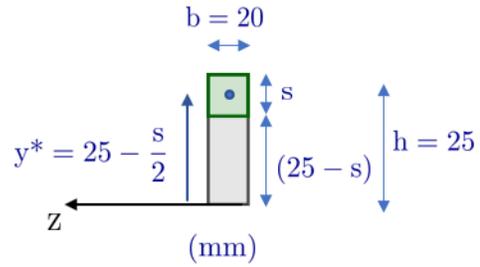
$$\tau_{xy}^3 = \tau_{xz}^3 = 4,23 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy}^4 = \tau_{xy}^3 + \frac{V_{y,\max}}{I_{zz}} \frac{A^* y^*}{b} = 4,33 \text{ MPa}$$

$$A^* = 20 s \text{ (mm}^2\text{)}$$

$$y^* = 25 - \frac{s}{2} \text{ (mm)}$$

$$b = 20 \text{ (mm)}$$



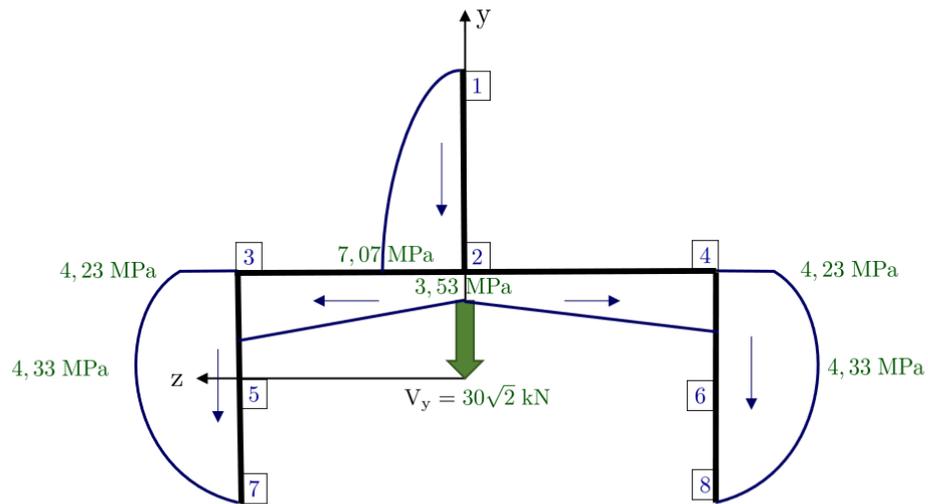
Tramo 57=Tramo 68:

$$\tau^{57} = \tau^5 + \frac{V_{y,\max}}{I_{zz}} \frac{A^* y^*}{b}$$

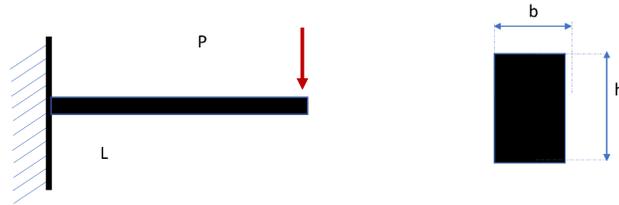
$$\tau_{xy}^5 = 4,33 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy}^7 = 0 \text{ MPa (Extremo del perfil)}$$

La distribución final de la figura es,



4. Dada la viga de la figura, de un material caracterizado por E y ν , con una fuerza en el extremo. Comparar la flecha máxima considerando la aproximación con solo esfuerzos de momentos flectores y la aproximación considerando también esfuerzos cortantes. Ante los resultados, discutir si es válida la aproximación usando solo los esfuerzos de momentos flectores en su cálculo.



Solución

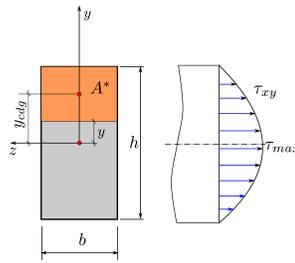
Cuando en la sección, además del momento flector, actúa un esfuerzo cortante se dice que está sometida a flexión simple. Este es el caso que se presenta habitualmente en la realidad,

Hasta el momento hemos calculado las tensiones normales y movimientos omitiendo la presencia de los cortantes, influyendo estos solo en la presencia de tensiones tangenciales. Vamos a justificar en este ejercicio que generalmente los efectos de los cortantes son pequeños comparados con los efectos del desplazamiento producido por la existencia de esfuerzo de momento flector, como también ocurre habitualmente con el efecto de los esfuerzos axiales en el caso de que exista esfuerzo por momento flector. Al estudiar las condiciones para flexión pura, vimos que la ley de Navier se basa en las hipótesis de Navier-Bernoulli, que nos dice que las secciones transversalmente planas continúan siendo planas después de la flexión. Este principio supone que las tensiones tangenciales se distribuye homogéneamente a lo largo de la sección, sin embargo, al calcular su distribución, vemos que no es así.

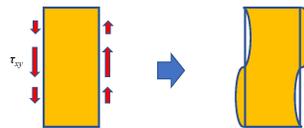
Tenemos que, por ejemplo, para la sección rectangular, la distribución de tensiones tangenciales sigue la ley

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_z^*}{b(y) I_{zz}} = \frac{3}{2} \frac{V_y}{bh} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

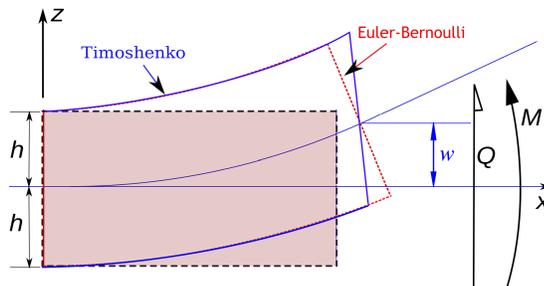
gráficamente



Se aprecia directamente que en los bordes superiores e inferiores de la sección no puede existir tensión tangencial, de hecho en ningún borde libre, causando que que la sección originalmente plana se salga de dicho plano, produciéndose un alabeo. A pesar de este alabeo, s suponemos una rebanada de espesor dx , las distorsiones serán las mismas en ambas caras, de forma que la longitud dx de cualquier fibra longitudinal permanece constante.



Cuando se tiene en cuenta esta diferencia se plantea lo que se conoce como viga de Timoshenko, siendo conocida la viga que cumple las hipótesis de Navier-Bernoulli como viga de Euler-Bernoulli



La energía de deformación asociada al cortante, sustituyendo en el término correspondiente a las tensiones tangenciales en la energía elástica, es:

$$U = \frac{1}{2GA_{rz}} \int_L V_y^2 dx$$

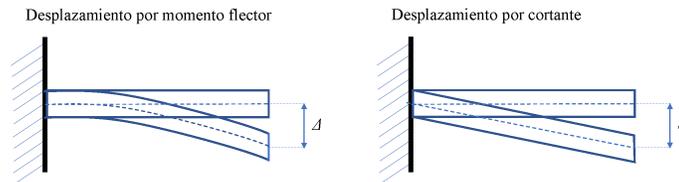
donde A_{rz} es una característica geométrica de la sección que se conoce como sección reducida respecto al eje z , que tiene unidades de área y es del orden de magnitud del área real y viene dada por

$$\frac{1}{A_{rz}} = \frac{1}{I_{zz}^2} \int_{alt} \frac{(Q_z^*)^2}{b^2(y)} dy$$

particularizada para la sección rectangular tenemos

$$A_{rz} = \frac{5}{6}bh$$

Una vez obtenida la energía de deformación podemos aplicar, por ejemplo, el MCU-PTVC para obtener los desplazamientos asociados a cada término.



Para el desplazamiento producido por el esfuerzo de momento flector tenemos:

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI_{zz}} = \frac{PL^3}{3E \frac{bh^3}{12}}$$

y el desplazamiento producido por el esfuerzo de cortante

$$\delta = \frac{PL}{GA_{rz}} = \frac{PL}{\frac{E}{2(1+\mu)} \frac{5}{6}bh}$$

Así:

$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{3(1+\mu)}{5} \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

y como por hipótesis en resistencia $h \ll L$ la influencia del esfuerzo cortante es despreciable en comparación con la influencia del esfuerzo momento flector y la hipótesis de Navier-Bernoulli es aceptable en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería.

Parte V

Torsión

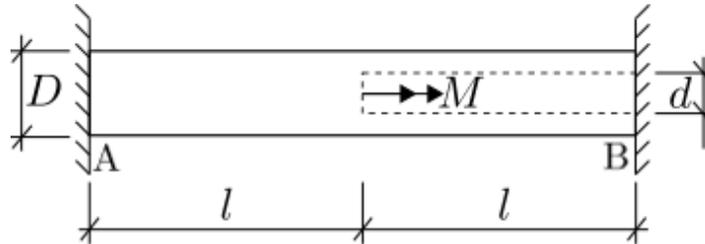
10. Torsión

10.1	Enunciados de ejercicios de Torsión	213
10.2	Solución de ejercicios de Torsión	220



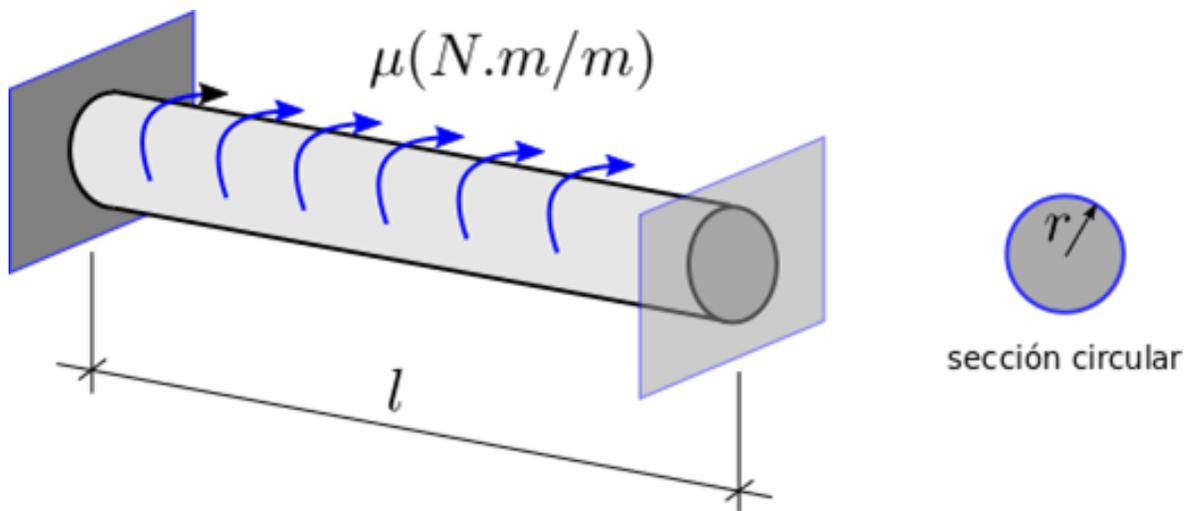
10.1. Enunciados de ejercicios de Torsión

1. Un eje AB de diámetro D de longitud $2l$, empotrado en sus extremos, está sometido a un momento torsor M aplicado en su sección media, como se indica en la siguiente figura. La mitad del eje es hueca, de diámetro interior d . Se conoce que el material del eje AB es elástico lineal y tiene un módulo de elasticidad E y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$

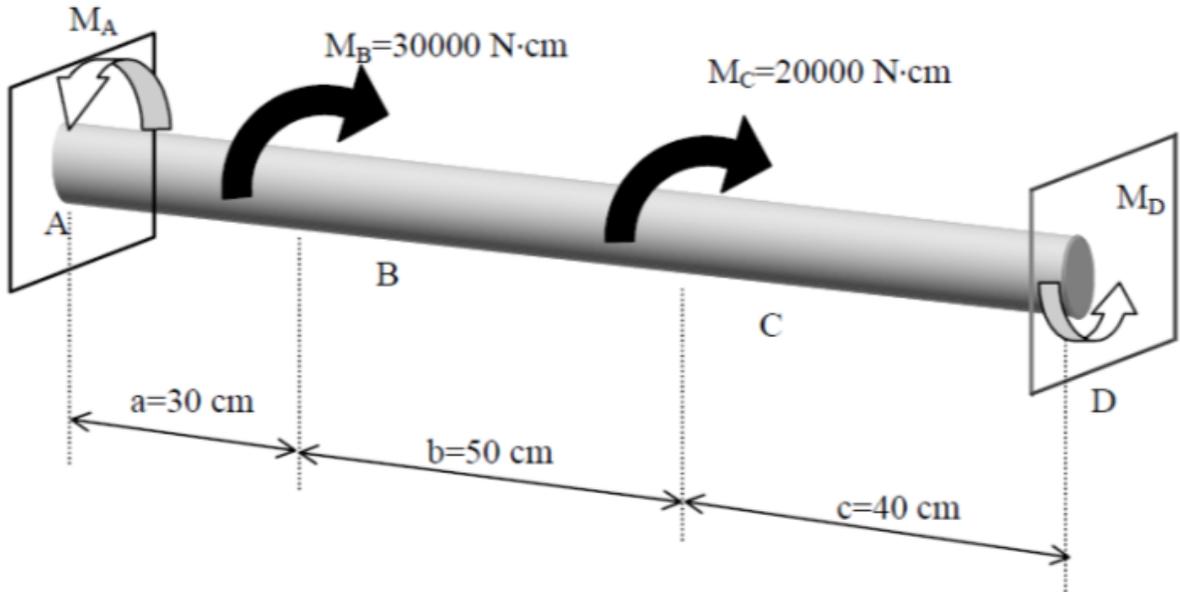


Nota: los parámetros que pueden alterarse según el DNI de alumnos son los diámetros D y d , el momento torsor M , el módulo de elasticidad E .

- a) Calcular los momentos torsor en las secciones A y B
 - b) Determinar el ángulo de giro que habría que girar el empotramiento B para que se anulen las tensiones en el empotramiento A
 - c) Sabiendo que el material tiene una tensión de cortadura admisible $\tau_{adm} = 8000 \text{ N/cm}^2$, determinar el diámetro interior del eje AB de tal forma que no supere esta tensión τ_{adm} en las secciones.
2. Una viga biempotrada está sometida al momento torsor producido por una torsión uniformemente repartida. Hallar el momento torsor M_T y el ángulo de torsión máximo.

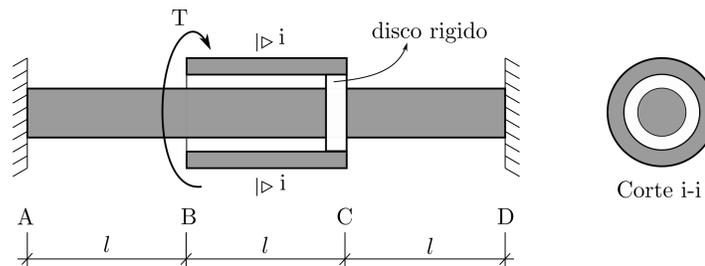


3. Hallar los momentos en los empotramientos M_A y M_D . Dibujar el diagrama de momentos torsores



4. Dada una estructura como se muestra en la siguiente figura, consiste en un tubo con un radio exterior R_{ext} y un grosor de pared de e que está conectado al eje sólido de diámetro D mediante un disco rígido en el punto C. Sobre el tubo se aplica un momento torsor T en el punto B. Se supone que el tubo y el eje sólido son del mismo material elástico lineal: E y ν . Los momentos de inercia polar del tubo y del eje sólido son los siguientes:

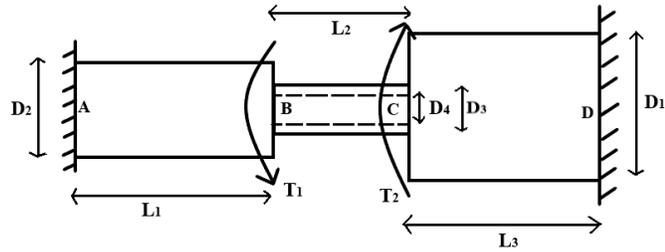
$$I_0 = \frac{\pi(R_{ext}^4 - R_{int}^4)}{2}; \quad I_0 = \frac{\pi R^4}{2}$$



Se pide:

- Grado de hiperestaticidad.
- Determinar el momento torsor en el empotramiento A (en kN.m).
- Determinar la rotación del extremo B del tubo respecto al empotramiento en D (en milésimas de radian).
- Si la tensión cortante admisible para el material es τ_{adm} , determine el factor de seguridad en esta estructura.

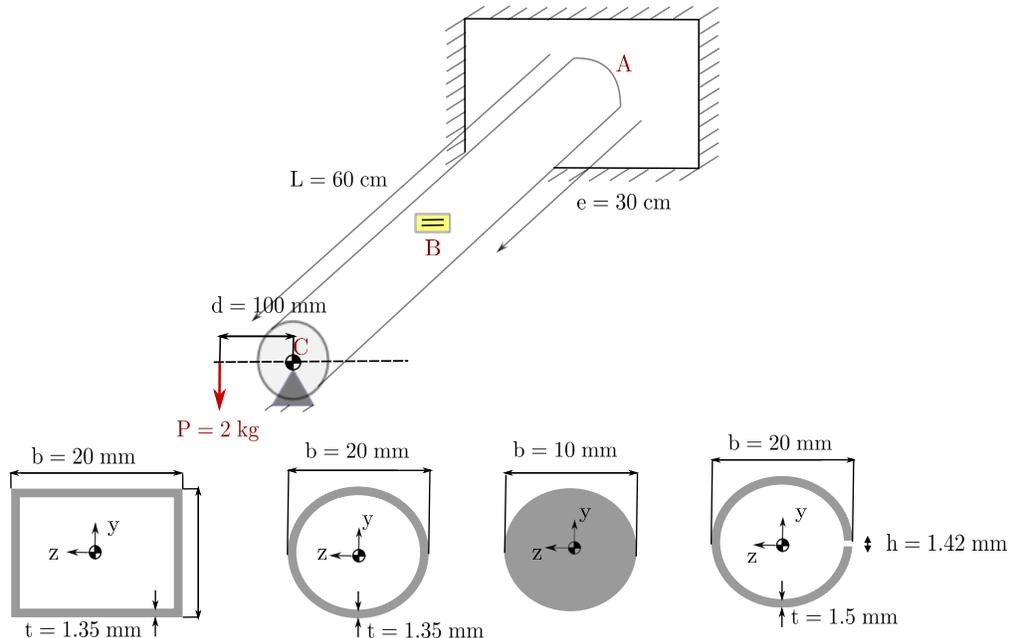
- El árbol torsor de la figura tiene aplicados en el punto B un momento torsor $T_1=2$ kNm y en el punto C un momento torsor $T_2=1.5$ kNm



- El valor máximo del diagrama de momentos torsores del árbol (kNm).
- El ángulo en el punto B (rad).
- El ángulo en el tramo CD ($^{\circ}$).
- El módulo del esfuerzo cortante máximo τ_{max} (MPa).
- El módulo de la deformación angular máxima γ_{max} ($\mu\epsilon$)

Datos: $L_1 = 1000$ mm, $L_2 = 800$ mm, $L_3 = 900$ mm $D_1 = 400$ mm, $D_2 = 350$ mm, $D_3 = 300$ mm, $D_4 = 250$ mm

- La viga de la figura de longitud L está construida de un material conocido (i.e. constantes E y ν). Dicha viga está empotrada en el extremo A mientras que en el extremo C está simplemente apoyada. A una distancia d del extremo C se aplica una carga P provocando en dicha barra un esfuerzo torsor. Adicionalmente, en el punto B se ha colocado un extensímetro a una distancia e del empotramiento A. El experimento se realiza con vigas de distintas secciones geométricas.



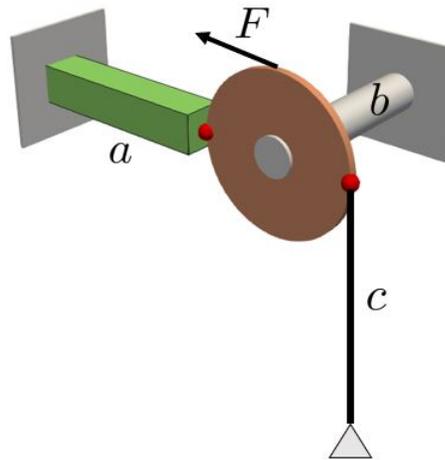
Calcular:

- Inercia a torsión de las vigas $J=I_t$ (mm^4) (considérense 'y' y 'z' los ejes locales de la viga)
- Diagrama del momento torsor.

- c) Las tensiones cortantes τ en los puntos A, B y C para cada sección.
- d) Calcular el giro en los puntos A y C para cada sección.
- e) ¿Cuál de las secciones tiene menor giro en los puntos calculados? Razone la respuesta.
- f) Deformación angular en el punto B de cada sección.

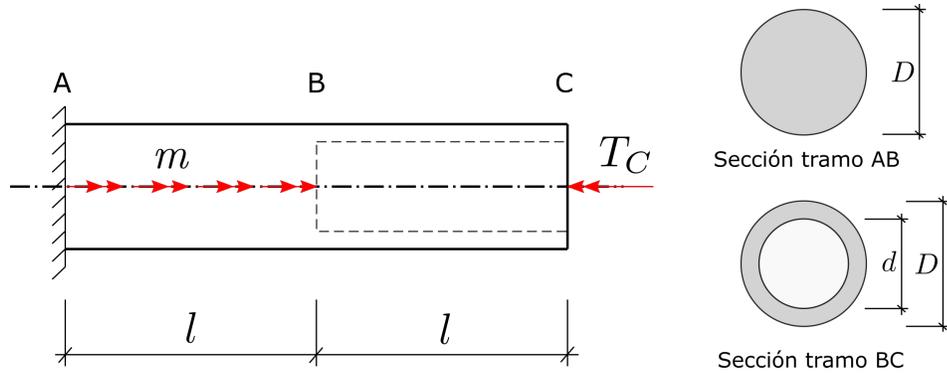
Datos: $E=70 \text{ GPa}$, $\nu=0.33$

7. La estructura de la figura está sometida a una carga F . Está compuesta por un disco rígido (indeformable), unido a una viga sometida a flexión "a", una barra ζ sometida a axil, y una viga "b" sometida a torsión. No se considera la flexión del elemento b, el cual generaría unas reacciones en su empotramiento que equilibraría en x e y el disco rígido. Por ello, sólo se puede usar la ecuación de equilibrio de momentos en el disco para resolver el problema.



Se pide calcular el giro β del disco. Sabiendo que todos los elementos (a, b y c) tienen la misma longitud y asumiendo sabidas las propiedades seccionales y mecánicas de todos los elementos. El disco tiene un radio R .

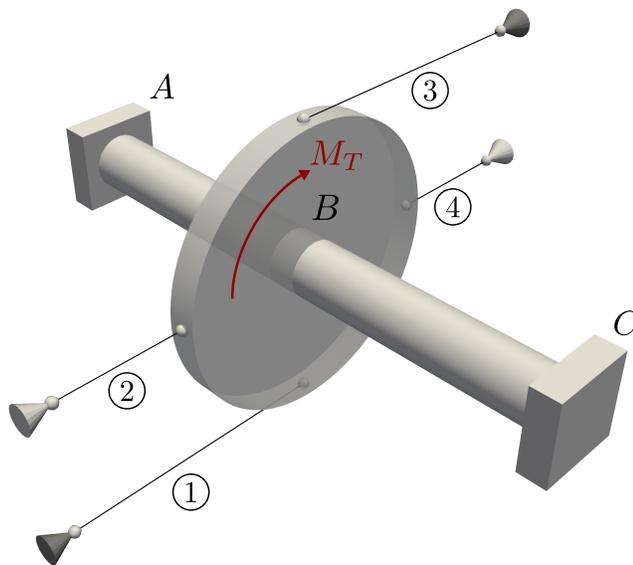
8. Un eje ABC de longitud $2l$, empotrado en su extremo A, está sometido a un momento torsor m por unidad de longitud a lo largo del tramo AB y un momento torsor T_C aplicado en la sección del extremo C, como se indica en la siguiente figura. La mitad del eje es hueca, de diámetro interior d . Se conoce que el material del eje ABC es elástico lineal y tiene un módulo de elasticidad E y un coeficiente de Poisson ν .



Datos: $D = 40 \text{ mm}$, $d = 20 \text{ mm}$, $l = 500 \text{ mm}$, $m = 2 \text{ kN}\cdot\text{mm}/\text{mm}$, $T_C = 2000 \text{ kN}\cdot\text{mm}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,2$

- a) Determinar el momento torsor en la sección B.
 - b) Calcular el ángulo de giro en la sección C.
 - c) Determinar el factor de reserva, sabiendo que el material tiene una tensión de cortadura admisible $\tau_{adm} = 180 \text{ MPa}$.
9. La estructura mostrada en la figura está compuesta por dos árboles AB y BC de igual longitud L (empotrados en A y C , respectivamente), unidos al disco infinitamente rígido, de radio R , en B . Además, el disco está sujeto mediante las barras 1, 3 (de longitud ℓ), y 2, 4 (de longitud $\ell/2$). Se conoce la rigidez axial de todas las barras, EA , y la rigidez a torsión de los dos árboles GJ .

Se somete todo el conjunto a un par M_T , aplicado sobre el disco.

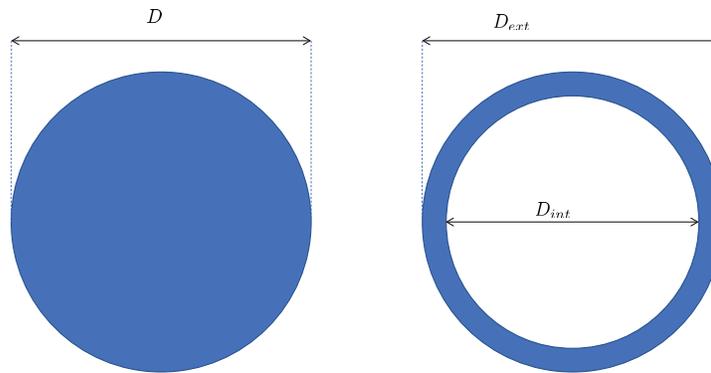


Datos: M_T, R, L, ℓ, EA, GJ

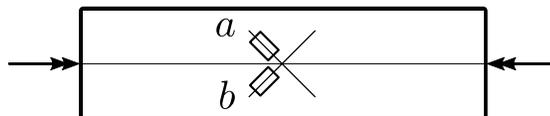
Se pide:

- Orden de hiperestaticidad del conjunto (para los árboles, tener únicamente en cuenta la parte asociado a su giro) (0.25 puntos)
- Esfuerzo axial de la barra 1, N_1 , considerado positivo a tracción (kN).
- Alargamiento de la barra 2, $\Delta\ell_2$ (mm).
- Momento torsor en A, $M_{T,A}$, en valor absoluto (kNm).
- Momento torsor en C, $M_{T,C}$, en valor absoluto (kNm).
Sabiendo que las barras son de sección circular, con inercia a flexión EI , se desea calcular,
- Valor de M_T para que aparezca pandeo en la(s) barra(s), considerado positivo según el signo indicado en la figura (kNm).
- Giro del disco (en valor absoluto) justo antes de producirse el pandeo.

10. Dado un perfil de sección circular llena, de diámetro D , determinar el perfil que tenga la misma resistencia, siendo dicho perfil $\frac{D_{ext}}{D_{int}} = 0,8$. Comparar las rigideces de ambos perfiles y el peso de los mismos, suponiendo que están hechos del mismo material.



- Sea un árbol empotrado en un extremo y de perfil de sección circular no llena, con diámetro exterior $2R$ y diámetro interior $1,6R$, con $R = 0,2$ m. A una distancia $L = 4R$ de la base y $2R$ del centro del árbol se le aplica una carga P en dirección normal al eje del árbol. Las propiedades del árbol son modulo de Young $E = 200$ GPa, $S_y = 0,25E$. Suponiendo que el fallo del árbol viene descrito por el criterio de Von Mises, determinar el valor de P para llegar al fallo.
- Un árbol circular transmite una potencia de 73 kW a 2000 rpm. A 45° del eje se han colocado dos extensímetros a y b , como muestra la figura. La lectura de las bandas durante un ensayo de carga proporciona el resultado $\varepsilon_b - \varepsilon_a = 10^{-3}$. Para dimensionar el árbol a resistencia, se ha utilizado el criterio de Von Mises, con un coeficiente de seguridad $X = 1,8$ y un margen de seguridad (adicional) mínimo de $MS = +0,5$.



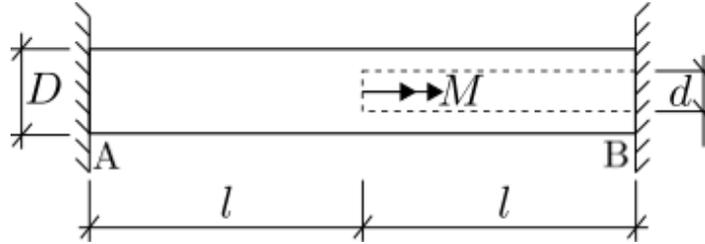
Se pide:

- a) Direcciones principales sobre la superficie del árbol
- b) Tensión equivalente de Von Mises durante el ensayo
- c) Tensión longitudinal máxima durante el ensayo
- d) Tensión cortante máxima durante el ensayo
- e) El diámetro mínimo que ha de tener el árbol para cumplir el requisito de resistencia

Datos: $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $S_y = 350 \text{ MPa}$

10.2. Solución de ejercicios de Torsión

1. Un eje AB de diámetro D de longitud $2l$, empotrado en sus extremos, está sometido a un momento torsor M aplicado en su sección media, como se indica en la siguiente figura. La mitad del eje es hueca, de diámetro interior d . Se conoce que el material del eje AB es elástico lineal y tiene un módulo de elasticidad E y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$



Nota: los parámetros que pueden alterarse según el DNI de alumnos son los diámetros D y d , el momento torsor M , el módulo de elasticidad E .

Solución

- a) Calcular los momentos torsor en las secciones A y B.

$$M_A = \frac{D^4}{2D^4 - d^4}M$$

$$M_B = \frac{D^4 - d^4}{2D^4 - d^4}M$$

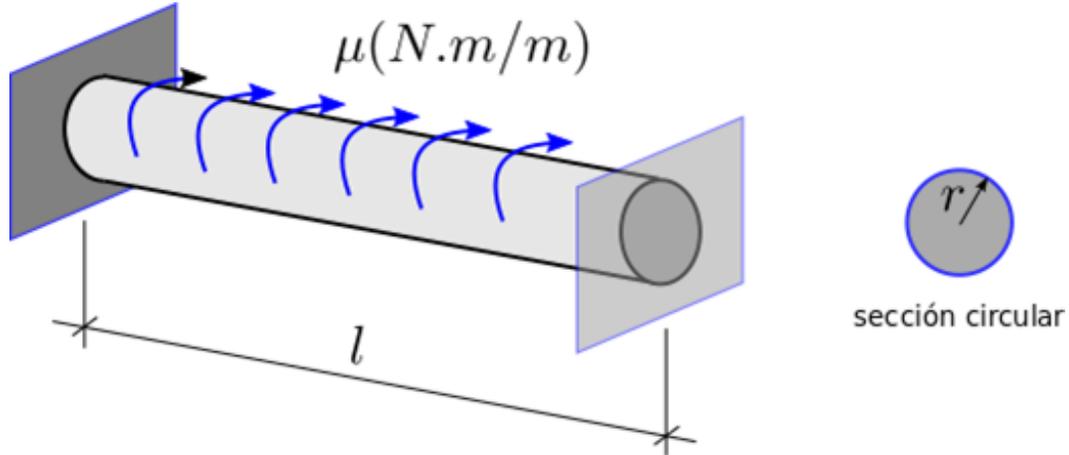
- b) Determinar el ángulo de giro que habría que girar el empotramiento B para que se anulen las tensiones en el empotramiento A.

$$\theta_B = \frac{32Ml}{\pi(D^4 - d^4)}$$

- c) Sabiendo que el material tiene una tensión de cortadura admisible $\tau_{adm} = 8000$ N/cm², determinar el diámetro interior del eje AB de tal forma que no supere esta tensión τ_{adm} en las secciones.

$$d_{max} = \sqrt[4]{\frac{\pi D^4 \tau_{adm} - 16MD}{\pi \tau_{adm}}}$$

2. Una viga biempotrada está sometida al momento torsor producido por una torsión uniformemente repartida. Hallar el momento torsor M_T y el ángulo de torsión máximo.



Solución

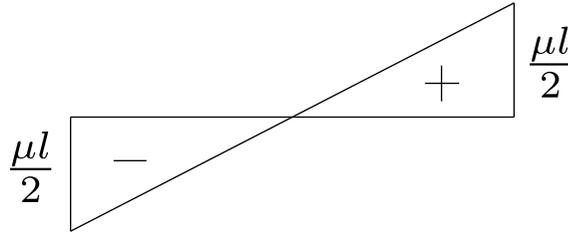
Por ser una viga simétrica, los momentos de empotrados han de ser iguales

$$M_A = M_B = \frac{\mu l}{2} \tag{10.1}$$

El momento torsor en la sección a una distancia x de punto A:

$$M_T(x) = -M_A + \mu x = -\frac{\mu l}{2} + \mu x \tag{10.2}$$

Diagrama de momento torsor:



El ángulo de torsión en la sección a una distancia x de punto A:

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{M_T}{GI_0} dx = \frac{1}{GI_0} \left(-\frac{\mu l}{2} x + \frac{\mu x^2}{2} \right) \tag{10.3}$$

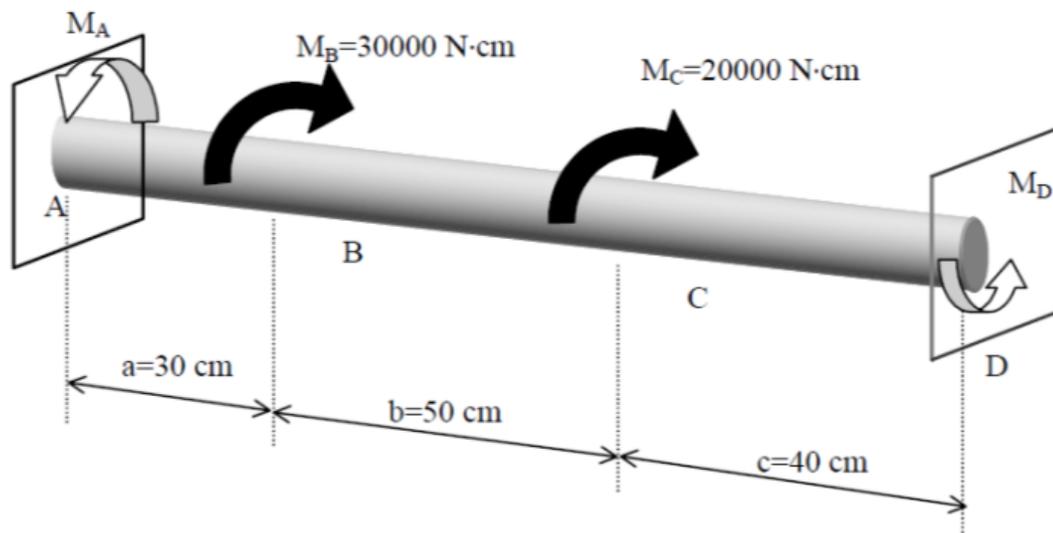
El máximo ángulo de torsión se halla por imponer que

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = 0 \implies x = \frac{l}{2} \tag{10.4}$$

Por tanto, el máximo ángulo de torsión es:

$$\phi_{max} = \left| -\frac{\mu l^2}{8GI_0} \right| = \frac{\mu l^2}{4G\pi r^4} \tag{10.5}$$

3. Hallar los momentos en los empotramientos M_A y M_D . Dibujar el diagrama de momentos torsores



Solución

Equilibrio de momento torsor:

$$M_A - M_B - M_C + M_D = 0 \implies M_A + M_D = 50000 \quad (\text{N.cm}) \quad (10.6)$$

Tramo I - AB:

El momento torsor en este tramo:

$$M_T = -M_A \quad (10.7)$$

El ángulo de torsión en la sección en el punto B por el momento torsor en el tramo AB es

$$\phi_{BA} = -\frac{M_A a}{GI_0} = -\frac{30M_A}{GI_0} \quad (10.8)$$

Tramo II - BC:

El momento torsor:

$$M_T = -M_A + M_B = -M_A + 30000 \quad (10.9)$$

El ángulo de torsión en la sección en el punto C por el momento torsor en el tramo BC es

$$\phi_{CB} = \frac{(-M_A + 30000)b}{GI_0} = \frac{50(-M_A + 30000)}{GI_0} \quad (10.10)$$

Tramo II - CD:

El momento torsor:

$$M_T = -M_A + M_B + M_C = -M_A + 50000 \quad (10.11)$$

El ángulo de torsión en la sección en el punto D por el momento torsor en el tramo BC es

$$\phi_{DC} = \frac{(-M_A + 50000)c}{GI_0} = \frac{40(-M_A + 50000)}{GI_0} \quad (10.12)$$

El ángulo de torsión en el punto D también es la suma de los ángulos de torsión calculados anteriormente

$$\phi_D = \phi_{BA} + \phi_{CB} + \phi_{DC} \quad (10.13)$$

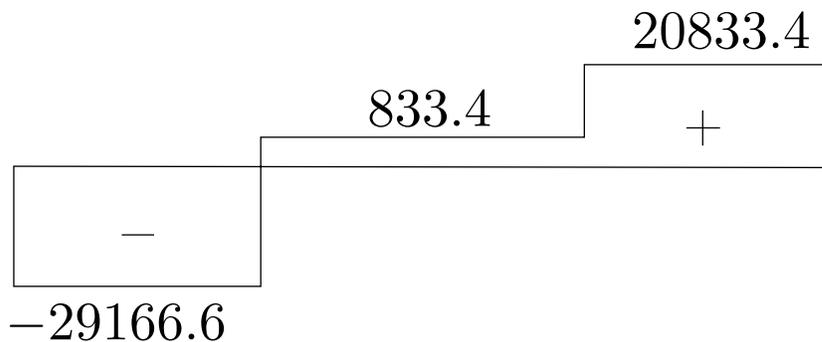
y tiene que ser cero por la condición de empotramiento. Por lo cual, se puede determinar

$$M_A = \frac{3500000}{120} = 29166,6 \text{ N.cm} \quad (10.14)$$

y

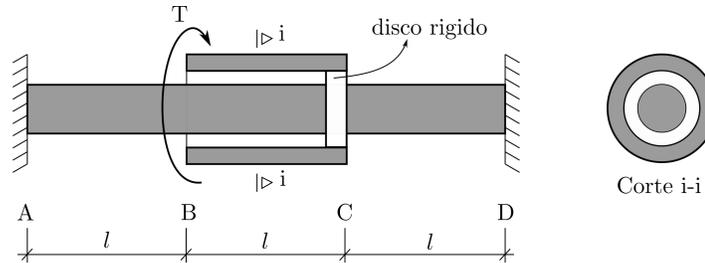
$$M_B = 20833,4 \text{ N.cm} \quad (10.15)$$

Diagrama de momentos torsores:



4. Dada una estructura como se muestra en la siguiente figura, consiste en un tubo con un radio exterior R_{ext} y un grosor de pared de e que está conectado al eje sólido de diámetro D mediante un disco rígido en el punto C. Sobre el tubo se aplica un momento torsor T en el punto B. Se supone que el tubo y el eje sólido son del mismo material elástico lineal: E y ν . Los momentos de inercia polar del tubo y del eje sólido son los siguientes:

$$I_0 = \frac{\pi(R_{ext}^4 - R_{int}^4)}{2}; \quad I_0 = \frac{\pi R^4}{2}$$



Se pide:

- Grado de hiperestaticidad.
- Determinar el momento torsor en el empotramiento A (en kN.m).
- Determinar la rotación del extremo B del tubo respecto al empotramiento en D (en milésimas de radian).
- Si la tensión cortante admisible para el material es τ_{adm} , determine el factor de seguridad en esta estructura.

Solución

El grado de hiperestaticidad:

$$G.H = 2 - 1 = 1$$

Ecuación de equilibrio estático:

$$\sum M_A = 0 \implies T_A + T_D - T = 0 \quad (10.16)$$

o sea:

$$T_A = T - T_D \quad (10.17)$$

Ley de momento torsor:

$$M_T = \begin{cases} T_D - T & \text{para } 0 \leq x \leq 2l \\ T_D & \text{para } 2l < x \leq 3l \end{cases} \quad (10.18)$$

La condición de compatibilidad: el ángulo de torsión relativo entre dos extremos A y D del eje sólido debe ser nulo, o sea:

$$\phi_{AD} = \int_0^{2l} \frac{M_T}{GI_0} dx + \int_{2l}^{3l} \frac{M_T}{GI_0} dx = \int_0^{2l} \frac{T_D - T}{GI_0} dx + \int_{2l}^{3l} \frac{T_D}{GI_0} dx = \frac{l(3T_D - 2T)}{GI_0} = 0 \quad (10.19)$$

Pues, se puede obtener los momentos torsores de reacción en los empotramientos A y D:

$$\begin{cases} T_A = \frac{T}{3} \\ T_D = \frac{2T}{3} \end{cases}$$

Rotación del extremo B del tubo:

$$\phi = \int_0^l \frac{T}{GI_0} + \int_0^l \frac{T_D}{GI_0} = \frac{2Tl}{G\pi(R_{ext}^4 - R_{int}^4)} + \frac{2T_D l}{G\pi R^4} \quad (10.20)$$

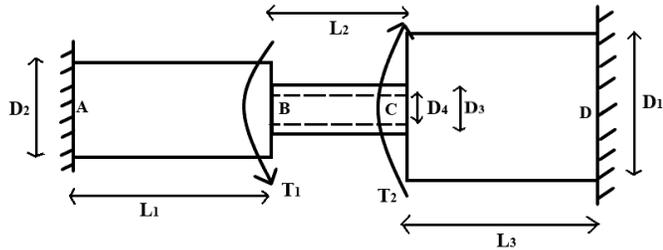
Factor de seguridad:

$$F.S = \frac{\tau_{adm}}{\max \left\{ \frac{T_D R}{I_0^{solido}}, \frac{T R_{ext}}{I_0^{tubo}} \right\}}$$

Cuadro 10.1: Versiones del examen

Versión	Datos								Preguntas			
	T (kN.m)	R _{ext} (m)	e (m)	l (m)	E (GPa)	ν	D (m)	τ _{adm} (Mpa)	1	2 (kN.m)	3 (mrad)	4
I	8	0.05	0.01	0.6	70	0.25	0.05	350	1	8/3	215,83	1,610
II	35	0.06	0.02	1.2	210	0.3	0.06	850	1	35/3	304,29	1,544
III	10	0.05	0.01	0.6	70	0.25	0.05	350	1	10/3	269,79	1,288
IV	42	0.06	0.02	1.2	210	0.3	0.06	850	1	14	365,15	1,287

- El árbol torsor de la figura tiene aplicados en el punto B un momento torsor $T_1=2$ kNm y en el punto C un momento torsor $T_2=1.5$ kNm



- El valor máximo del diagrama de momentos torsores del árbol (kNm).
- El ángulo en el punto B (rad).
- El módulo de la tensión cortante máxima τ_{max} (MPa).
- El módulo de la deformación angular máxima γ_{max} ($\mu\epsilon$)

Datos: $L_1 = 1000$ mm, $L_2 = 800$ mm, $L_3 = 900$ mm $D_1 = 400$ mm, $D_2 = 350$ mm, $D_3 = 300$ mm, $D_4 = 250$ mm, $G = 80$ MPa,

Solución

- El valor máximo del diagrama de momentos torsores del árbol (kNm).**

P1.- Calcular las constantes torsionales de cada barra:

$$J_{AB} = \frac{\pi R_{AB}^4}{2} = \frac{\pi D_2^4}{32} = \boxed{1,47 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 = J_{AB}}$$

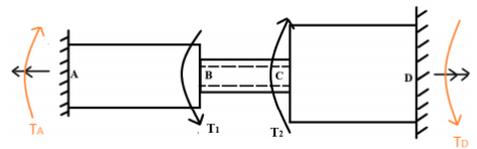
$$J_{BC} = \frac{\pi (R_{BCext}^4 - R_{BCint}^4)}{2} = \frac{\pi (D_3^4 - D_4^4)}{32} = \boxed{4,12 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 = J_{BC}}$$

$$J_{DC} = \frac{\pi R_{DC}^4}{2} = \frac{\pi D_1^4}{32} = \boxed{2,51 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 = J_{AB}}$$

P2.- Ecuación de equilibrio para el momento torsor en el árbol:

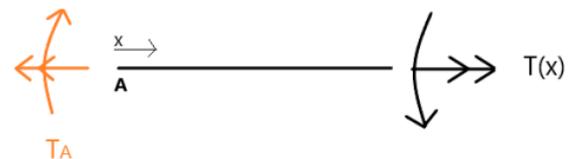
$$\sum T_x = 0 \rightarrow T_D + T_1 - T_2 - T_A = 0$$

$$\boxed{T_D = -T_1 + T_2 + T_A} \quad (I)$$

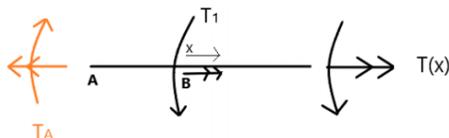


P3.- Analizar cada tramo del árbol:

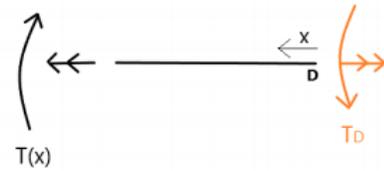
$$\mathbf{AB} : (0 \leq x < L_1) \quad T(x) = T_A$$



$$\mathbf{BC} : (0 \leq x < L_2) \quad T(x) = T_A - T_1$$



DC : $(0 \leq x < L_3) \quad T(x) = T_D$



P4.- Condición de contorno en los apoyos:

Apoyo A. Impedido el giro de torsión. $\psi_A = 0$

Apoyo D. Impedido el giro de torsión. $\psi_D = 0$

Imponiendo dichas condiciones de contorno para el giro desde A hasta D:

$$\psi_B = \psi_A + \psi_{AB} \quad (\text{II})$$

$$\psi_C = \psi_B + \psi_{BC} \quad (\text{III})$$

$$\psi_D = \psi_C + \psi_{CD} \quad (\text{IV})$$

siendo $\psi_{ij} = \frac{T L}{G J_{ij}}$

Combinando las ecuaciones (II),(III),(IV) se obtiene:

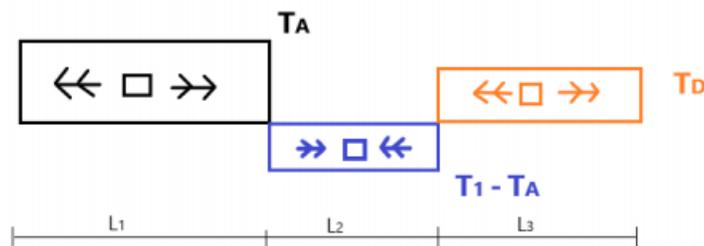
$$0 = \psi_{AB} + \psi_{BC} + \psi_{CD} = \frac{T_A L_1}{G J_{AB}} + \frac{(T_A - T_1) L_2}{G J_{BC}} + \frac{(T_A - T_1 - T_2) L_3}{G J_{DC}} \quad (\text{V})$$

Finalmente, se despeja la ecuación (V), siendo el valor del momento torsor máximo en el punto A:

$$T_A = 1,36 \text{ (kNm)}$$

$$T_D = 0,86 \text{ (kNm)}$$

El diagrama de momentos flectores del árbol será:



b) El ángulo en el punto B (rad).

El ángulo se determina utilizando la ecuación (II)

$$\psi_A = 0 \quad \rightarrow \quad \psi_B = \psi_A + \psi_{AB} = \frac{T_A L_1}{G J_{AB}} \quad \rightarrow \quad \psi_B = 0,012 \text{ rad}$$

c) **El módulo del esfuerzo cortante máximo τ_{max} (MPa).**

El esfuerzo cortante de los tramos del árbol macizo (AB,CD) es:

$$\tau_{AB} = \frac{16 T_A}{\pi D_2^3}$$

$$\tau_{CD} = \frac{16 T_D}{\pi D_1^3}$$

El esfuerzo cortante del tramo del árbol hueco (BC) es:

$$\tau_{BC} = \frac{(T_1 - T_A) R_{ext}}{J_{BC}}$$

$$\tau_{BC} = \frac{(T_1 - T_A) R_{int}}{J_{BC}}$$

siendo el módulo máximo el esfuerzo cortante del tramo del árbol hueco (BC):

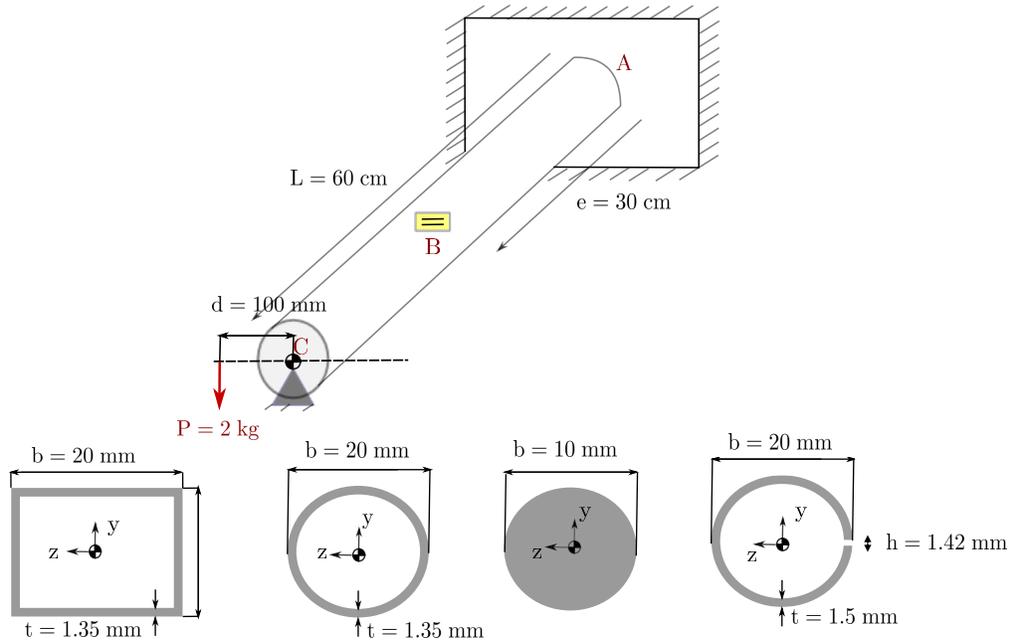
$$\tau_{BC} = \frac{(T_1 - T_A) R_{ext}}{J_{BC}} = \boxed{0,23 \text{ (MPa)} = \tau_{BC}}$$

d) **El módulo de la deformación angular máxima γ_{max} ($\mu\epsilon$)**

El módulo del esfuerzo cortante máximo es en el tramo (BC), por tanto, en dicho tramo es donde se producirá el módulo de la deformación angular máxima:

$$\gamma_{BC} = \frac{\tau_{BC}}{G} = \boxed{2875 \text{ } (\mu\epsilon) = \gamma_{BC}}$$

6. La viga de la figura de longitud L está construida de un material conocido (i.e. constantes E y ν). Dicha viga está empotrada en el extremo A mientras que en el extremo C está simplemente apoyada. A una distancia d del extremo C se aplica una carga P provocando en dicha barra un esfuerzo torsor. Adicionalmente, en el punto B se ha colocado un extensímetro a una distancia e del empotramiento A. El experimento se realiza con vigas de distintas secciones geométricas.



Calcular:

- Inercia a torsión de las vigas $J=I_t$ (mm^4) (considérense 'y' y 'z' los ejes locales de la viga)
- Diagrama del momento torsor.
- Las tensiones cortantes τ en los puntos A, B y C para cada sección.
- Calcular el giro en los puntos A y C para cada sección.
- ¿Cuál de las secciones tiene menor giro en los puntos calculados? Razone la respuesta.
- Deformación angular en el punto B de cada sección.

Datos: $E=70 \text{ GPa}$, $\nu=0.33$

Solución

- Inercia a torsión de las vigas $J=I_t$ (mm^4) (considérense 'y' y 'z' los ejes locales de la viga)**

La constante torsional de cada una de las secciones es:

Sección circular hueca:

$$J_{\text{circular}} = \frac{\pi (R_{\text{ext}}^4 - R_{\text{int}}^4)}{2} = \frac{\pi (D_{\text{ext}}^4 - D_{\text{int}}^4)}{32} = \boxed{6914 \text{ mm}^4} \quad (10.21)$$

Sección circular maciza:

$$J_{\text{circular}} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} = \boxed{981,75 \text{ mm}^4} \quad (10.22)$$

Sección circular hueca abierta:

$$J_{\text{circular}} = \frac{1}{3} 2 \pi r e^3 = \boxed{65,38 \text{ mm}^4} \quad (10.23)$$

siendo r el radio de la línea media de la sección hueca abierta ($r=9.25\text{mm}$).

Sección cuadrada hueca: (Hipótesis: $b/t \geq 10$)

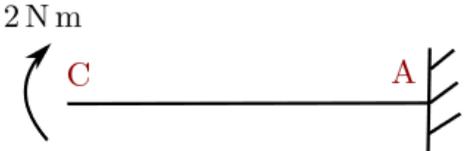
$$J_{\text{cuadrada}} = \frac{4 A^*}{\frac{P^*}{e}} = t b^3 = \boxed{8757,31 \text{ mm}^4} \quad (10.24)$$

siendo A^* el área de la línea media y P^* el perímetro de la línea media.

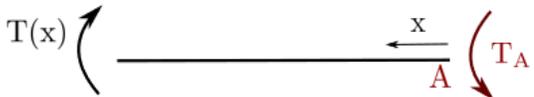
b) Diagrama del momento torsor.

El diagrama del momento torsor es función de la carga aplicada y no depende del tipo de sección de la viga. Para calcularlo, se podrían aplicar los siguientes pasos:

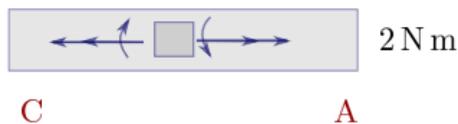
P1.- Plantear la ecuación de equilibrio para el momento torsor en el árbol:

$$\sum T_x = 0 \rightarrow T_A + T = 0 \rightarrow T_A = -T = -2 \text{ N m}$$


P2.- Analizar el tramo del árbol AC:

$$\text{AC: } (0 \leq x < L) \quad T(x) = T_A$$


P3.- Dibujar el diagrama del momento torsor:



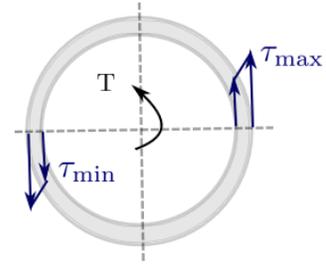
c) Las tensiones cortantes τ en los puntos A, B y C en cada una de las secciones.

Las tensiones tangenciales son las mismas en todos los puntos del árbol porque el momento torsor es constante para todos los puntos del mismo. A continuación se especifica la tensión para cada una de las secciones dadas:

Sección circular hueca:

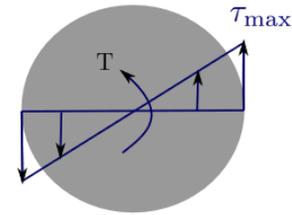
$$\tau_{AC,max} = \frac{T_A R_{ext}}{J_{AC}} = \boxed{2,89 \text{ MPa}} \quad (10.25)$$

$$\tau_{AC,min} = \frac{T_A R_{int}}{J_{AC}} = \boxed{2,50 \text{ MPa}} \quad (10.26)$$



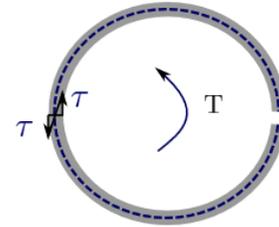
Sección circular maciza:

$$\tau_{AC,max} = \frac{T_A R_{ext}}{J_{AC}} = \boxed{10,18 \text{ MPa}} \quad (10.27)$$



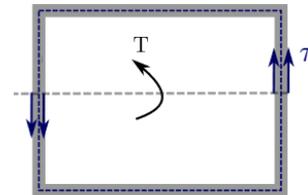
Sección circular hueca abierta:

$$\tau_{AC,max} = \frac{T_A t}{J_{AC}} = \boxed{45,88 \text{ MPa}} \quad (10.28)$$



Sección cuadrada hueca:

$$\tau_{AC,max} = \frac{T_A}{2 S_m t_i} = 2,13 \text{ MPa} \quad (10.29)$$



siendo, S_m el área encerrada por la línea media.

d) Calcular el giro en los puntos A y C para cada sección.

El ángulo en el punto A para todas los árboles es nulo porque el punto A es un empotramiento y no puede girar.

El giro en el punto C para cada una de las secciones del árbol será ($G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 26,31 \text{ MPa}$):

Sección circular hueca:

$$\psi_C = \frac{T_A L_C}{G J_{AC}} = \boxed{6,59 \cdot 10^{-3} \text{ rad}} \quad (10.30)$$

Sección circular maciza:

$$\psi_C = \frac{T_A L_C}{G J_{AC}} = \boxed{0,0464 \text{ rad}} \quad (10.31)$$

Sección circular hueca abierta:

$$\psi_C = \frac{T_A L_C}{G J_{AC}} = \boxed{0,698 \text{ rad}} \quad (10.32)$$

Sección cuadrada hueca:

$$\psi_C = \frac{T_A L_C}{G J_{AC}} = \boxed{5,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}} \quad (10.33)$$

e) ¿Cuál de las secciones tiene menor giro en los puntos calculados? Razone la respuesta.

La sección con menor giro es aquella sección que tiene mayor inercia de torsión ($J=I_t$) al ser el resto de parámetros que determinan el giro de la sección constante para todas las secciones bajo estudio.

f) Deformación angular en el punto B de cada una de las secciones.

El esfuerzo cortante en el árbol es constante para todos los puntos del mismo, por tanto, todos los puntos de la misma sección estarán sometidos a la misma deformación angular.

Sección circular hueca:

$$\gamma_{B,\max} = \frac{\tau_{AC}}{G} = \boxed{109,84 \mu\varepsilon} \quad (10.34)$$

$$\gamma_{B,\min} = \frac{\tau_{AC}}{G} = \boxed{95,02 \mu\varepsilon} \quad (10.35)$$

Sección circular maciza:

$$\gamma_B = \frac{\tau_{AC}}{G} = \boxed{386,92 \mu\varepsilon} \quad (10.36)$$

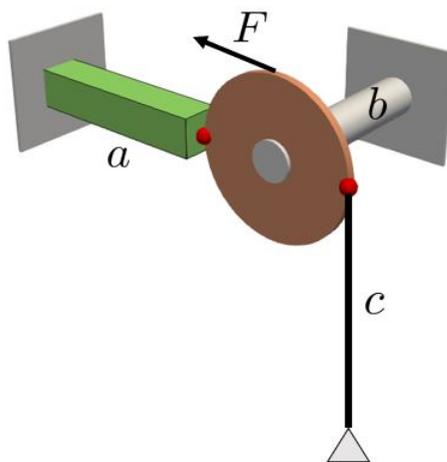
Sección circular hueca abierta:

$$\gamma_B = \frac{\tau_{AC}}{G} = \boxed{1743,82 \mu\varepsilon} \quad (10.37)$$

Sección cuadrada hueca:

$$\gamma_B = \frac{\tau_{AC}}{G} = \boxed{80,5 \mu\varepsilon} \quad (10.38)$$

7. La estructura de la figura está sometida a una carga F . Está compuesta por un disco rígido (indeformable), unido a una viga sometida a flexión "a", una barra ζ sometida a axil, y una viga "b" sometida a torsión. No se considera la flexión del elemento b, el cual generaría unas reacciones en su empotramiento que equilibraría en x e y el disco rígido. Por ello, sólo se puede usar la ecuación de equilibrio de momentos en el disco para resolver el problema.

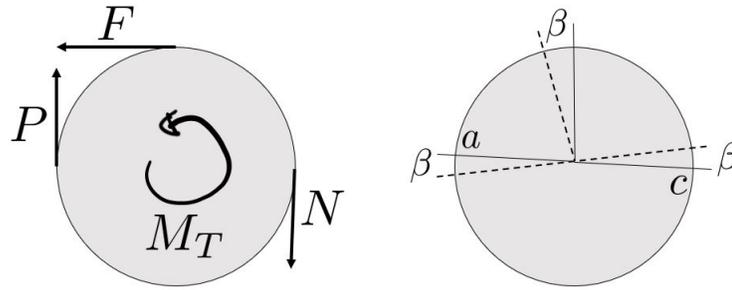


Se pide calcular el giro β del disco. Sabiendo que todos los elementos (a, b y c) tienen la misma longitud y asumiendo sabidas las propiedades seccionales y mecánicas de todos los elementos. El disco tiene un radio R .

Solución

El problema tiene un orden de hiperestaticidad de 5, si consideramos todas las reacciones como incógnitas, aunque si asumimos que las reacciones x de a y c son nulas, tendríamos un orden de hiperestaticidad de 3.

En cualquier caso, al resolverlo mediante compatibilidad de desplazamiento, esto no nos afecta. Por ello, tenemos que calcular las fuerzas y momentos que introducen los elementos a, b y c al disco de manera proporcional a los movimientos. Por ello, analizando la estructura, la fuerza F introducirá un giro en el disco un ángulo β , y este giro deformará la viga a torsión, a la barra a axil y a la viga a flexión.



De esta forma, la flecha que introduce el giro del disco en la viga a será igual a $w = \beta R$, al estar en pequeños desplazamientos. La elongación de la barra c será de $\delta = \beta R$, y el giro de la viga a torsión será $\phi = \beta$.

Por ello basta con calcular las reacciones de las estructuras ante estas deformaciones, y esas con signo contrario serán las actuantes en el disco.

Viga a flexión a:

Esta sería una viga empotrada con una carga puntual P en la punta libre. Por ello, el momento flector será $M_f(x) = P(L - x)$, y por lo tanto, la ecuación del giro será:

$$\theta(x) = \frac{PLx}{EI} - \frac{Px^2}{2EI} \quad (10.39)$$

Y la ecuación de la curva elástica:

$$w(x) = \frac{PLx^2}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI} \quad (10.40)$$

Y para $x = L$, la flecha será:

$$w(L) = \frac{PL^3}{3EI} \quad (10.41)$$

Que por compatibilidad con el disco, y considerando que un giro positivo introducirá una flecha negativa, será:

$$-\beta R = \frac{PL^3}{3EI} \rightarrow P = \frac{-3\beta REI}{L^3} \quad (10.42)$$

Y la fuerza actuante sobre el disco será la contraria a P (con signo cambiado por ser reacción).

Viga a torsión b:

En este caso la aplicación es directa, y el giro del disco se puede considerar como el giro total de la viga, y por tanto:

$$\beta = \frac{M_T L}{GJ} \rightarrow M_T = \frac{\beta GJ}{L} \quad (10.43)$$

Viga a axil c:

Y este caso es aún más sencillo, ya que la elongación impuesta por el disco sobre la barra será $\delta = \beta R$, y su relación con el axil:

$$N = \frac{\delta EA}{L} = \frac{\beta REA}{L} \quad (10.44)$$

Y una vez lo tenemos todo podemos hacer el equilibrio de momentos que hemos mostrado en la imagen anterior, con respecto al centro del disco, como:

$$\sum M = 0 = FR - NR - PR - M_T \quad (10.45)$$

Y sustituyendo los valores calculados (los negativos es por la dirección del momento y porque el sentido es contrario al que afecta a cada viga, al ser reacciones.

$$FR - \frac{\beta R^2 EA}{L} - \frac{3\beta R^2 EI}{L^3} - \frac{\beta GJ}{L} = 0 \quad (10.46)$$

Y por tanto:

$$\beta = \frac{FR}{\frac{R^2 EA}{L} + \frac{3R^2 EI}{L^3} + \frac{GJ}{L}} \quad (10.47)$$

Una vez sabemos β tenemos completamente definida la estructura.

Ahora, para comprobar, vamos a calcular con el software Maple la energía externa (dada por F) y la interna (como suma de la elástica del elemento a flexión, torsión y axil.

$$\text{beta} := \frac{F \cdot R}{\frac{R^2 \cdot E \cdot A}{L} + \frac{3 \cdot R^2 \cdot E \cdot I}{L^3} + \frac{G \cdot J}{L}}$$

$$\beta := \frac{FR}{\frac{R^2 EA}{L} + \frac{3R^2 EI}{L^3} + \frac{GJ}{L}}$$

$$W_{\text{ext}} := \text{simplify}\left(\frac{1}{2} F \cdot \text{beta} \cdot R\right)$$

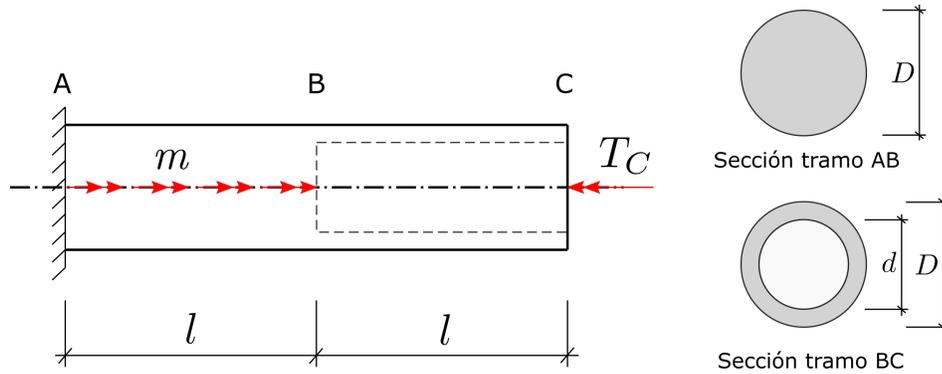
$$W_{\text{ext}} := \frac{F^2 R^2 L^3}{2R^2 EA L^2 + 61R^2 E + 2GJL^2}$$

$$W_{\text{int}} := \text{simplify}\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\beta^2 \cdot R^2 \cdot E \cdot A}{L} + \frac{\beta^2 \cdot 3 \cdot R^2 \cdot E \cdot I}{L^3} + \frac{\beta^2 \cdot G \cdot J}{L}\right)\right)$$

$$W_{\text{int}} := \frac{F^2 R^2 L^3}{2R^2 EA L^2 + 61R^2 E + 2GJL^2}$$



8. Un eje ABC de longitud $2l$, empotrado en su extremo A, está sometido a un momento torsor m por unidad de longitud a lo largo del tramo AB y un momento torsor T_C aplicado en la sección del extremo C, como se indica en la siguiente figura. La mitad del eje es hueca, de diámetro interior d . Se conoce que el material del eje ABC es elástico lineal y tiene un módulo de elasticidad E y un coeficiente de Poisson ν .



Datos: $D = 40 \text{ mm}$, $d = 20 \text{ mm}$, $l = 500 \text{ mm}$, $m = 2 \text{ kN}\cdot\text{mm}/\text{mm}$, $T_C = 2000 \text{ kN}\cdot\text{mm}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,2$

- Determinar el momento torsor en la sección B.
- Calcular el ángulo de giro en la sección C.
- Determinar el factor de reserva, sabiendo que el material tiene una tensión de cortadura admisible $\tau_{adm} = 180 \text{ MPa}$.

Solución

- a) Determinar el momento torsor en la sección B.**

La ley de momento torsor:

$$M_T(x) = \begin{cases} -T_C + m(l-x) & \text{si } 0 \leq x \leq l \\ -T_C & \text{si } l \leq x \leq 2l \end{cases}$$

Por tanto, el momento torsor en la sección B:

$$M_T^B = -T^C = 2000 \text{ kN}\cdot\text{mm}$$

- b) Calcular el ángulo de giro en la sección C.**

El giro de la sección C se obtiene:

$$\phi_c = \int_0^l \frac{-T_C + m(l-x)}{GJ_1} dx + \int_l^{2l} \frac{-T_C}{GJ_2} dx = \frac{1}{GJ_1} \left(\frac{ml^2}{2} - T_C l \right) - \frac{T_C l}{GJ_2} = 0,05507 \text{ (rad)}$$

donde: $J_1 = \pi D^4/32$ y $J_2 = \pi(D^4 - d^4)/32$

- c) **Determinar el factor de reserva, sabiendo que el material tiene una tensión de cortadura admisible $\tau_{adm} = 180$ MPa.**

Tensión tangencial máxima:

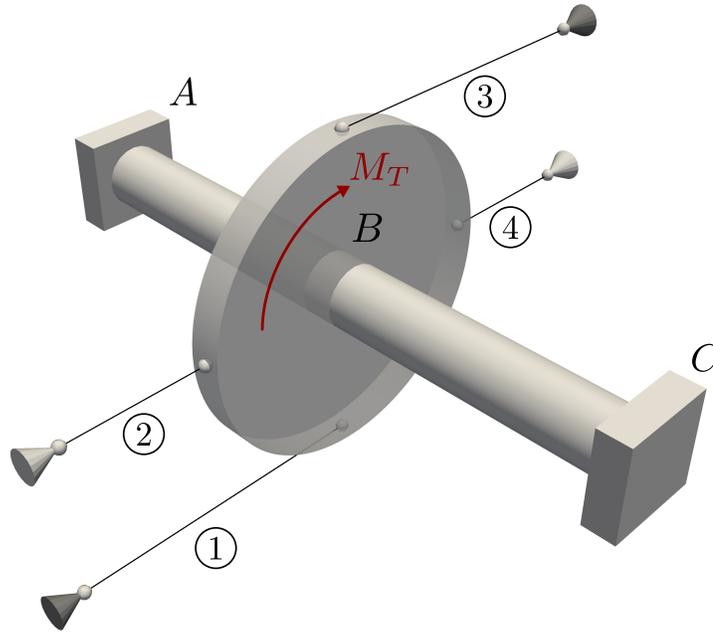
$$\tau_{max} = \max\left(\text{abs}\left(\frac{ml - T_C D}{J_1} \frac{D}{2}\right), \text{abs}\left(-\frac{T_C D}{J_2} \frac{D}{2}\right)\right)$$

Por tanto, se obtiene:

$$F.R. = \frac{\tau_{adm}}{t_{max}} = 1,06$$

9. La estructura mostrada en la figura está compuesta por dos árboles AB y BC de igual longitud L (empotrados en A y C , respectivamente), unidos al disco infinitamente rígido, de radio R , en B . Además, el disco está sujeto mediante las barras 1, 3 (de longitud ℓ), y 2, 4 (de longitud $\ell/2$). Se conoce la rigidez axial de todas las barras, EA , y la rigidez a torsión de los dos árboles GJ .

Se somete todo el conjunto a un par M_T , aplicado sobre el disco.



Datos: M_T, R, L, ℓ, EA, GJ

Se pide:

- Orden de hiperestaticidad del conjunto (para los árboles, tener únicamente en cuenta la parte asociado a su giro) (0.25 puntos)
- Esfuerzo axial de la barra 1, N_1 , considerado positivo a tracción (kN).
- Alargamiento de la barra 2, $\Delta\ell_2$ (mm).
- Momento torsor en A, $M_{T,A}$, en valor absoluto (kNm).
- Momento torsor en C, $M_{T,C}$, en valor absoluto (kNm).
Sabiendo que las barras son de sección circular, con inercia a flexión EI , se desea calcular,
- Valor de M_T para que aparezca pandeo en la(s) barra(s), considerado positivo según el signo indicado en la figura (kNm).
- Giro del disco (en valor absoluto) justo antes de producirse el pandeo.

Solución

- a) El orden de hiperestaticidad es $OH = 5$ puesto que retirando las 4 barras más un empotramiento se llega a un sistema rígido e isostático (i.e. son incógnitas que “sobran”). Desde el punto de vista de número de incógnitas menos número de ecuaciones, la solución es:

$$\boxed{OH = 6 - 1 = 5} \quad (10.48)$$

Incógnitas: Torsor en el árbol AB (T_{AB}) torsor en el árbol BC (T_{BC}) y los axiles de las cuatro barras (N_1, N_2, N_3, N_4). **Ecuaciones:** 1 ecuación de equilibrio de momento torsor (en el disco).

- b) Para determinar dicho axil, debe resolverse el problema hiperestático. La ecuación de equilibrio es la siguiente:

$$M_T + 2R(N_1 + N_3) = T_{AB} + T_{BC}, \quad (10.49)$$

donde N_1, N_3 se consideran positivas a tracción, y los momentos torsores a los que están sometidos ambos árboles, T_{AB} y T_{BC} , se consideran con signo positivo alrededor del eje (longitudinal) que va desde A hasta C .

Respecto a la compatibilidad, observando la sollicitación puede verse rápidamente que las barras 2 y 4 no trabajan, por lo que $N_2 = N_4 = 0$. Dicho de otro modo, las ecuaciones de compatibilidad que pueden extraerse (bien gráficamente o bien a través del PTV) son $\Delta\ell_2 = 0$ y $\Delta\ell_4 = 0$. Por tanto, quedan 3 ecuaciones de compatibilidad para determinar el sistema. Para ello, se plantea un estado deformado arbitrario donde el disco ha girado un ángulo φ en el sentido del par M_T .

En este estado arbitrario deformado se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \Delta\ell_1 = \Delta\ell_3 &=: \Delta\ell \Rightarrow N_1 = N_3 = N \\ \varphi_{AB} = \varphi_{CB} &=: \varphi \Rightarrow T_{AB} = T_{BC} = T \\ R\varphi = \Delta\ell &\Rightarrow \frac{TLR}{GJ} = \frac{N\ell}{EA} \end{aligned} \quad (10.50)$$

Las dos primeras relaciones también pueden obtenerse a través de la simetría del problema (problema antisimétrico). Con ello, el sistema queda cerrado. Sustituyendo lo anterior, se tiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (N, T):

$$\begin{cases} M_T + 2RN = 2T \\ \frac{TLR}{GJ} = \frac{N\ell}{EA} \end{cases}, \quad (10.51)$$

cuya solución es:

$$N = -\frac{M_T}{2R \left[1 + \frac{\ell}{L} \frac{GJ}{EAR^2} \right]} \quad (10.52)$$

$$T = \frac{M_T}{2 \left[1 + \frac{L}{\ell} \frac{EAR^2}{GJ} \right]}$$

Por tanto, el axil solicitado N_1 es:

$$N_1 = N = -\frac{M_T}{2R \left[1 + \frac{\ell}{L} \frac{GJ}{EAR^2} \right]} \quad (10.53)$$

donde el signo menos implica que la barra está trabajando a compresión.

c) Como se ha destacado anteriormente, la barra 2 no trabaja, por lo tanto

$$\Delta \ell_2 = 0 \quad (10.54)$$

d) El momento torsor en los árboles AB y BC es constante, por lo que el momento en el empotramiento A es:

$$|M_{T,A}| = T = \frac{M_T}{2 \left[1 + \frac{L}{\ell} \frac{EAR^2}{GJ} \right]} \quad (10.55)$$

e) De igual modo que el apartado anterior, el momento en el empotramiento C es:

$$|M_{T,C}| = T = \frac{M_T}{2 \left[1 + \frac{L}{\ell} \frac{EAR^2}{GJ} \right]} \quad (10.56)$$

f) Las barras 1 y 3 (a compresión), pandean cuando el axil alcanza la carga crítica de pandeo i.e. $N = N_{cr}$, cuya expresión es

$$|N_{cr}| = \frac{\pi^2 EI}{L_p^2} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (10.57)$$

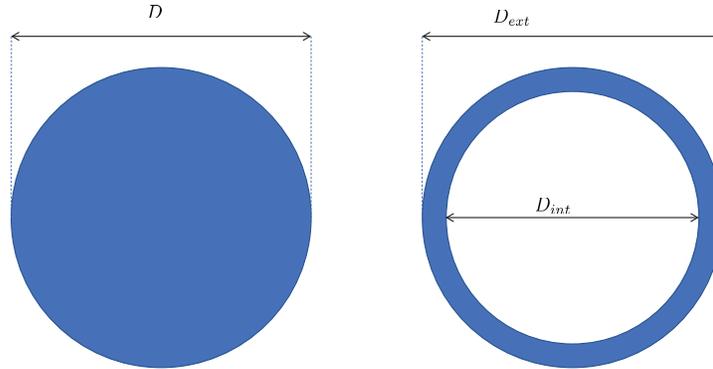
Nótese que la longitud de pandeo es $L_p = \ell$, ya que los apoyos son articulado-articulado. Así, sustituyendo este valor en la Ecuación (10.53) y despejando, se obtiene el momento torsor crítico $M_{T,cr}$:

$$M_{T,cr} = 2R \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \left(1 + \frac{\ell}{L} \frac{GJ}{EAR^2} \right) \quad (10.58)$$

g) Por último, el ángulo de giro inmediatamente antes de alcanzar la carga crítica puede obtenerse a partir de la tercera relación de compatibilidad de la Ecuación (10.50):

$$\varphi_{\text{cr}} = \frac{N_{\text{cr}} \ell}{EAR} = \frac{\pi^2 I}{A \ell R} \quad (10.59)$$

10. Dado un perfil de sección circular llena, de diámetro D , determinar el perfil que tenga la misma resistencia, siendo dicho perfil $\frac{D_{ext}}{D_{int}} = 0,8$. Comparar las rigideces de ambos perfiles y el peso de los mismos, suponiendo que están hechos del mismo material.



Solución

Para el perfil de sección no llena tenemos:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M}{\pi \frac{R^4}{2}} R = \frac{M}{\pi \frac{R^3}{2}} \quad (10.60)$$

Para el perfil de sección hueca tenemos:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M}{\pi \left(\frac{R_{ext}^4}{2} - \frac{R_{int}^4}{2} \right)} R_{ext} \quad (10.61)$$

Igualando las dos expresiones anteriores y teniendo en cuenta la relación entre los diámetros interiores y exteriores de la sección hueca, tenemos:

$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{0,594 R_{ext}^3} \rightarrow R_{ext} = 1,192R \quad (10.62)$$

Comparando ahora las rigideces

$$\frac{GI_0(\text{llena})}{GI_0(\text{hueca})} = \frac{\pi \left(\frac{R_{ext}^4}{2} - \frac{R_{int}^4}{2} \right)}{\pi \frac{R^4}{2}} = 1,192 \quad (10.63)$$

Comparando ahora los pesos

$$\frac{P(\text{hueca})}{P(\text{llena})} = \frac{S(\text{hueca})}{S(\text{llena})} = \frac{\pi (R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\pi R^2} = 0,512 \quad (10.64)$$

11. Sea un árbol empotrado en un extremo y de perfil de sección circular no llena, con diámetro exterior $2R$ y diámetro interior $1,6R$, con $R = 0,2$ m. A una distancia $L = 4R$ de la base y $2R$ del centro del árbol se le aplica una carga P en dirección normal al eje del árbol. Las propiedades del árbol son modulo de Young $E = 200$ GPa, $S_y = 0,25E$. Suponiendo que el fallo del árbol viene descrito por el criterio de Von Mises, determinar el valor de P para llegar al fallo.

Solución

El cortante máximo para un árbol no macizo de sección circular únicamente sometido a momento torsor $2PR$ es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{2PR}{\pi \left(\frac{R_{\text{ext}}^4}{2} - \frac{R_{\text{int}}^4}{2} \right)} R_{\text{ext}}$$

Por otro lado, la tensión equivalente de Von Mises para un caso de cortante puro (debido al estado de torsión pura) es

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3} \tau$$

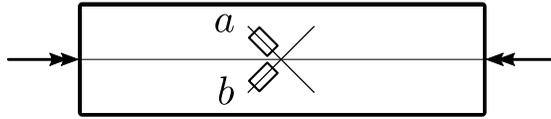
Igualando la tensión equivalente a la carga crítica $\sigma_{eq} = S_c$ (para el caso de Von Mises, el límite elástico S_y), se obtiene la condición para el criterio de fallo

$$\frac{4\sqrt{3}P}{\pi R^2 (1 - 0,8^4)} \leq S_y$$

donde se ha impuesto que $R_{\text{int}} = 0,8R_{\text{ext}} = 0,8R$. Sustituyendo los valores del enunciado, se llega a

$$P_{\text{máx}} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} S_y R^2 (1 - 0,8^4) = 535,43 \text{ MN}$$

12. Un árbol circular transmite una potencia de 73 kW a 2000 rpm. A 45° del eje se han colocado dos extensímetros a y b , como muestra la figura. La lectura de las bandas durante un ensayo de carga proporciona el resultado $\varepsilon_b - \varepsilon_a = 10^{-3}$. Para dimensionar el árbol a resistencia, se ha utilizado el criterio de Von Mises, con un coeficiente de seguridad $X = 1,8$ y un margen de seguridad (adicional) mínimo de $MS = +0,5$.



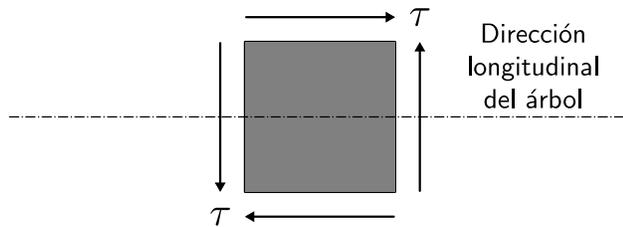
Se pide:

- Direcciones principales sobre la superficie del árbol
- Tensión equivalente de Von Mises durante el ensayo
- Tensión longitudinal máxima durante el ensayo
- Tensión cortante máxima durante el ensayo
- El diámetro mínimo que ha de tener el árbol para cumplir el requisito de resistencia

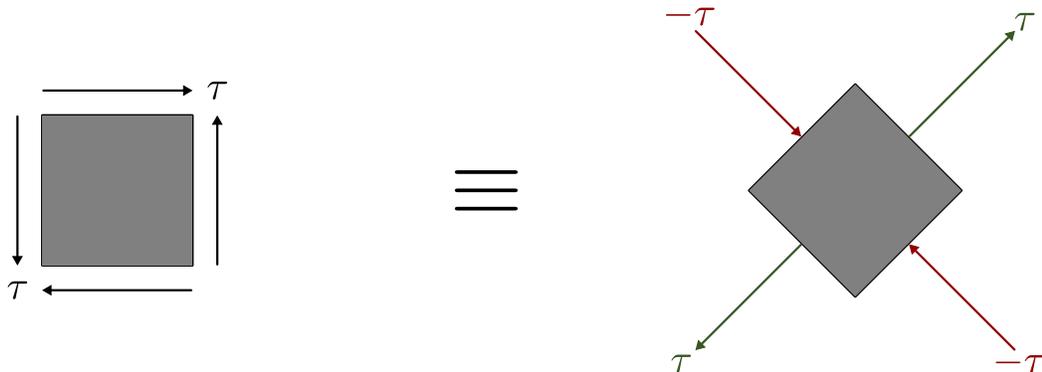
Datos: $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $S_y = 350 \text{ MPa}$

Solución

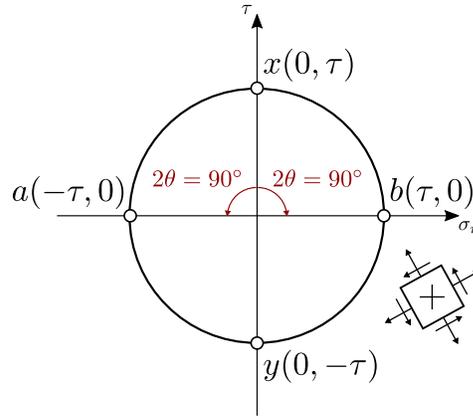
- Al tratarse de un prisma de sección circular y asumiendo la hipótesis de Saint-Venant (torsión de Saint-Venant), el momento torsor genera un cortante τ constante en la superficie del árbol. Concretamente, tomando un elemento diferencial de la superficie, se tiene



Es decir, se trata de un cortante puro (tensiones principales: $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$, con las direcciones principales a 45° del eje longitudinal).



Asimismo, esto puede calcularse a través del círculo de Mohr (sean los puntos x e y la proyección del tensor de tensiones sobre las direcciones longitudinal y circunferencial del árbol, respectivamente):



Según el círculo de Mohr, la dirección principal a compresión está a $2\theta = 90^\circ$ en sentido antihorario respecto a x . Esto es, en el sólido dicha dirección está a $\theta = 45^\circ$ en sentido horario respecto a x , por lo que coincide con la dirección a . Análogamente, la dirección principal a tracción es la dirección b .

b) La tensión equivalente de Von Mises se define como

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}$$

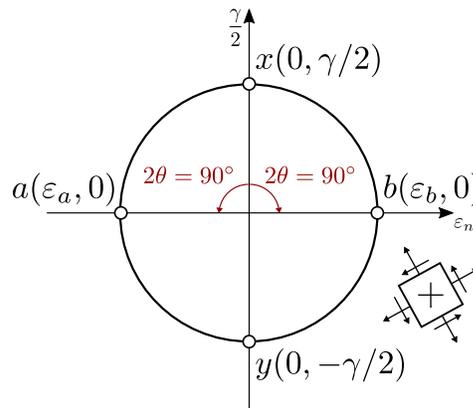
Como el estado de carga es puramente torsional, no hay tensión en la dirección radial i.e. $\sigma_3 = 0$. Así,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(2\tau)^2 + \tau^2 + \tau^2]} = \sqrt{3} \tau$$

En virtud de la Ley de Hooke generalizada (cortadura), se tiene que

$$\tau = G\gamma = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma,$$

y para hallar γ se tienen en cuenta las lecturas de los extensímetros. Para hallar esta relación, se plantea el círculo de Mohr en deformaciones



Por la construcción del dibujo se llega a

$$\varepsilon_b = -\varepsilon_a = \frac{\gamma}{2}$$

Por lo tanto, el dato $\varepsilon_b - \varepsilon_a$ proporcionado en el enunciado resulta ser

$$\varepsilon_b - \varepsilon_a = \gamma$$

es decir, la distorsión angular que sufre el árbol en la superficie, necesaria para calcular el cortante γ , con ello, la tensión equivalente de Von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3} \tau = \frac{\sqrt{3} E}{2(1 + \nu)} \gamma = \frac{\sqrt{3} E}{2(1 + \nu)} (\varepsilon_b - \varepsilon_a)$$

Sustituyendo los datos del enunciado

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3} E}{2(1 + \nu)} (\varepsilon_b - \varepsilon_a) = 46,63 \text{ MPa}$$

- c) Fijándonos en el círculo de Mohr en tensiones, observamos que la máxima tensión normal i.e. $\max(|\sigma_n|)$ es

$$\sigma_{n,\text{máx}} = \tau = G\gamma$$

Esta tensión máxima se alcanza en las direcciones a y b . Sustituyendo los datos del problema,

$$\sigma_{n,\text{máx}} = \frac{E}{2(1 + \nu)} (\varepsilon_b - \varepsilon_a) = 26,92 \text{ MPa}$$

- d) Del mismo modo, el cortante máximo es

$$\tau_{\text{máx}} = \tau$$

El árbol sufre cortante máximo en sus direcciones longitudinal y circunferencial.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{E}{2(1 + \nu)} (\varepsilon_b - \varepsilon_a) = 26,92 \text{ MPa}$$

- e) Para cumplir el requisito de resistencia se debe cumplir la siguiente relación

$$X \leq \frac{S_c}{\sigma'_{eq}}$$

donde $\sigma'_{eq} = \sigma_{eq}(1 + MS)$, y $\sigma_{eq} = \sqrt{3} \tau_{\text{máx}}$ (ver primer apartado).

$$X(1 + MS) \leq \frac{S_c}{\sqrt{3} \tau_{\text{máx}}}$$

Es decir, el cociente S_c/σ_{eq} debe valer, como poco, el coeficiente de seguridad X aumentado $(1 + MS)$ veces.

Asumiendo torsión de Saint-Venant para piezas de sección circular, el cortante máximo viene dado por

$$\tau_{\text{máx}} = GR \frac{d\phi}{dx},$$

donde R es el radio del árbol y $d\phi/dx$ es el ángulo de torsión por unidad de longitud, constante bajo las hipótesis asumidas. Esta constante viene dada por el momento torsor al que está sometido la pieza dividido entre su rigidez torsional i.e.

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GI_0},$$

donde I_0 es el momento de inercia polar para secciones circulares, con valor $\pi R^4/2$. Así, el cortante máximo puede hallarse en función del momento torsor y del radio de la siguiente forma:

$$\tau_{\text{máx}} = GR \frac{d\phi}{dx} = \frac{2T}{\pi R^3}$$

Volviendo a la criterio de resistencia,

$$X(1 + MS) \leq \frac{\pi R^3 S_c}{2\sqrt{3} T}$$

Despejando el radio, se obtiene que

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3} T X(1 + MS)}{\pi S_c}}$$

Para hallar el momento torsor, se aplica la fórmula de la potencia transmitida

$$P = T \omega$$

Por último, sabiendo que el criterio de Von Mises toma el límite elástico i.e. $S_c = S_y$, el diámetro mínimo que cumple el criterio de resistencia es

$$D_{\text{mín}} = 2 \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{P}{\omega}\right) \frac{X(1 + MS)}{S_y}} = 28,73 \text{ mm}$$

Parte VI

Axil

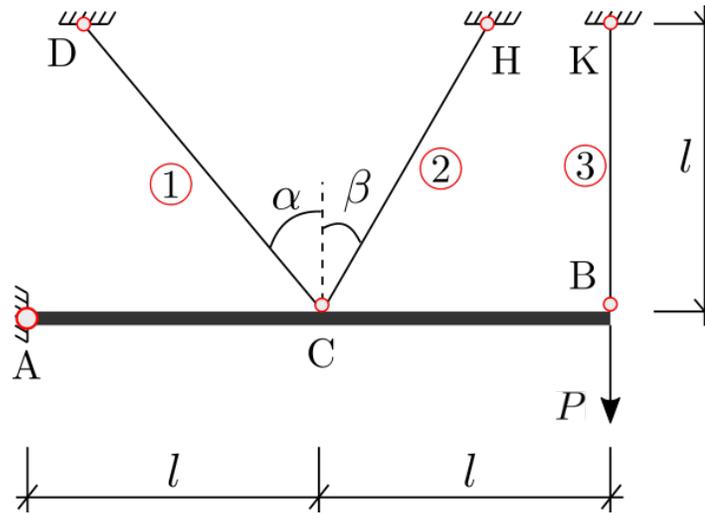
11. Axil

11.1	Enunciados de ejercicios de Axil	250
11.2	Solución de ejercicios de Axil	256

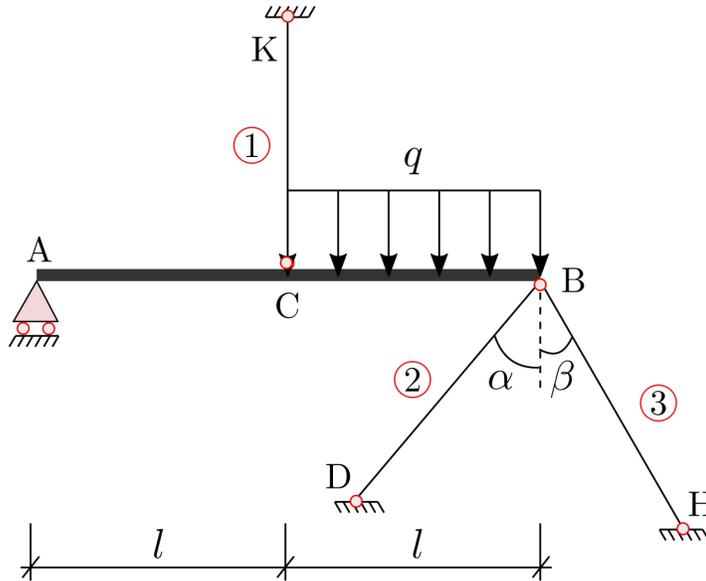


11.1. Enunciados de ejercicios de Axil

1. Una barra AB perfectamente rígida está sujeta mediante tres barras del mismo material enlazadas por medio de articulaciones como se indica en la siguiente figura. Se aplica una carga P kN en el punto B de la barra AB. El área de las secciones de todas las barras tienen el mismo valor A mm² y el módulo de elasticidad E GPa. Los datos geométricos de la estructura: l , α y β .

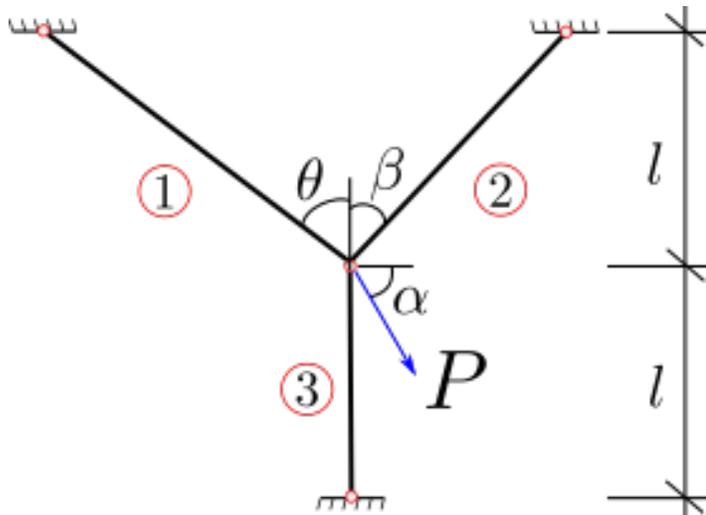


- Determinar las fuerzas axiales en las barras
 - Calcular el alargamiento de las barras
 - Determinar el giro de la barra rígida AB debido a la carga P (en milésimas de grado)
 - Determinar el valor de carga P para que no se supere la tensión normal admisible $\sigma_{adm} = 250$ MPa en las secciones de las barras.
2. Una barra AB perfectamente rígida está sujeta mediante tres barras del mismo material enlazadas por medio de articulaciones como se indica en la siguiente figura. Se aplica una carga uniformemente distribuida q sobre el tramo CB de la barra AB. Las barras tienen la misma longitud l , el mismo área de sección A , el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.



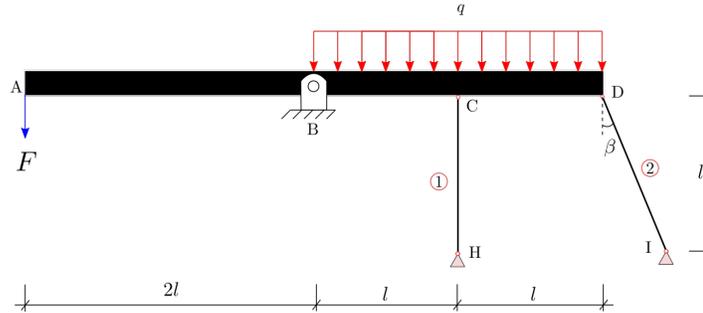
Se pide:

- a) Determinar la fuerza axial en la barra 2 (3 puntos).
 - b) Determinar el alargamiento de la barra más traccionada (2 punto).
 - c) Determinar el giro de la barra rígida AB en milésimas de grado (2 punto).
 - d) Calcular la variación unitaria de volumen de la barra 1 en milésimas (1 punto).
3. Dada una estructura formada por 3 barras como se muestra en la siguiente figura. Las tres barras son del mismo material y tienen el mismo área de sección $A =$. El material es elástico lineal y tiene el módulo de elasticidad $E =$.



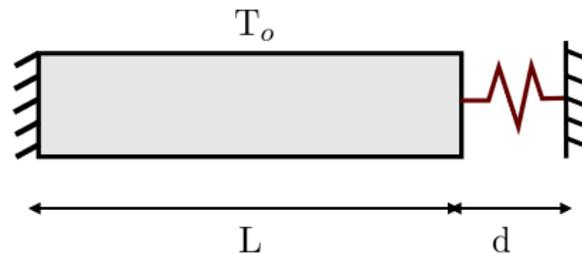
- a) Determinar las fuerzas axiales en las barras
- b) El desplazamiento vertical del punto donde se aplica la carga P
- c) Determinar el valor de carga P para que no se supera la tensión normal admisible σ_{adm} en las secciones de las barras.

4. Una barra ABCD perfectamente rígida está apoyada en el punto B (se permite su giro alrededor de este punto), y conectada dos barras del mismo material enlazadas por medio de articulaciones como se indica en la siguiente figura. Se aplica una carga F kN en el punto A de la barra rígida y una carga uniformemente distribuida en el tramo BD. Las barras tienen la misma sección transversal A mm² y el módulo de elasticidad E GPa. Los datos geométricos de la estructura: l y β .



- Determinar la fuerza axial en la barra CH (en kN).
- Desplazamiento vertical en el punto A en valor absoluto (en mm).
- Determinar el valor de la carga F para que las tensiones en compresión en las barras no superen la tensión admisible $\sigma_{adm} = 145$ MPa.
- Determinar el ΔT que debe aplicar sobre la barra CH de tal forma que el desplazamiento vertical en el punto A sea cero, conociendo el coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 15e - 06$ °C⁻¹.

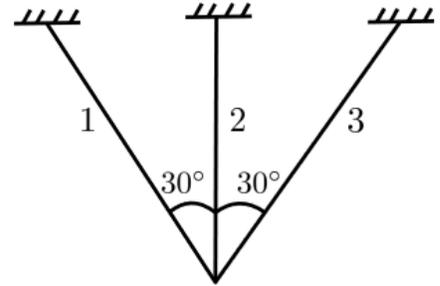
Una columna de longitud L a temperatura ambiente T_0 apoya en una base rígida por su extremo izquierdo, y está unida a un muelle de constante K y longitud d sin tensión, por el extremo derecho. Se somete a la columna a un calentamiento constante de temperatura.



- Temperatura final de la barra que acorta la longitud del muelle a la cuarta parte del mismo (El muelle no está trabajando).
 - Temperatura final de la barra que acorta la longitud del muelle a la cuarta parte del mismo (El muelle está trabajando).
 - La fuerza del muelle que provoca que la longitud del muelle se acorte a la mitad.
 - El axil térmico en la barra si la sometemos a una variación de temperatura de 35°C.

Datos: $T_0 = 20$ °C, $L = 3,5$ m, $A = 1$ m², $d = 1,2$ mm, $\alpha = 1,3 \cdot 10^{-6}$ °C⁻¹,
 $E = 205$ GPa, $K = \frac{0,5EA}{L}$

6. Sea la estructura de la figura. La barra 2 está sometida a una variación de temperatura de $40\text{ }^{\circ}\text{C}$.



- a) Axil de la barra 2.
- b) Axil de la barra 1.
- c) Desplazamiento de la barra 2.
- d) Desplazamiento de la barra 3.

Datos: $T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$, $L_2 = 1\text{ m}$, $A = 200\text{ mm}^2$, $\alpha = 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, $E = 210\text{ GPa}$

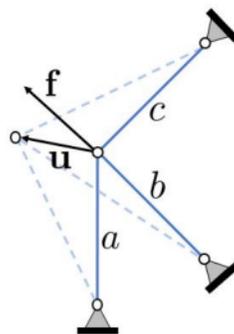
7. Se tiene un sólido de revolución de grandes dimensiones con longitud L y ley de áreas $A(x)$ desconocida. El sólido está apoyado de forma que su eje longitudinal es perpendicular al suelo, y se encuentra sometido a su propio peso.

Aplicando una carga puntual F de compresión en la sección superior, se desea que toda sección del sólido se encuentre sometida a la misma tensión longitudinal σ . Para un sólido de peso específico γ (peso por unidad de volumen), hallar:

- a) La ley de áreas $A(x)$ en función de los parámetros del problema (F, σ, γ, L)
- b) La reacción del suelo

Nota: Para el apartado 1, plantear el equilibrio de fuerzas en una rebanada diferencial del sólido

8. La figura muestra una estructura que ante una sollicitación $\mathbf{f} = (f_1, f_2, 0)^T$ (N) en un nudo, este se desplaza $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)^T$ (mm). Todas las barras tienen el mismo área A . Las barras a y b tienen una rigidez E_1 y la barra c tiene una rigidez E_2 .



Datos:

$$\mathbf{f} = (-1500, 1000, 0)^T \text{ N}$$

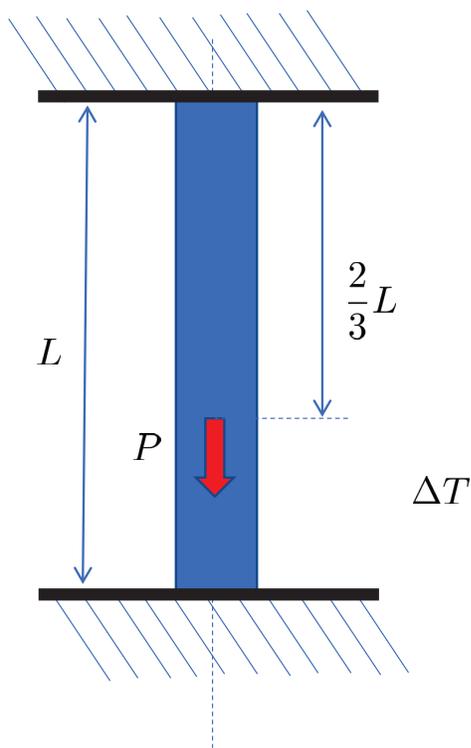
$$\mathbf{u} = (-2, 1, 0)^T \text{ mm}$$

$$A = 400 \text{ mm}^2$$

Todas las barras tienen la misma longitud $L = 1000 \text{ mm}$

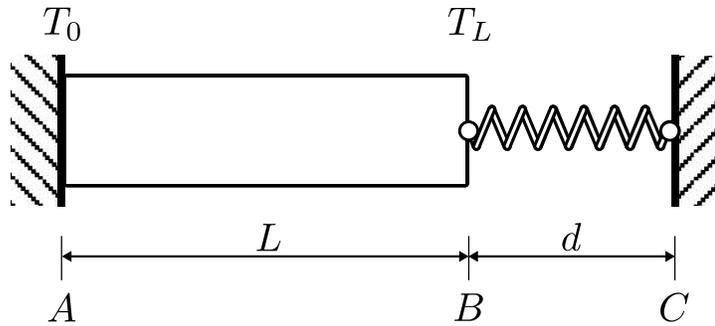
Se pide:

- a) Determinar la elongación y el giro de cada barra.
 - b) Determinar el valor de E_1 y E_2 .
9. Dada la barra de la figura, con sección rectangular A , módulo de elasticidad E y coeficiente de dilatación térmica α , determinar las reacciones en el apoyo inferior. Determinar el incremento de temperatura para que, si no hubiera apoyo inferior, el desplazamiento en ese punto fuera cero.



10. Una columna de longitud L a temperatura ambiente T_0 se encuentra apoyada en una base rígida por su extremo izquierdo, y está unida a un muelle de constante K y longitud d ($d \ll L$) sin tensión por su extremo derecho (i.e. la longitud inicial del muelle es

d). La columna se somete a un calentamiento lineal: desde temperatura T_0 , en la base, hasta alcanzar una temperatura T_L , en el otro extremo.

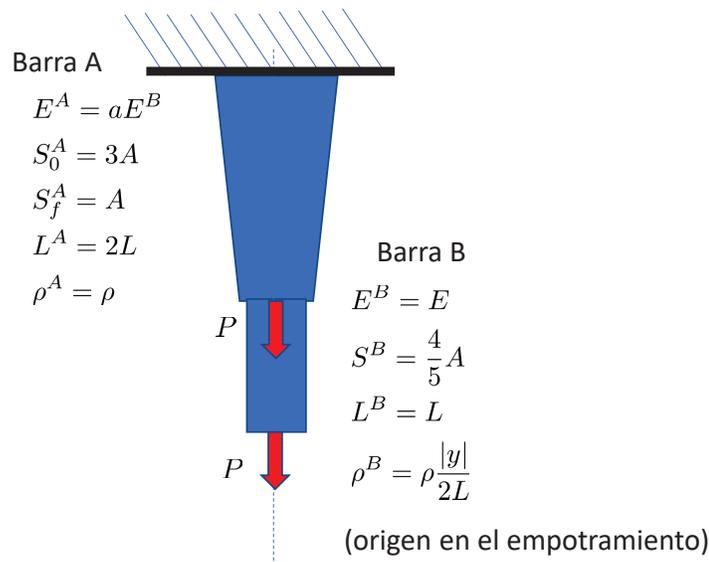


Calcular:

- a) La temperatura T_L , en $^{\circ}\text{C}$, que acorta la longitud del muelle a la mitad
- b) ¿Cuánto vale la fuerza en el muelle en dichas condiciones?
- c) Hallar el cociente entre la fuerza del muelle al uniformizar la temperatura en toda la columna al valor T_L y la fuerza del muelle calculada en el apartado anterior

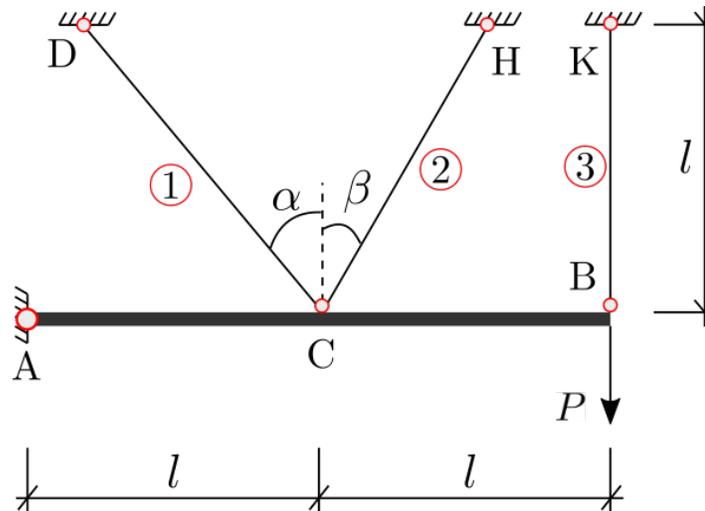
Datos: $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$, $L = 3,5\text{ m}$, $A = 1\text{ m}^2$, $d = 1,2\text{ mm}$, $E = 205\text{ GPa}$, $K = \frac{EA}{2L}$, $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$

11. Construir los diagramas de esfuerzos axiles, determinar las tensiones normales y movimientos de la estructura de barras de sección circular de la figura. Averiguar a de forma que el desplazamiento en la barra A sea la mitad que en la barra B.



11.2. Solución de ejercicios de Axil

1. Una barra AB perfectamente rígida está sujeta mediante tres barras del mismo material enlazadas por medio de articulaciones como se indica en la siguiente figura. Se aplica una carga P kN en el punto B de la barra AB. El área de las secciones de todas las barras tienen el mismo valor A mm² y el módulo de elasticidad E GPa. Los datos geométricos de la estructura: l , α y β .



- Determinar las fuerzas axiales en las barras
- Calcular el alargamiento de las barras
- Determinar el giro de la barra rígida AB debido a la carga P (en milésimas de grado)
- Determinar el valor de carga P para que no se supera la tensión normal admisible $\sigma_{adm} = 250$ MPa en las secciones de las barras.

Solución:

- Determinar las fuerzas axiales en las barras

Solución:

- Ecuación de equilibrio:

$$\sum M_A = 0 \implies -2Pl + 2N_3l + N_1l \cos \alpha + N_2l \cos \beta = 0 \quad (11.1)$$

- Ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{cases} \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} = \frac{\Delta l_3}{2} \\ \frac{\Delta l_2}{\cos \beta} = \frac{\Delta l_3}{2} \end{cases} \quad (11.2)$$

- Ecuaciones de comportamiento (ley constitutiva)

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA} \quad (11.3)$$

Con $l_1 = l/\cos \alpha$, $l_2 = l/\cos \beta$ y $l_3 = l$, se puede obtener

$$\begin{cases} N_1 = \frac{N_3 \cos^2 \alpha}{2} \\ N_2 = \frac{N_3 \cos^2 \beta}{2} \end{cases} \quad (11.4)$$

Sustituyéndolos en la ecuación de equilibrio, se obtiene:

$$N_3 = \frac{4P}{4 + \cos^3 \alpha + \cos^3 \beta} \quad (11.5)$$

y

$$\begin{cases} N_1 = \frac{2P \cos^2 \alpha}{4 + \cos^3 \alpha + \cos^3 \beta} \\ N_2 = \frac{2P \cos^2 \beta}{4 + \cos^3 \alpha + \cos^3 \beta} \end{cases} \quad (11.6)$$

- b) Calcular el alargamiento de las barras

Solución:

$$\Delta l_1 = \frac{2Pl \cos \alpha}{EA(4 + \cos^3 \alpha + \cos^3 \beta)} \quad (11.7)$$

$$\Delta l_2 = \frac{2Pl \cos \beta}{EA(4 + \cos^3 \alpha + \cos^3 \beta)} \quad (11.8)$$

$$\Delta l_3 = \frac{4Pl}{EA(4 + \cos^3 \alpha + \cos^3 \beta)} \quad (11.9)$$

- c) Determinar el giro de la barra rígida AB debido a la carga P (en milésimas de grado)

Solución:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\Delta l_3}{2l}\right) \frac{180}{\pi} 1e03 = \arctan\left(\frac{N_3}{2EA}\right) \frac{180}{\pi} 1e03 \quad (11.10)$$

- d) Determinar el valor de carga P para que no se supera la tensión normal admisible $\sigma_{adm} = 250$ MPa en las secciones de las barras.

Solución:

Tensiones normales en las barras:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A}; \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{A} \quad (11.11)$$

La condición para que no supere la tensión normal admisible en las secciones de las barras:

$$\text{máx}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_{adm}$$

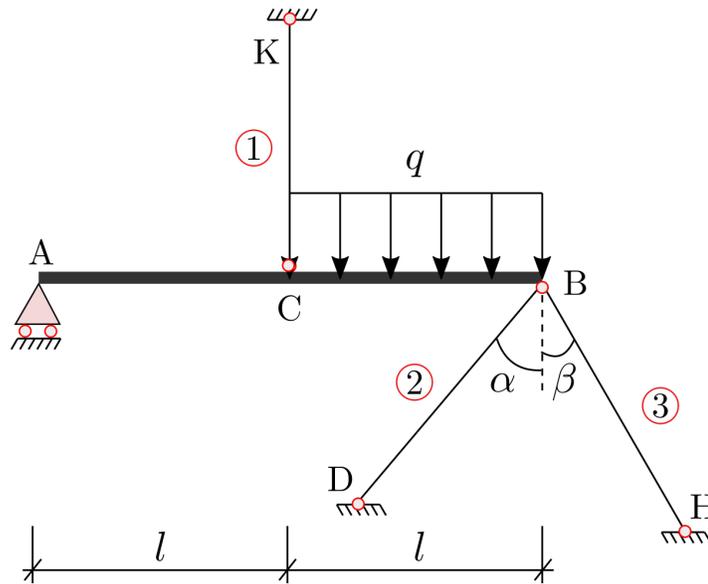
o sea

$$\frac{4P}{A(4 + \cos^3 \alpha + \cos^3 \beta)} \leq \sigma_{adm}$$

El valor de carga P máximo:

$$P_{max} = \frac{\sigma_{adm} A (4 + \cos^3 \alpha + \cos^3 \beta)}{4}$$

2. Una barra AB perfectamente rígida está sujeta mediante tres barras del mismo material enlazadas por medio de articulaciones como se indica en la siguiente figura. Se aplica una carga uniformemente distribuida q sobre el tramo CB de la barra AB. Las barras tienen la misma longitud l , el mismo área de sección A , el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.



Se pide:

- Determinar la fuerza axial en la barra 2 (3 puntos).
- Determinar el alargamiento de la barra más traccionada (2 punto).
- Determinar el giro de la barra rígida AB en milésimas de grado (2 punto).
- Calcular la variación unitaria de volumen de la barra 1 en milésimas (1 punto).

Solución

Grado de hiperstaticidad:

$$G.H = 4 - 3 = 1$$

Ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow N_3 \sin \beta = N_2 \sin \alpha \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow V_A + N_1 = ql + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \beta \\ \sum M_A = 0 &\rightarrow N_1 l = \frac{3}{2}ql^2 + 2l(N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \beta) \end{aligned}$$

Ecuación de compatibilidad obtenida con el PTVC: aplica una fuerza virtual unitaria interna en la barra 1 $\delta N_1 = 1$. Con las ecuaciones de equilibrio, se puede obtener las fuerzas internas virtuales en las barras 2 y 3 como

$$\delta N_2 = \frac{\sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$$

$$\delta N_3 = \frac{\sin \alpha}{2 \sin(\alpha + \beta)}$$

El trabajo virtual interno:

$$\delta W_{int} = \delta N_1 \Delta l_1 + \delta N_2 \Delta l_2 + \delta N_3 \Delta l_3 = 0$$

o sea:

$$N_2 = -\frac{2N_1 \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$$

$$N_3 = -\frac{2N_1 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$$

Sustituyéndolos en la ecuación de equilibrio de momento flector en el punto A, se obtiene:

$$N_1 = \frac{3}{2} ql \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 4 \sin^2(\alpha + \beta)}$$

$$N_2 = -\frac{3ql \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 4 \sin^2(\alpha + \beta)}$$

$$N_3 = -\frac{3ql \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 4 \sin^2(\alpha + \beta)}$$

El alargamiento de la barra más traccionada:

$$\Delta l = \text{máx} \left\{ \frac{N_1 l}{EA}, \frac{N_2 l}{EA}, \frac{N_3 l}{EA} \right\}$$

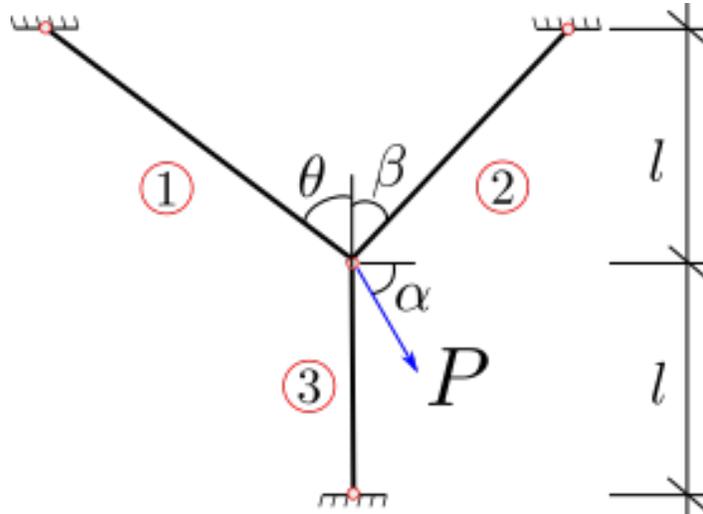
El giro de la barra rígida:

$$\theta = \arctan \left(\frac{\Delta l_1}{l} \right)$$

Variación unitaria del volumen de la barra 1:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{N_1(1 - 2\nu)}{EA}$$

3. Dada una estructura formada por 3 barras como se muestra en la siguiente figura. Las tres barras son del mismo material y tienen el mismo área de sección $A =$. El material es elástico lineal y tiene el módulo de elasticidad $E =$.



- Determinar las fuerzas axiales en las barras
- El desplazamiento vertical del punto donde se aplica la carga P
- Determinar el valor de carga P para que no se supera la tensión normal admisible σ_{adm} en las secciones de las barras.

Solución

Grado de hiperestaticidad:

$$G.H = 3 + 6 - 4 \times 2 = 1$$

Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_1 \sin \theta + N_2 \sin \beta + P \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 \cos \theta + N_2 \cos \beta - N_3 - P \sin \alpha = 0$$

Ecuación de compatibilidad obtenida con el PTVC: aplica una fuerza virtual unitaria interna en la barra 3 $\delta N_3 = 1$. Con las ecuaciones de equilibrio, se puede obtener las fuerzas internas virtuales en las barras 1 y 2 como

$$\delta N_1 = \frac{\sin \beta}{\sin(\theta + \beta)}$$

$$\delta N_2 = \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \beta)}$$

El trabajo virtual interno:

$$\delta W_{int} = \delta N_1 \Delta l_1 + \delta N_2 \Delta l_2 + \delta N_3 \Delta l_3 = 0$$

o sea:

$$N_1 \sin \beta + N_2 \sin \theta + N_3 \sin(\theta + \beta) = 0$$

Resolviendo el sistema de 3 ecuaciones, se obtiene:

$$N_1 = \frac{P(\sin(\theta + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin \theta \cos \alpha)}{\sin^2(\theta + \beta) + \sin^2 \beta + \sin^2 \theta}$$

$$N_2 = -\frac{P(\sin(\theta + \beta) \cos(\alpha + \theta) + \sin \beta \cos \alpha)}{\sin^2(\theta + \beta) + \sin^2 \beta + \sin^2 \theta}$$

$$N_3 = -\frac{P(\sin \beta \cos(\alpha - \beta) - \sin \theta \cos(\alpha + \theta))}{\sin^2(\theta + \beta) + \sin^2 \beta + \sin^2 \theta}$$

Desplazamiento vertical del punto P:

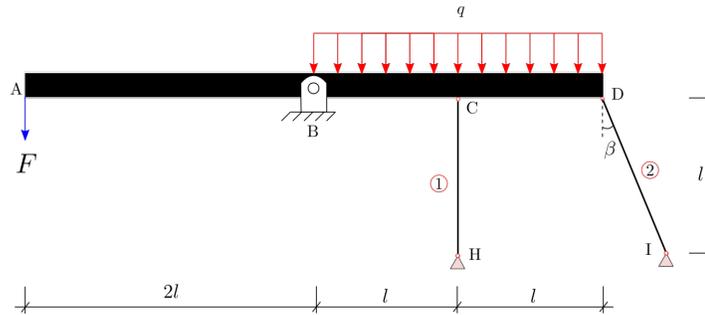
$$u_y^P = \frac{N_3 * L}{EA} = -\frac{PL(\sin \beta \cos(\alpha - \beta) - \sin \theta \cos(\alpha + \theta))}{EA(\sin^2(\theta + \beta) + \sin^2 \beta + \sin^2 \theta)}$$

Para determinar el valor de carga P de tal forma que la tensión normal en las barras no supere la tensión admisible, tenemos que hallar cual es la tensión normal máxima

$$\text{máx}\{N_1/A, N_2/A, N_3/A\} = \sigma_{adm}$$

Desde esta condición, se puede hallar el valor de P.

4. Una barra ABCD perfectamente rígida está apoyada en el punto B (se permite su giro alrededor de este punto), y conectada dos barras del mismo material enlazadas por medio de articulaciones como se indica en la siguiente figura. Se aplica una carga F kN en el punto A de la barra rígida y una carga uniformemente distribuida en el tramo BD. Las barras tienen la misma sección transversal A mm² y el módulo de elasticidad E GPa. Los datos geométricos de la estructura: l y β .



- Determinar la fuerza axial en la barra CH (en kN).
- Desplazamiento vertical en el punto A en valor absoluto (en mm).
- Determinar el valor de la carga F para que las tensiones en compresión en las barras no superen la tensión admisible $\sigma_{adm} = 145$ MPa.
- Determinar el ΔT que debe aplicar sobre la barra CH de tal forma que el desplazamiento vertical en el punto A sea cero, conociendo el coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 15e - 06$ °C⁻¹.

Solución

Apartado 1

El grado de hiperestaticidad:

$$G.H = 4 - 3 = 1$$

Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \implies H_B + N_2 \sin \beta = 0 \tag{11.12}$$

$$\sum F_y = 0 \implies V_B - F - 2ql - N_1 N_2 \cos \beta = 0 \tag{11.13}$$

$$\sum M_B = 0 \implies 2F - 2ql - N_1 - 2N_2 \cos \beta = 0 \tag{11.14}$$

Ecuación de compatibilidad:

Para obtener esta ecuación, se aplica el PTVC. Se aplica una fuerza virtual interna $\delta N_2 = 1$. Por el equilibrio de momento en el punto B, tenemos:

$$\delta N_1 = -2 \cos \beta \tag{11.15}$$

El trabajo virtual interno complementario:

$$\begin{aligned}\delta W_{int}^C &= \int_0^l \frac{\delta N_1 N_1}{EA} dx + \int_0^{l/\cos\beta} \frac{\delta N_2 N_2}{EA} dx \\ &= -\frac{2N_1 l \cos\beta}{EA} + \frac{N_2 l}{EA \cos\beta} = \delta W_{ext}^C\end{aligned}\quad (11.16)$$

Pues, se obtiene:

$$N_2 = 2N_1 \cos^2 \beta \quad (11.17)$$

Lo sustituye en la ecuación (3), se obtiene:

$$N_1 = \frac{2(F - ql)}{1 + 4 \cos^3 \beta} \quad (11.18)$$

Por tanto:

$$N_2 = \frac{4(F - ql) \cos^2 \beta}{1 + 4 \cos^3 \beta} \quad (11.19)$$

Apartado 2

El desplazamiento vertical del punto A:

$$V_A = 2\Delta l_1 = 2 \frac{N_1 l}{EA} = \frac{4l(F - ql)}{EA} \quad (11.20)$$

Apartado 3

Las tensiones en las barras son:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{2(F - ql)}{A(1 + 4 \cos^3 \beta)} \quad (11.21)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{4(F - ql) \cos^2 \beta}{A(1 + 4 \cos^3 \beta)} \quad (11.22)$$

La tensión máxima:

$$\sigma_{max} = \max(\|\sigma_1\|, \|\sigma_2\|) \leq \sigma_{adm}$$

Apartado 4

Con la condición de que el punto A no se mueve verticalmente, pues la barra 2 (DI) no trabaja. Por ello, se puede obtener el axil que aparece en la barra 1 (CH) por el equilibrio es:

$$N_1 = 2(F - ql) \quad (11.23)$$

Ya que el punto C tampoco va a mover, con lo cual, tenemos la siguiente condición:

$$\frac{N_1 l}{EA} + \alpha \Delta T l = 0 \tag{11.24}$$

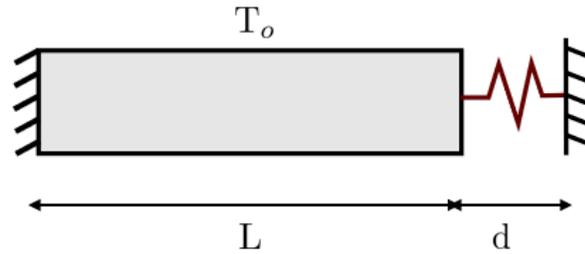
De esta ecuación, se obtiene la variación de temperatura:

$$\Delta T = \frac{2(q l - F)}{\alpha EA}$$

Cuadro 11.1: Versiones del examen

Versión	Datos						Preguntas			
	q (kN/m)	A (mm ²)	E (GPa)	l (m)	F (kN)	β (°)	1 (kN)	2 (mm)	3 (kN)	4 °
I	4	50	70	3	10	30	-1,112	1,9	3,30	76,2
II	3	60	70	4	8	45	-3,313	6,3	1,50	127,0
III	4	40	70	3	10	60	-2,667	5,7	7,65	95,2
IV	5	80	70	2	8	60	-2,667	1,9	1,3	47,6

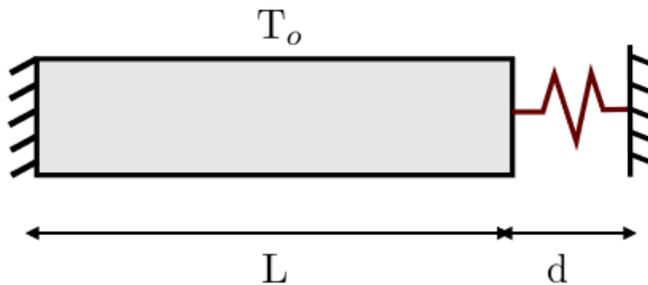
- Una columna de longitud L a temperatura ambiente T_0 apoya en una base rígida por su extremo izquierdo, y está unida a un muelle de constante K y longitud d sin tensión, por el extremo derecho. Se somete a la columna a un calentamiento constante de temperatura.



- Temperatura final de la barra que acorta la longitud del muelle a la cuarta parte del mismo (El muelle no está trabajando).
- Temperatura final de la barra que acorta la longitud del muelle a la cuarta parte del mismo (El muelle está trabajando).
- El axil del muelle cuando la longitud del mismo es la mitad. Indicar el tipo de axil.
- El axil térmico en la barra si la sometemos a una variación de temperatura de 35°C . Indicar el tipo de axil.

Datos: $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $L = 3,5\text{ m}$, $A = 1\text{ m}^2$, $d = 1,2\text{ mm}$, $\alpha = 1,3 \cdot 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$,
 $E = 205\text{ GPa}$, $K = \frac{0,5EA}{L}$

Solución



- Temperatura final de la barra que acorta la longitud del muelle a la cuarta parte del mismo (El muelle no está trabajando).**

El muelle no está trabajando. Esto implica que el desplazamiento de la barra es debido al efecto térmico que actúa sobre la misma.

$$u_{\text{Térmico}} = \alpha \Delta T L \quad u_{\text{Mecánico}} = \frac{NL}{EA} = 0$$

Imponiendo que el desplazamiento final de la barra es $\frac{d}{4}$, se despeja la variación térmica

$$u_{\text{Total}} = u_{\text{Térmico}} + u_{\text{Mecánico}} = \frac{d}{4}$$

$$\alpha \Delta T L = \frac{d}{4} \rightarrow \Delta T = \frac{d}{4 \alpha L} \rightarrow \Delta T = 6,59 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_F = 26,59 \text{ } ^\circ\text{C}$$

- b) **Temperatura final de la barra que acorta la longitud del muelle a la cuarta parte del mismo (El muelle está trabajando).**

El muelle está trabajando. En este caso el desplazamiento de la barra es debido tanto a la temperatura como a los axiles mecánicos provocados por la acción del muelle sobre la barra.

$$u_{\text{Térmico}} = \alpha \Delta T L \quad u_{\text{Mecánico}} = \frac{NL}{EA} = \frac{-F_{\text{Muelle}}L}{EA}$$

Imponiendo que el desplazamiento final de la barra es $\frac{d}{4}$, se despeja la variación térmica en la barra:

$$u_{\text{Total}} = u_{\text{Térmico}} + u_{\text{Mecánico}} = \frac{d}{4}$$

$$\alpha \Delta T L + \frac{-F_{\text{Muelle}} L}{EA} = \frac{d}{4} \rightarrow \alpha \Delta T L + \frac{\left(-K \frac{d}{4}\right)L}{EA} = \frac{d}{4} \rightarrow \Delta T = \frac{3 d}{8 \alpha L} = 9,88 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_F = 29,88 \text{ } ^\circ\text{C}$$

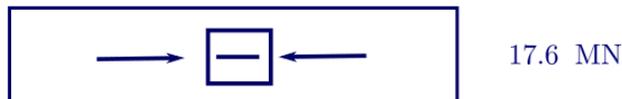
- c) **El axil del muelle cuando la longitud del mismo es la mitad. Indicar el tipo de axil.**

La fuerza del muelle se calcula utilizando la fórmula siguiente:

$$F_{\text{Muelle}} = K \delta_{\text{Muelle}} = \left(\frac{0,5 A E}{L}\right) \left(\frac{d}{2}\right)$$

$$F_{\text{Muelle}} = 17,6 \text{ MN}$$

El axil en el muelle es un axil de compresión y constante.



- d) **El axil térmico en la barra si la sometemos a una variación de temperatura de 35°C. Indicar el tipo de axil.**

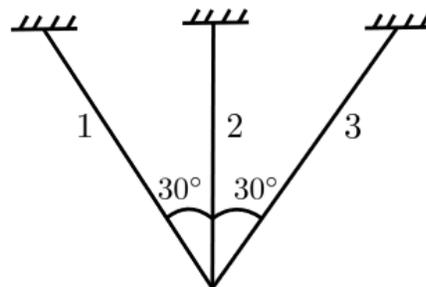
El axil térmico se calcula utilizando la fórmula siguiente:

$$N(x) = E A \alpha \Delta T = 93,27 \text{ MN} = N(x)$$

El axil térmico en la barra es de tracción y constante al ser $\Delta T > 0^\circ \text{C}$.



6. Sea la estructura de la figura. La barra 2 está sometida a una variación de temperatura de 40 °C.



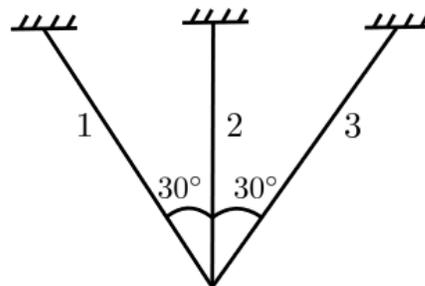
- a) Axil de la barra 2.
- b) Axil de la barra 1.
- c) Desplazamiento de la barra 2.
- d) Desplazamiento de la barra 3.

Datos: $T = 40 \text{ }^\circ\text{C}$, $L_2 = 1 \text{ m}$, $A = 200 \text{ mm}^2$, $\alpha = 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $E = 210 \text{ GPa}$

Solución

Calcular la longitud de la barra $L_1 = L_3$ utilizando las propiedades geométricas:

$$L_1 \cos(30^\circ) = L_2 \rightarrow L_1 = \frac{L_2}{\cos(30^\circ)} \quad \text{(I)}$$



- a) **Axil de la barra 2.**

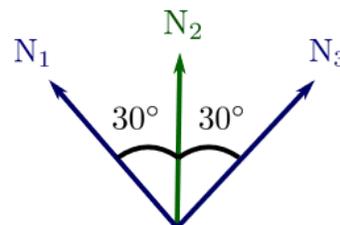
Equilibrio de fuerzas para calcular los axiles N_1, N_2, N_3 :

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_1 \sin(30^\circ) + N_3 \sin(30^\circ) = 0$$

$$N_1 = N_3 \quad \text{(II)}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_2 + N_1 \cos(30^\circ) + N_3 \cos(30^\circ) = 0$$

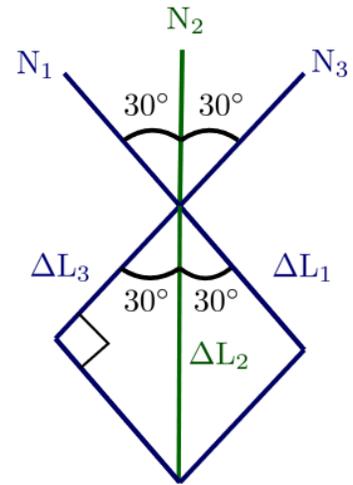
$$N_2 + 2N_1 \cos(30^\circ) = 0 \quad \text{(III)}$$



Desplazamientos de las barras (El dibujo está realizado con la suposición de que todas las barras trabajan a tracción):

$$\Delta L_1 = \Delta L_3 \rightarrow \Delta L_1 = \Delta L_2 \cos(30^\circ)$$

$$\frac{N_1 L_1}{EA} = \left(\frac{N_2 L_2}{EA} + \alpha \Delta T L_2 \right) \cos(30^\circ) \quad (\text{IV})$$



La resolución de las ecuaciones (I),(II),(III) y (IV) dará el valor del axil N_2 :

$$N_2 = -9488,60 \text{ N}$$

b) Axil de la barra 1.

La resolución de las ecuaciones (I),(II),(III) y (IV) dará el valor del axil N_2 :

$$N_2 = 5478,25 \text{ N}$$

c) Desplazamiento de la barra 2.

El desplazamiento de la barra 2 será:

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} + \alpha \Delta T L_2 = -1,859 \cdot 10^{-4} \text{ m} = L_2$$

d) Desplazamiento de la barra 3.

El desplazamiento de la barra 3 será:

$$\Delta L_3 = \frac{N_3 L_3}{EA} = 1,506 \cdot 10^{-4} \text{ m} = L_3$$

El desplazamiento de la barra 1 será igual al desplazamiento de la barra 3.

7. Se tiene un sólido de revolución de grandes dimensiones con longitud L y ley de áreas $A(x)$ desconocida. El sólido está apoyado de forma que su eje longitudinal es perpendicular al suelo, y se encuentra sometido a su propio peso.

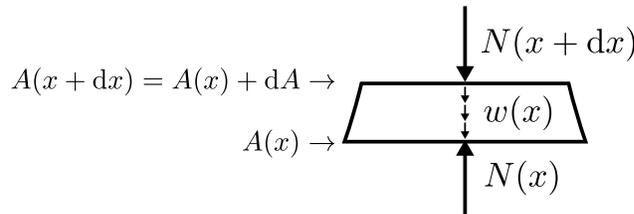
Aplicando una carga puntual F de compresión en la sección superior, se desea que toda sección del sólido se encuentre sometida a la misma tensión longitudinal σ . Para un sólido de peso específico γ (peso por unidad de volumen), hallar:

- a) La ley de áreas $A(x)$ en función de los parámetros del problema (F, σ, γ, L)
- b) La reacción del suelo

Nota: Para el apartado 1, plantear el equilibrio de fuerzas en una rebanada diferencial del sólido

Solución

- a) Colocando el eje x con origen en el suelo, se puede plantear la siguiente rebanada:



donde se ha colocado la carga a compresión teniendo en cuenta que la carga F es a compresión, y que el peso va introduciendo compresión a medida que avanza desde la parte superior a la inferior. Se deja como ejercicio plantear dicha rebanada a tracción, demostrando que dicha fuerza es realmente de compresión.

El equilibrio de fuerzas en la rebanada da como resultado

$$N(x) = N(x + dx) + \int_x^{x+dx} w(x) dx$$

El esfuerzo axial, teniendo en cuenta que la tensión es constante i.e. $\sigma_{xx} = \sigma$

$$N(x) = \int_A \sigma_{xx} dA = \sigma A(x)$$

Por lo tanto, el esfuerzo axial en la rebanada infinitesimalmente superior es

$$N(x + dx) = \sigma A(x + dx) = \sigma (A(x) + dA)$$

Por último, sabiendo que $w(x) = \gamma A(x)$, la resultante del peso en la rebanada diferencial puede expresarse como

$$\begin{aligned}
 \int_x^{x+dx} w(x)dx &= \gamma \int_x^{x+dx} A(x)dx \\
 &= \frac{1}{2}\gamma [A(x) + A(x+dx)]dx \\
 &= \frac{1}{2}\gamma [2A(x) + dA]dx \\
 &= \gamma A(x)dx + o(dx dA) \\
 &\simeq \gamma A(x)dx
 \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la regla del trapecio para la integración. También puede plantearse que el efecto del peso es γ multiplicado por el volumen de la rebanada, que es aproximadamente $A(x)dx$ –cometiendo un error (despreciable) de $\sim o(dx dA)$.

Sustituyendo todo lo anterior en el equilibrio de fuerzas, se tiene

$$\begin{aligned}
 \sigma A(x) &= \sigma A(x) + \sigma dA + \gamma A(x)dx \\
 \Rightarrow -\sigma dA &= \gamma A(x)dx
 \end{aligned}$$

Integrando de 0 a x , se tiene

$$\int_{A_0}^{A(x)} \frac{dA}{A} = -\frac{\gamma}{\sigma} \int_0^x dx$$

Llegando a una ley de áreas exponencial

$$A(x) = A_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{\sigma}x\right)$$

con A_0 aún por determinar. Para ello, sabiendo que σ es constante, se va a igualar el esfuerzo axial en la sección superior con la fuerza F aplicada

$$N(L) = \sigma A(L) = F$$

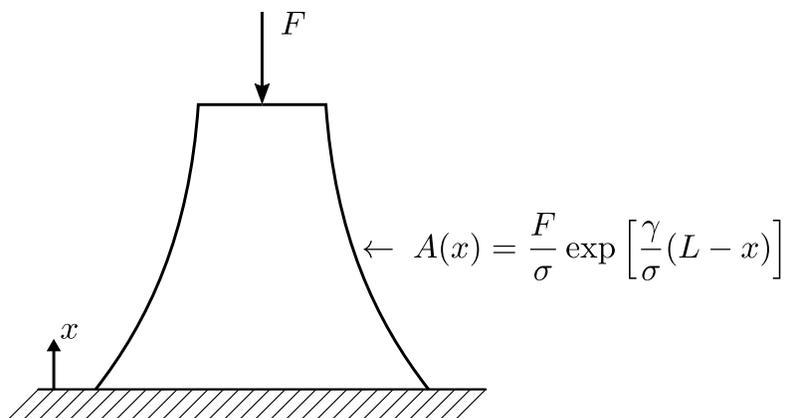
Por lo que particularizando la ley de áreas en el extremo $x = L$ y aplicando la anterior igualdad, se determina la constante A_0

$$A_0 = \frac{F}{\sigma} \exp\left(\frac{\gamma}{\sigma}L\right)$$

Con todo ello, la ley de áreas queda determinada en función de los parámetros del problema

$$\boxed{A(x) = \frac{F}{\sigma} \exp\left[\frac{\gamma}{\sigma}(L-x)\right]}$$

A continuación se muestra una representación gráfica de esta ley



Esta es una estructura que puede apreciarse en grandes construcciones, como pueden ser las chimeneas de centrales nucleares.

- b) La reacción del suelo es la particularización del esfuerzo axial en $x = 0$, es decir

$$R = N(0) = \sigma A_0$$

Expresado en función de los parámetros del problema

$$R = F \exp \left(\frac{\gamma}{\sigma} L \right)$$

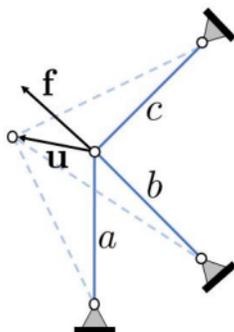
De igual modo, dicho resultado podría haberse obtenido con el equilibrio de fuerzas considerando toda la estructura

$$R = F + W$$

con

$$W = \int_0^L w(x) dx = \gamma \int_0^L A(x) dx$$

8. La figura muestra una estructura que ante una sollicitación $\mathbf{f} = (f_1, f_2, 0)^T$ (N) en un nudo, este se desplaza $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)^T$ (mm). Todas las barras tienen el mismo área A . Las barras a y b tienen una rigidez E_1 y la barra c tiene una rigidez E_2 .



Datos:

$$\mathbf{f} = (-1500, 1000, 0)^T \text{ N}$$

$$\mathbf{u} = (-2, 1, 0)^T \text{ mm}$$

$$A = 400 \text{ mm}^2$$

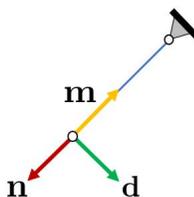
Todas las barras tienen la misma longitud $L = 1000 \text{ mm}$

Se pide:

- Determinar la elongación y el giro de cada barra.
- Determinar el valor de E_1 y E_2 .

Solución

Lo primero que debemos calcular son los vectores asociados a cada barra. Recordamos que los vectores unitarios que describen la elongación, la fuerza en el nudo y el giro son de cada barra en su nudo libre:



Y sus ecuaciones serán:

$$\mathbf{m} = -\mathbf{n} \quad (11.25)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_3 \quad (11.26)$$

Los valores para cada barra se pueden ver en la siguiente tabla:

	Barra a	Barra b	Barra c
\mathbf{n}	$(0, 1, 0)^T$	$(-\sqrt{0,5}, \sqrt{0,5}, 0)^T$	$(-\sqrt{0,5}, -\sqrt{0,5}, 0)^T$
\mathbf{m}	$(0, -1, 0)^T$	$(\sqrt{0,5}, -\sqrt{0,5}, 0)^T$	$(\sqrt{0,5}, \sqrt{0,5}, 0)^T$
\mathbf{d}	$(-1, 0, 0)^T$	$(-\sqrt{0,5}, -\sqrt{0,5}, 0)^T$	$(\sqrt{0,5}, -\sqrt{0,5}, 0)^T$

Con ello las elongaciones totales (δ) de cada barra serán:

$$\delta_a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_a = u_2 = \delta_{mec_a} = 1,00 \text{ mm} \quad (11.27)$$

$$\delta_b = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_b = -\sqrt{0,5}u_1 + \sqrt{0,5}u_2 = \delta_{mec_b} = 2,12 \text{ mm} \quad (11.28)$$

$$\delta_c = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_c = -\sqrt{0,5}u_1 - \sqrt{0,5}u_2 = \delta_{mec_c} = 0,71 \text{ mm} \quad (11.29)$$

Que al no existir elongaciones térmicas coinciden con las elongaciones mecánicas que afectan los axiles

(δ_{mec}).

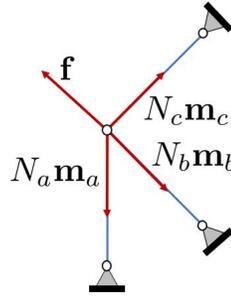
Los giros serán:

$$\theta_a = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{d}_a}{L} = \frac{-u_1}{L} = 0,002 \text{ rad} \quad (11.30)$$

$$\theta_b = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{d}_b}{L} = \frac{-\sqrt{0,5}u_1 - \sqrt{0,5}u_2}{L} = 0,0007 \text{ rad} \quad (11.31)$$

$$\theta_c = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{d}_c}{L} = \frac{\sqrt{0,5}u_1 - \sqrt{0,5}u_2}{L} = -0,002 \text{ rad} \quad (11.32)$$

Para calcular las rigideces de cada barra realizamos el equilibrio de fuerzas vectorial en el nodo donde está aplicada la carga:



En primer lugar calculamos los axiles desde las elongaciones, que como cada barra tiene un nodo libre y el otro restringido, estará definido por la elongación del nodo libre:

$$N_a = \frac{\delta_a EA}{L} = 0,40E_1 N \quad (11.33)$$

$$N_b = \frac{\delta_b EA}{L} = 0,84E_1 N \quad (11.34)$$

$$N_c = \frac{\delta_c EA}{L} = 0,28E_2 N \quad (11.35)$$

$$\sum F = 0 \rightarrow \mathbf{f} + N_a \mathbf{m}_a + N_b \mathbf{m}_b + N_c \mathbf{m}_c = 0 \quad (11.36)$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}_X + \begin{bmatrix} 0 \\ -N_a \\ 0 \end{bmatrix}_X + \begin{bmatrix} \sqrt{0,5}N_b \\ -\sqrt{0,5}N_b \\ 0 \end{bmatrix}_X + \begin{bmatrix} \sqrt{0,5}N_c \\ \sqrt{0,5}N_c \\ 0 \end{bmatrix}_X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_X \quad (11.37)$$

Del equilibrio por componentes de esta ecuación vectorial es de donde salen las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$. En este caso, como la estructura es plana en $x - y$, la ecuación en z es $0 + 0 + 0 + 0 = 0$, por lo que no nos sirve como ecuación para resolver nuestras incógnitas. Por componentes tenemos:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow f_1 + 0 + \sqrt{0,5}N_b + \sqrt{0,5}N_c = 0 \quad (11.38)$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -1500 + 0 + 0,59E_1 + 0,2E_2 = 0 \quad (11.39)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow f_1 - N_a - \sqrt{0,5}N_b + \sqrt{0,5}N_c = 0 \quad (11.40)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 1000 - 0,4E_1 - 0,59E_1 + 0,2E_2 = 0 \quad (11.41)$$

Con las ecuaciones 11.39 y 11.41 podemos resolver E_1 y E_2 , obteniendo:

$$E_1 = 1573,82 \text{ MPa} \quad (11.42)$$

$$E_2 = 2821,80 \text{ MPa} \quad (11.43)$$

Para comprobar nuestro resultado vamos a hacer el equilibrio entre el trabajo externo y la energía interna. Para ello calculamos el trabajo externo como:

$$W_{ext} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}{2} = \frac{f_1 u_1 + f_2 u_2}{2} = 2000 \text{ Nmm} \quad (11.44)$$

Y la energía interna será:

$$W_{int} = \frac{N_a \delta_a + N_b \delta_b + N_c \delta_c}{2} = \frac{629,53 + 2801,66 + 564,59}{2} = 1998 \text{ Nmm} \quad (11.45)$$

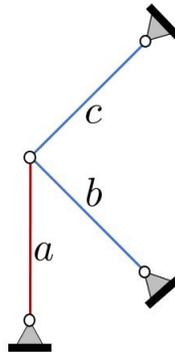
Con estos resultados validamos nuestro cálculo, ya que $W_{ext} = W_{int}$. El error de redondeo que hemos cometido será de:

$$error = \frac{|W_{int} - W_{ext}|}{W_{ext}} = 0,001 = 0,1 \% \quad (11.46)$$

Incremento térmico

Caso 1

Ahora la estructura vuelve a un estado de reposo, y sin ninguna carga, se aplica un incremento térmico a la barra a . Su coeficiente de dilatación térmico es $\alpha = 10^{-5} 1/C^o$ y el incremento térmico es $\Delta T = 250 C^o$.



Ahora, vamos a realizar compatibilidad de nuevo, pero considerando un vector desplazamiento genérico en el plano $x - y$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)^T$, puesto esta es ahora nuestra incógnita

Con ello las elongaciones totales (δ) de cada barra serán:

$$\delta_a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_a = u_2 = \delta_{mec_a} + \delta_T \quad (11.47)$$

$$\delta_b = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_b = -\sqrt{0,5}u_1 + \sqrt{0,5}u_2 = \delta_{mec_b} \quad (11.48)$$

$$\delta_c = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_c = -\sqrt{0,5}u_1 - \sqrt{0,5}u_2 = \delta_{mec_c} \quad (11.49)$$

Que son las elongaciones totales, pero en la barra a la elongación mecánica difiere de la total por el incremento térmico, esto es: $\delta_{total} = \delta_{mecanica} + \delta_{termica}$. Con ello las elongaciones mecánicas coinciden con las totales en todos los casos menos a , donde:

$$\delta_{mec_a} = \delta_a - \delta_T = \delta_a - \alpha \Delta T L \quad (11.50)$$

Con ello, usando los valores de rigidez obtenidos anteriormente, los axiles quedan:

$$N_a = \left(\frac{u_2}{L} - \alpha \Delta T \right) EA = 629,5u_2 - 1573,8N \quad (11.51)$$

$$N_b = \frac{\delta_b EA}{L} = -445,14u_1 + 445,1u_2 N \quad (11.52)$$

$$N_c = \frac{\delta_c EA}{L} = -798,1u_1 - 798,1u_2 N \quad (11.53)$$

Con ello el sumatorio de fuerzas en el nudo donde convergen todas las barras será:

$$\sum F = 0 \rightarrow N_a \mathbf{m}_a + N_b \mathbf{m}_b + N_c \mathbf{m}_c = 0 \quad (11.54)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -N_a \\ 0 \end{bmatrix}_X + \begin{bmatrix} \sqrt{0,5}N_b \\ -\sqrt{0,5}N_b \\ 0 \end{bmatrix}_X + \begin{bmatrix} \sqrt{0,5}N_c \\ \sqrt{0,5}N_c \\ 0 \end{bmatrix}_X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_X \quad (11.55)$$

Con ello:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -249,6u_2 - 879,1u_1 = 0 \quad (11.56)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -1508,7u_2 - 249,6u_1 + 1573,8 = 0 \quad (11.57)$$

Despejando obtenemos $u_2 = 1,09$ mm y $u_1 = -0,31$ mm.

Con ello, sustituyendo valores:

$$\delta_a = 1,09 \text{ mm}, \delta_{mec_a} = 1,09 - 2,5 = -1,41 \text{ mm}, \delta_b = 0,99 \text{ mm}, \delta_c = -0,55 \text{ mm}$$

$$N_a = -888,2 \text{ N}, N_b = 623,2 \text{ N}, N_c = -622,5 \text{ N}$$

Para comprobar nuestro resultado vamos a hacer el equilibrio entre el trabajo externo y la energía interna. Para calcular la energía externa de la carga térmica aplicada a una barra i :

$$W_i = \frac{\delta_T(-N_a)}{2} = 1110,25 \text{ Nmm} \quad (11.58)$$

Donde el trabajo que introduce en la estructura la deformación elástica es igual a una fuerza contraria al axil recorriendo la elongación térmica

Que se sumará al trabajo de las cargas externas. Para ello calculamos el trabajo externo como:

$$W_{ext} = 1110,25 \text{ Nmm} \quad (11.59)$$

Y la energía interna será:

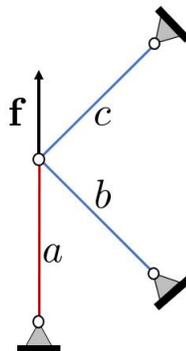
$$W_{int} = 1105,8 \text{ Nmm} \quad (11.60)$$

Con estos resultados validamos nuestro cálculo, ya que $W_{ext} = W_{int}$. El error de redondeo que hemos cometido será de:

$$error = \frac{|W_{int} - W_{ext}|}{W_{ext}} = 0,4\% \quad (11.61)$$

Caso 2

En este caso hay un incremento térmico como en el anterior caso, pero se le aplica una fuerza vertical $\mathbf{f} = (0, 1000, 0)^T$.



En este caso las ecuaciones de compatibilidad son las mismas que en el Caso 1, aunque al resolver los valores del desplazamiento del nudo serán diferentes. Por ello también, las ecuaciones para definir los axiles mediante la compatibilidad también serán iguales. Lo que cambiará será la ecuación de equilibrio, al introducir \mathbf{f} :

$$\sum F = 0 \rightarrow \mathbf{f} + N_a \mathbf{m}_a + N_b \mathbf{m}_b + N_c \mathbf{m}_c = 0 \quad (11.62)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix}_X + \begin{bmatrix} 0 \\ -N_a \\ 0 \end{bmatrix}_X + \begin{bmatrix} \sqrt{0,5}N_b \\ -\sqrt{0,5}N_b \\ 0 \end{bmatrix}_X + \begin{bmatrix} \sqrt{0,5}N_c \\ \sqrt{0,5}N_c \\ 0 \end{bmatrix}_X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_X \quad (11.63)$$

Sustituyendo y despejando obtenemos:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \sqrt{0,5}N_b + \sqrt{0,5}N_c = -249,6u_2 - 879,1u_1 = 0 \quad (11.64)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 1000 - N_a - \sqrt{0,5}N_b + \sqrt{0,5}N_c = 1000 - 1508,7u_2 - 249,6u_1 + 1573,8 = 0 \quad (11.65)$$

Despejando obtenemos $u_2 = 1,78 \text{ mm}$ y $u_1 = -0,5 \text{ mm}$.

Con ello, sustituyendo valores:

$$\delta_a = 1,78 \text{ mm}, \delta_{mec_a} = 1,78 - 2,5 = -0,72 \text{ mm}, \delta_b = 1,61 \text{ mm}, \delta_c = -0,9 \text{ mm}$$

$$N_a = -473,3 \text{ N}, N_b = 1014,8 \text{ N}, N_c = -1021,5 \text{ N}$$

Y para comprobar calculamos el equilibrio de energías:

$$W_{ext} = 890 + \frac{\delta_T(-N_a)}{2} = 1456,6 \text{ Nmm} \quad (11.66)$$

Y la energía interna será:

$$W_{int} = 1439,7 \text{ Nmm} \quad (11.67)$$

Con estos resultados validamos nuestro cálculo, ya que $W_{ext} = W_{int}$. El error de redondeo que hemos cometido será de:

$$error = \frac{|W_{int} - W_{ext}|}{W_{ext}} = 1,1 \% \quad (11.68)$$

Caso 3

En este caso hay un incremento térmico como en el anterior caso pero negativo ($\Delta T = -250\text{ C}^\circ$), pero se le aplica de nuevo una fuerza vertical $\mathbf{f} = (0, 1000, 0)^T$. Este caso es como el anterior, pero tendremos en el equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \sqrt{0,5}N_b + \sqrt{0,5}N_c = -249,6u_2 - 879,1u_1 = 0 \quad (11.69)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 1000 - N_a - \sqrt{0,5}N_b + \sqrt{0,5}N_c = 1000 - 1508,7u_2 - 249,6u_1 - 1573,8 = 0 \quad (11.70)$$

Despejando obtenemos $u_2 = -0,39\text{ mm}$ y $u_1 = 0,11\text{ mm}$.

Con ello, sustituyendo valores:

$$\delta_a = -0,39\text{ mm}, \delta_{mec_a} = -0,39 + 2,5 = 2,11\text{ mm}, \delta_b = -0,35\text{ mm}, \\ \delta_c = 0,19\text{ mm}$$

$$N_a = 1328,3\text{ N}, N_b = -222,5\text{ N}, N_c = 223,5\text{ N}$$

Y para comprobar calculamos el equilibrio de energías. En este caso, la fuerza externa genera un trabajo negativo, ya que descarga a la barra con el incremento térmico negativo:

$$W_{ext} = \frac{\delta_a f_2}{2} + \frac{\delta_T(-N_a)}{2} = \frac{-0,39 \times 1000}{2} + \frac{-2,5 \times -1328,3}{2} \quad (11.71)$$

$$W_{ext} = 1465,4\text{ Nmm} \quad (11.72)$$

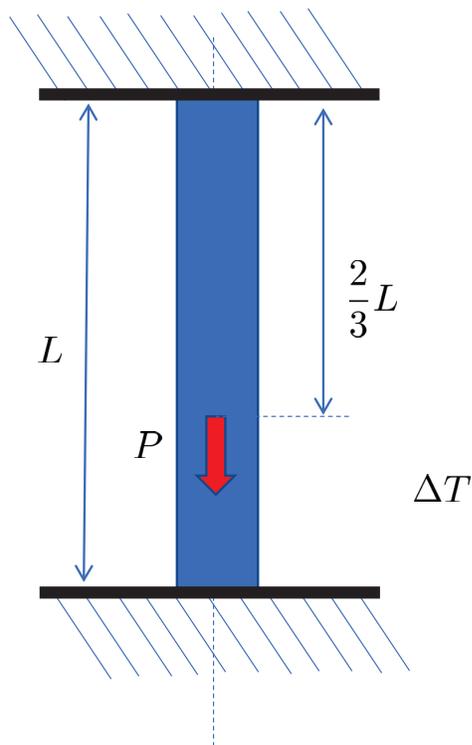
Y la energía interna será:

$$W_{int} = \frac{1328,3 \times 2,11}{2} + 38,9 + 22,1 = 1462,4\text{ Nmm} \quad (11.73)$$

Con estos resultados validamos nuestro cálculo, ya que $W_{ext} = W_{int}$. El error de redondeo que hemos cometido será de:

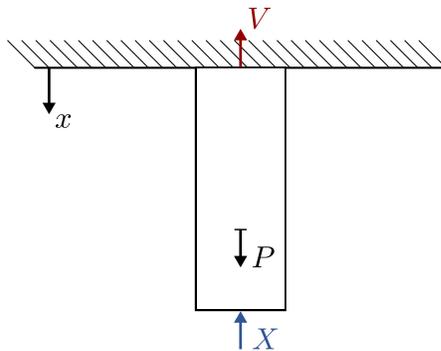
$$error = \frac{|W_{int} - W_{ext}|}{W_{ext}} = 0,2\% \quad (11.74)$$

9. Dada la barra de la figura, con sección rectangular A , módulo de elasticidad E y coeficiente de dilatación térmica α , determinar las reacciones en el apoyo inferior. Determinar el incremento de temperatura para que, si no hubiera apoyo inferior, el desplazamiento en ese punto fuera cero.



Solución

El problema es hiperestático de orden $OH = 1$. Por lo tanto, se escoge como incógnita hiperestática la reacción del apoyo inferior (se plantea a compresión, ver figura).



La reacción en el apoyo superior es, por equilibrio de fuerzas,

$$V = P - X$$

Así, la ley de esfuerzo axial es

$$N(x) = \begin{cases} P - X & \text{si } 0 \leq x \leq 2L/3 \\ -X & \text{si } 2L/3 \leq x \leq L \end{cases}$$

La ecuación de compatibilidad para resolver la incógnita hiperestática es que el alargamiento de la barra sea nulo i.e.

$$\delta = 0$$

La definición de alargamiento en una barra de longitud L (1-D, axial) es

$$\delta = \int_0^L \epsilon_{xx}(x)dx = \int_0^L \frac{\sigma_{xx}(x)}{E}dx = \int_0^L \frac{N(x)}{EA}dx$$

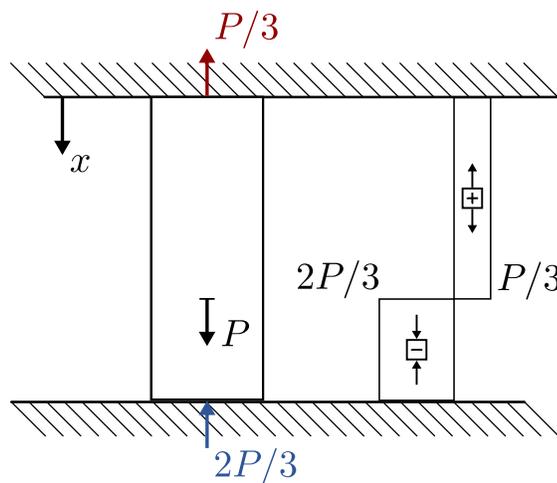
Sustituyendo la ley de esfuerzo axial $N(x)$ e imponiendo la condición de compatibilidad,

$$\begin{aligned} \frac{1}{EA} \left[\int_0^{2L/3} (P - X)dx - \int_{2L/3}^L Xdx \right] &= 0 \\ \frac{1}{EA} \left[(P - X)\frac{2L}{3} - \frac{XL}{3} \right] &= 0 \\ \frac{1}{EA} \left[\frac{2PL}{3} - XL \right] &= 0 \\ X &= \frac{2P}{3} \end{aligned}$$

Con ello, quedan determinadas las reacciones

$$\boxed{X = \frac{2P}{3}} \quad \boxed{V = \frac{P}{3}}$$

El diagrama de esfuerzo axial es el siguiente:



El segundo caso pedido es isostático, con la siguiente ley de esfuerzo axial:

$$N(x) = \begin{cases} P & \text{si } 0 \leq x \leq 2L/3 \\ 0 & \text{si } 2L/3 \leq x \leq L \end{cases}$$

La fórmula del alargamiento para un caso con incremento de temperatura es la siguiente:

$$\delta = \int_0^L \varepsilon_{xx}(x)dx = \int_0^L \frac{\sigma_{xx}}{E}(x)dx = \int_0^x \left(\frac{N(x)}{EA} + \alpha \Delta T \right) dx$$

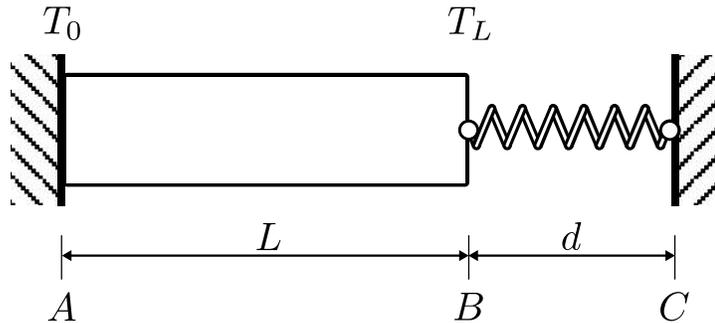
Para la ley de esfuerzo axial planteada,

$$\frac{2PL}{3EA} + \alpha \Delta TL = 0$$

Por lo que imponiendo la condición del enunciado (desplazamiento del punto inferior nulo i.e. $\delta = 0$), se llega a que

$$\Delta T = -\frac{2P}{3\alpha EA}$$

10. Una columna de longitud L a temperatura ambiente T_0 se encuentra apoyada en una base rígida por su extremo izquierdo, y está unida a un muelle de constante K y longitud d ($d \ll L$) sin tensión por su extremo derecho (i.e. la longitud inicial del muelle es d). La columna se somete a un calentamiento lineal: desde temperatura T_0 , en la base, hasta alcanzar una temperatura T_L , en el otro extremo.



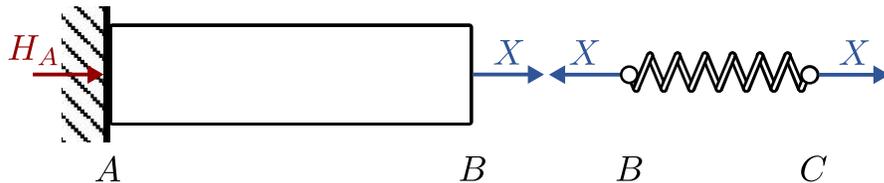
Calcular:

- La temperatura T_L , en $^{\circ}\text{C}$, que acorta la longitud del muelle a la mitad
- ¿Cuánto vale la fuerza en el muelle en dichas condiciones?
- Hallar el cociente entre la fuerza del muelle al uniformizar la temperatura en toda la columna al valor T_L y la fuerza del muelle calculada en el apartado anterior

Datos: $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$, $L = 3,5\text{ m}$, $A = 1\text{ m}^2$, $d = 1,2\text{ mm}$, $E = 205\text{ GPa}$, $K = \frac{EA}{2L}$, $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$

Solución

- El problema tiene un orden de hiperestaticidad $OH = 1$ (el apoyo en A o en C podría suprimirse, llegando a un problema isostático), por lo que se escoge plantear la reacción horizontal como incógnita hiperestática. Esta incógnita, que denominaremos X , debe ser tal que se cumpla la compatibilidad de deformaciones: que el desplazamiento en C sea nulo $u_C = 0$.



Mediante el equilibrio de fuerzas horizontales, se llega a que

$$H_A = -X$$

Por lo que tanto barra como muelle estarán sometidos a un esfuerzo axial constante $N(x) = X$.

El desplazamiento del punto C puede expresarse como la suma de dos desplazamientos (principio de superposición lineal), por lo que la condición de compatibilidad es:

$$u_C = 0 \Rightarrow u_{AB} + u_{BC} = 0$$

Por ello, deben calcularse los alargamientos de barra y muelle.

- **Barra.** El alargamiento tiene la siguiente expresión:

$$u_{AB} = \int_0^L \varepsilon_{xx}(x) dx$$

La deformación experimentada por la barra se obtiene de la Ley de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{X}{EA} + \alpha \Delta T(x),$$

donde se ha sustituido que $\sigma_{xx} = X/A$ teniendo en cuenta que el esfuerzo axial X es constante. La ley de temperaturas $\Delta T(x)$ descrita en el enunciado se expresa como

$$\Delta T(x) = (T_L - T_0) \frac{x}{L}$$

Así, integrando la deformación, se obtiene la elongación de la barra u_{AB}

$$u_{AB} = \frac{XL}{EA} + \frac{1}{2} \alpha L (T_L - T_0)$$

- **Muelle.** Como la fuerza X a la que está sometido el muelle se ha planteado a tracción, el alargamiento puede escribirse como:

$$u_{BC} = \frac{2XL}{EA}$$

donde se ha sustituido que $K = EA/(2L)$.

Sustituyendo las expresiones previas en la ecuación de compatibilidad, se determina la incógnita hiperestática X :

$$\frac{XL}{EA} + \frac{1}{2} \alpha L (T_L - T_0) + \frac{2XL}{EA} = 0;$$

$$X = -\frac{\alpha EA}{6} (T_L - T_0)$$

Con ello, la estructura estaría resuelta. Nótese que la incógnita hiperestática sale con el signo negativo al planteado en la figura, lo cual implica que el esfuerzo axial de toda la estructura es de compresión siempre y cuando $T_L > T_0$ (calentamiento implica dilatación, que implica un alargamiento que genera una compresión al estar la estructura confinada).

Por último, para hallar la temperatura que hace que el muelle se reduzca a la mitad, se impone $u_{BC} = -d/2$ (u_{BC} se ha planteado tal que el alargamiento implica signo positivo)

$$-\frac{d}{2} = -\frac{\alpha L}{3} (T_L - T_0)$$

$$T_L = T_0 + \frac{3\alpha d}{2L} = 59,56^\circ\text{C}$$

- b) La fuerza a la que se encuentra sometido el muelle en dichas condiciones se obtiene directamente conociendo el acortamiento del mismo

$$F_m = -\frac{EAd}{4L} = -17,57\text{MN}$$

Es decir, es una fuerza a compresión.

- c) En este caso, el ΔT es constante e igual a $T_L - T_0$ en toda la barra. Por lo tanto, integrando la deformación (ahora constante), el nuevo alargamiento de la barra se expresa como:

$$u'_{AB} = \frac{X'L}{EA} + \alpha L(T_L - T_0)$$

siendo X' la incógnita hiperestática en la nueva condición (esfuerzo axial de la barra y fuerza de tracción del muelle). El alargamiento del muelle se expresa de igual modo que el caso previo, así que la ecuación de compatibilidad es

$$\frac{X'L}{EA} + \alpha L(T_L - T_0) + \frac{2X'L}{EA} = 0;$$

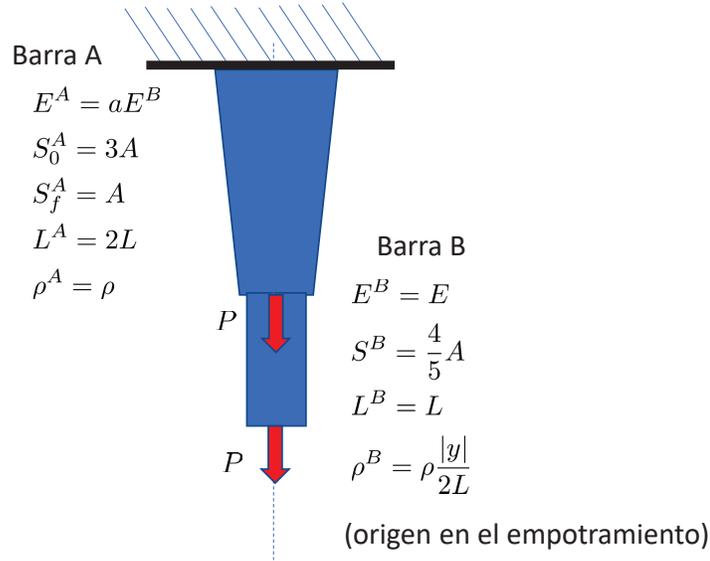
$$X' = -\frac{\alpha EA}{3}(T_L - T_0)$$

Así, el cociente entre fuerzas del muelle F'_m/F_m queda

$$\boxed{\frac{F'_m}{F_m} = \frac{X'}{X} = 2}$$

Esto es, se duplica.

11. Construir los diagramas de esfuerzos axiles, determinar las tensiones normales y movimientos de la estructura de barras de sección circular de la figura. Averiguar a de forma que el desplazamiento en la barra A sea la mitad que en la barra B.



Solución

Imponiendo que

$$\delta_A = \frac{\delta_B}{2}$$

Se llega a

$$a = \frac{8A \int_0^{2L} \frac{N_A(y)}{A_A(y)} dy}{5 \int_{2L}^{3L} N_B(y) dy}$$

Con

$$A_A(y) = 3A \left(1 - \frac{y}{L}\right)$$

$$N_B(y) = P + \frac{\rho g AL}{5} \left[9 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$N_A(y) = 2P + 5\rho g AL - \rho g AL \left[3\frac{x}{L} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

Parte VII

**Deformaciones, Giros y
Desplazamientos.**

12. Deformaciones, Giros y Desplazamientos [Isostáticas].

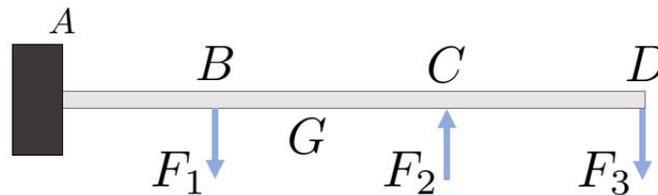
- 12.1 Enunciados de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos 291
- 12.2 Solución de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos [Isostáticas] 295



12.1. Enunciados de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos

1. La viga de la figura está empotrada en un extremo (punto A) y sometida a tres fuerzas en los puntos B, C y D según el sentido de la figura. Dos de ellas vienen dadas por pesos suspendidos, y la central se debe a la reacción de un muelle. Todas ellas son conocidas, así como la sección de la viga que tiene una altura h y una anchura b , que ha sido medida por lo que conocemos I_{zz} que es la inercia a flexión según su sollicitación. Pero se desconoce el módulo de Young del material. Para ello se ha colocado una galga extensométrica en el punto G, en dirección longitudinal a la viga y en su cara inferior, cuyo valor de medida es ε_G

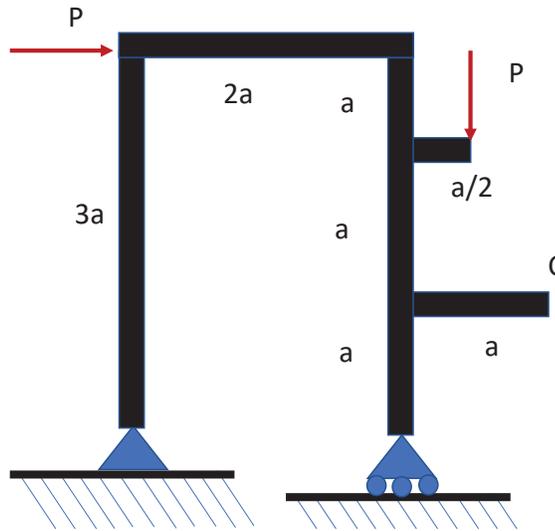
Se pide calcular la flecha de la viga en los puntos B, C y D. Considerar que la distancia A-B es d_1 , que la distancia A-C es d_2 , que la distancia A-D es d_3 y que la distancia A-G es d_4



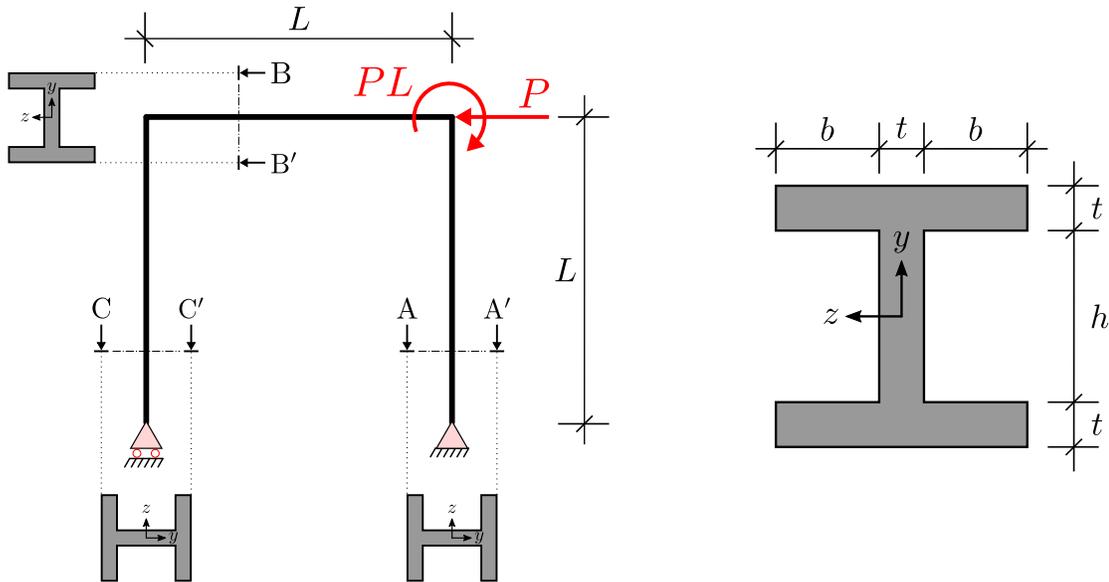
2. Un arco semicircular de radio medio $R=2$ m y espesor constante $t=10$ cm está apoyado en uno de sus apoyos y el otro apoyado sobre un carrito. Las propiedades del material vienen dadas por $E=100$ GPa y $\mu = 0,3$. En el punto central del arco existe una carga $F=100$ kN.

Se pide:

- a) Las leyes de esfuerzos en la pieza.
 - b) Desplazamiento vertical y giros en la sección de aplicación de la fuerza.
 - c) Tensiones máximas.
3. Calcular los diagramas de esfuerzos del siguiente pórtico, así como los desplazamientos y el giro en el punto C (despreciando la deformación longitudinal de las vigas).



4. Sea el pórtico de la figura, construido con vigas de sección en “doble T” orientadas según indican los cortes A-A', B-B' y C-C'.

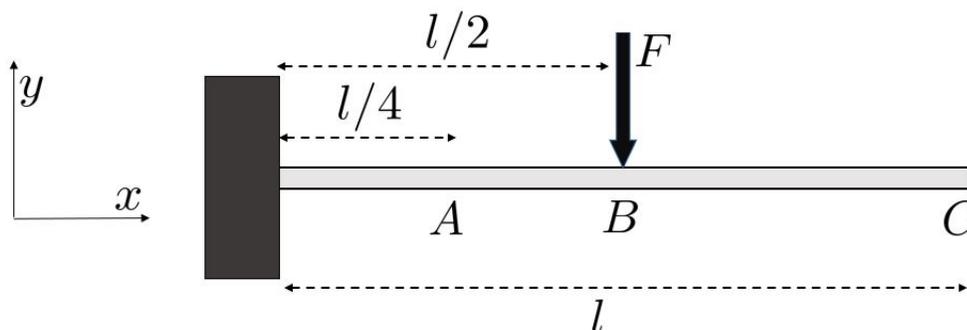


Se pide (según los ejes locales indicados en la figura):

- El momento de inercia de la sección según z local, I_{zz} (mm^4)
- Máxima tensión longitudinal (según x local) en valor absoluto, $\sigma_{xx,\text{máx}}$ (MPa)
- Máxima tensión tangencial según y local en valor absoluto, $\tau_{xy,\text{máx}}$ (MPa)
- Posición (y_{OC}, z_{OC}) del centro de cortadura de la sección, referida a los ejes locales indicados en la figura (mm, mm)

Datos: P, L, b, h, t

5. La viga de la figura está empotrada en un extremo y tiene como sollicitación una fuerza F aplicada en el punto B situado a una distancia $l/2$ del empotramiento, como muestra la figura. Otros puntos significativos del problema son el punto A , situado a $l/4$ del empotramiento, y el punto C , situado en el extremo libre de la viga a una distancia l del empotramiento. La viga tiene $EI_{zz}(Nmm^2)$



- Valor absoluto del momento flector en el punto A (kNm).
 - Sentido del momento flector en el punto A.
 - Valor absoluto del cortante en el punto A (N).
 - Sentido del cortante en el punto A.
 - Valor absoluto de la flecha en el punto B (mm).
 - Valor absoluto del giro en el punto B (mrad)
 - Valor absoluto de la flecha en el punto C (mm).
 - Valor absoluto del giro en el punto C (mrad)
6. Sea la viga muy esbelta ($at^3 \ll a^3t$) sometida al estado de carga mostrado en la Figura 1 y cuya sección de pequeño espesor está indicada en la Figura 2.

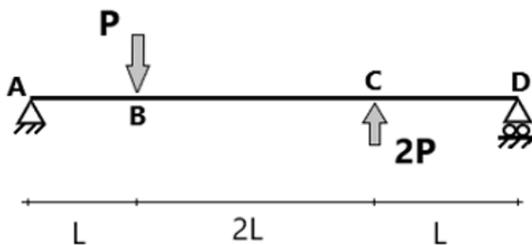


Figura 1

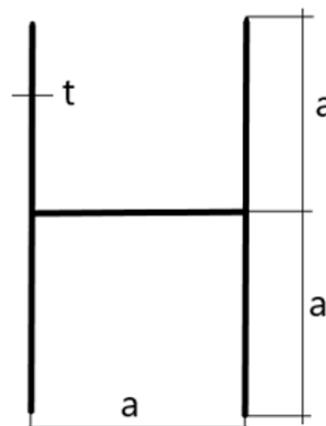
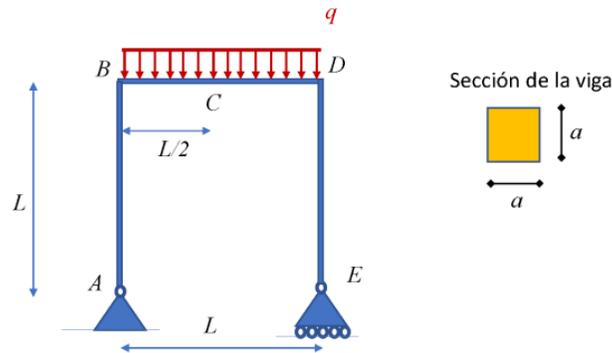


Figura 2

- El módulo del valor del cortante máximo en el diagrama de fuerzas cortantes. (kN)
- El módulo del valor del momento flector máximo en el diagrama de momentos flectores. (kNm)
- El giro en el punto A. (mrad) (Despreciando el efecto de las fuerzas cortantes).
- El desplazamiento vertical (en valor absoluto) en el punto B. (mm) (Despreciando el efecto de las fuerzas cortantes).

Datos: $P=20$ kN; $L=0.4$ m; $a=75$ mm; $t=4$ mm

7. Dado el pórtico de la figura, con sección cuadrada de lado a .



Datos: $q=5000$ N/m; $L=1$ m; $a=0.1$ m; $E=1000$ MPa.

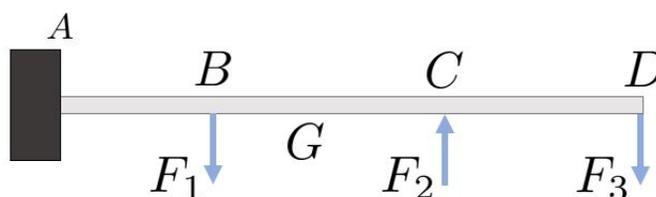
Se pide:

- Reacción en el punto E.
- Fuerza interna de cortante máxima.
- Desplazamiento vertical en el punto C, se puede considerar solo debido a flexión.
- Esfuerzo σ_{xx} máximo (en valor absoluto) en el pórtico.
- Esfuerzo τ_{xy} máximo (en valor absoluto) en el pórtico.
- Giro en el punto C, se puede considerar solo debido a flexión.

12.2. Solución de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos [Isostáticas]

1. La viga de la figura está empotrada en un extremo (punto A) y sometida a tres fuerzas en los puntos B, C y D según el sentido de la figura. Dos de ellas vienen dadas por pesos suspendidos, y la central se debe a la reacción de un muelle. Todas ellas son conocidas, así como la sección de la viga que tiene una altura h y una anchura b , que ha sido medida por lo que conocemos I_{zz} que es la inercia a flexión según su sollicitación. Pero se desconoce el módulo de Young del material. Para ello se ha colocado una galga extensométrica en el punto G, en dirección longitudinal a la viga y en su cara inferior, cuyo valor de medida es ε_G

Se pide calcular la flecha de la viga en los puntos B, C y D. Considerar que la distancia A-B es d_1 , que la distancia A-C es d_2 , que la distancia A-D es d_3 y que la distancia A-G es d_4



Solución

Para la solución se muestra la implementación en el software de cálculo simbólico Maple (de licencia UPM). El primer paso será calcular las reacciones en el empotramiento A. Estas serán un momento flector (M_r) y una reacción vertical (R_y). Haciendo equilibrios en el punto A tenemos:

$$M_r = F_1 d_1 - F_2 d_2 + F_3 d_3 \quad (12.1)$$

$$R_y = F_1 - F_2 + F_3 \quad (12.2)$$

Una vez tenemos todas las reacciones y fuerzas actuantes en la estructura, podemos calcular la ley de esfuerzos flexores que necesitaremos para calcular las flechas. Para ello, vamos a dividir en tres tramos, ya que en cada uno de ellos el número de fuerzas y momentos a un lado y otro serán diferentes. Estos tramos serán A-B, B-C y C-D, y los momentos flexores serán dependientes de x , que es la distancia desde el punto evaluado a A. Estos son:

restart;

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &:= -F1 \cdot (d1 - x) + F2 \cdot (d2 - x) - F3 \cdot (d3 - x) \\
 M_{bc} &:= F2 \cdot (d2 - x) - F3 \cdot (d3 - x) \\
 M_{cd} &:= -F3 \cdot (d3 - x)
 \end{aligned}$$

Ahora, considerando que el punto G está en el tramo B-C, podremos calcular el módulo de Young desde la lectura del extensímetro. Por la Ley de Navier sabemos que la tensión longitudinal en la cara inferior a una distancia x_G de A será:

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{bc}(x_G)(-h/2)}{I_{zz}} \quad (12.3)$$

Y por elasticidad sabemos que $\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E$, y puesto que la galga está colocada longitudinalmente a la viga, tenemos que $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_G$. Por ello:

$$\varepsilon_G = \frac{M_{bc}(x_G)h}{2EI_{zz}} \quad (12.4)$$

Y por tanto:

$$E = \frac{M_{bc}(x_G)h}{2\varepsilon_G I_{zz}} \quad (12.5)$$

Y con esto ya conocemos todas las variables del problema.

Ahora queremos calcular la flecha en diferentes puntos, por lo que tenemos que dividir la viga en los tres tramos en los que hemos dividido el momento flector. Para ello, y aplicando las ecuaciones de contorno a la segunda ley de Mohr en cada tramo, tenemos:

$$w_1(x) = w_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^t \frac{M_{0-1}(x)}{EI_{zz}} dx + \theta_0 \right) dt \quad (12.6)$$

Y θ_1 :

$$\theta_1 = \theta_0 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{M_{0-1}(x)}{EI_{zz}} dx \quad (12.7)$$

Donde 0 y 1 son los puntos inicial y final de cada uno de los tres tramos en los que hemos dividido el momento flector.

Con esta relación entre tramos sucesivos, y considerando que en el empotramiento A tanto la flecha como el giro son nulos, podemos calcular la flecha en el punto B (w_1), y el giro en este punto (θ_1) como:

$$w1 := \text{simplify}\left(\text{int}\left(\text{int}\left(\frac{Mab}{E \cdot Izz}, x=0..t\right), t=0..d1\right)\right)$$

$$w1 := -\frac{\left(\left(F1 + \frac{F2}{2} - \frac{F3}{2}\right) d1 - \frac{3 F2 d2}{2} + \frac{3 F3 d3}{2}\right) d1^2}{3 E Izz}$$

$$theta1 := \text{simplify}\left(\text{int}\left(\frac{Mab}{E \cdot Izz}, x=0..d1\right)\right)$$

$$\theta1 := -\frac{d1 \left((F1 + F2 - F3) d1 - 2 F2 d2 + 2 F3 d3\right)}{2 E Izz}$$

De igual modo para el punto C (w_2 y θ_2):

$$w2 := \text{simplify}\left(w1 + \text{int}\left(\text{int}\left(\frac{Mbc}{E \cdot Izz}, x=d1..t\right) + theta1, t=d1..d2\right)\right)$$

$$w2 := \frac{(2 F2 + F3) d2^3 - 3 F3 d2^2 d3 - 3 F1 d1^2 d2 + F1 d1^3}{6 E Izz}$$

$$theta2 := \text{simplify}\left(theta1 + \text{int}\left(\frac{Mbc}{E \cdot Izz}, x=d1..d2\right)\right)$$

$$\theta2 := \frac{(F2 + F3) d2^2 - 2 F3 d2 d3 - F1 d1^2}{2 E Izz}$$

Y para el punto D (w_3):

$$w3 := \text{simplify}\left(w2 + \text{int}\left(\text{int}\left(\frac{Mcd}{E \cdot Izz}, x=d2..t\right) + theta2, t=d2..d3\right)\right)$$

$$w3 := \frac{F1 d1^3 - 3 F1 d1^2 d3 - F2 d2^3 + 3 F2 d2^2 d3 - 2 F3 d3^3}{6 E Izz}$$

Con ello sabremos la flecha en los puntos B, C y D partiendo de las cargas y de la medida de la galga extensométrica.

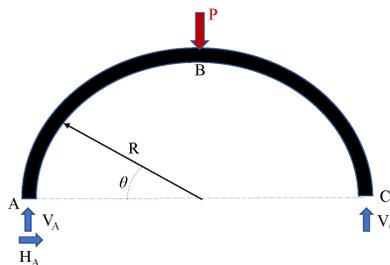
2. Un arco semicircular de radio medio $R=2$ m y espesor constante $t=10$ cm está apoyado en uno de sus apoyos y el otro apoyado sobre un carrito. Las propiedades del material vienen dadas por $E=100$ GPa y $\mu = 0,3$. En el punto central del arco existe una carga $F=100$ kN.

Se pide:

- Las leyes de esfuerzos en la pieza.
- Desplazamiento vertical y giros en la sección de aplicación de la fuerza.
- Tensiones máximas.

Solución

El problema en estudio es isostático, calculemos primero las reacciones.



Planteando el equilibrio de fuerzas:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_A + V_C = P$$

$$\sum M(A) = 0 \rightarrow -RP + 2RV_B = 0$$

de donde obtenemos

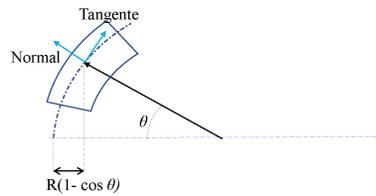
$$V_A = \frac{P}{2}$$

$$H_A = 0$$

$$V_C = \frac{P}{2}$$

Obtenido esto, podríamos calcular las leyes de momentos, vamos a plantear dos cosas que simplifican el estudio. El arco sigue una curva, la dirección normal a dicha curva,

dada por la dirección $\text{sen}\theta$ define la dirección de nuestro cortante en la sección, y la tangente a la curva, dada por $\text{cos}\theta$, define la dirección del axial. Además, respecto al punto A, para calcular el momento, la distancia viene dada por $R(1 - \text{cos}\theta)$.



Además, vemos que el problema presenta simetría respecto al punto B. Así el axial y el momento será simétrico y el cortante antisimétrico.

Las leyes de esfuerzos entre A y B , $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, vienen dadas por:

$$N_{AB} = -V_A \text{cos}\theta = -\frac{P}{2} \text{cos}\theta$$

$$V_{AB} = -V_A \text{sen}\theta = -\frac{P}{2} \text{sen}\theta$$

$$M_{AB} = V_A R(1 - \text{cos}\theta) = \frac{PR}{2}(1 - \text{cos}\theta)$$

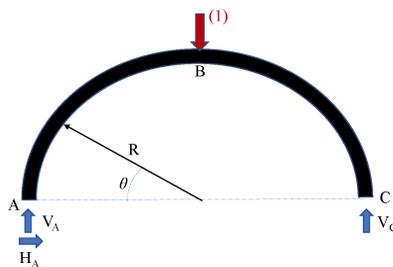
Entre B y C $(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$

$$N_{BC} = -V_A \text{cos}(\pi - \theta) + P \text{cos}(\pi - \theta) = \frac{P}{2} \text{cos}(\pi - \theta)$$

$$V_{BC} = -V_A \text{sen}(\pi - \theta) + P \text{sen}(\pi - \theta) = \frac{P}{2} \text{sen}(\pi - \theta)$$

$$M_{BC} = V_A (R + R \text{cos}(\pi - \theta)) - PR \text{cos}(\pi - \theta) = \frac{PR}{2} (1 - \text{cos}(\pi - \theta))$$

para calcular el desplazamiento vertical introducimos una carga virtual unitaria vertical tal como muestra la siguiente figura



que es como sustituir en los resultados anteriores $P = 1$, así los momentos flectores virtuales son:

Entre A y B, $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

$$m_{AB} = \frac{R}{2}(1 - \cos\theta)$$

Entre B y C $(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$

$$m_{BC} = \frac{R}{2}(1 - \cos(\pi - \theta))$$

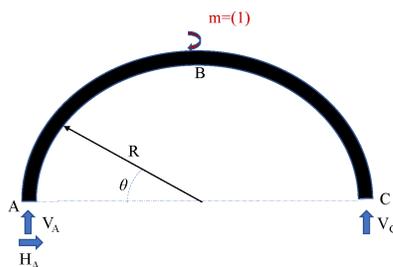
haciendo la integral según el MCU-PTVC, tenemos, usando simetría

$$y_C = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{PR^2}{4}(1 - \cos\theta)^2 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{PR^2}{4}(1 - \cos(\pi - \theta))^2 d\theta \right] = \frac{PR^2}{2EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta)^2 d\theta$$

resolviendo la integral

$$y_C = \frac{PR^2}{2EI} \left(\frac{3}{4}\pi - 2 \right)$$

Para comprobar el giro introducimos un momento virtual unitario en la estructura en el punto C, tal como se muestra a continuación



despejando las reacciones tenemos

$$H_A = 0$$

$$V_A = \frac{-1}{2R}$$

$$V_B = \frac{1}{2R}$$

de donde obtenemos la ley de momentos flectores como Entre A y B , $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

$$m_{AB} = -\frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

Entre B y C $(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$

$$m_{BC} = -\frac{1}{2}(1 - \cos(\pi - \theta)) + m$$

Observamos que la solución es antisimétrica, pro tanto, al integral con la solución simétrica anterior, el resultado es cero y así, el giro en C es nulo.

Para calcular las tensiones máximas buscamos las secciones más susceptibles, tenemos la posibilidad en los apoyos o en donde el momento flector es máximo, en este caso es trivial que ocurrirá donde hay máximo momento flector. En la sección en los apoyos:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} = \frac{P}{2t^2}$$

En la parte central, con mayor momento flector y en los laterales de la sección donde es máximo, tenemos

$$\sigma_{xx} = \frac{M}{I}y = \frac{RP/2}{t^4/12} \frac{t}{2} = \frac{12PR}{t^3}$$

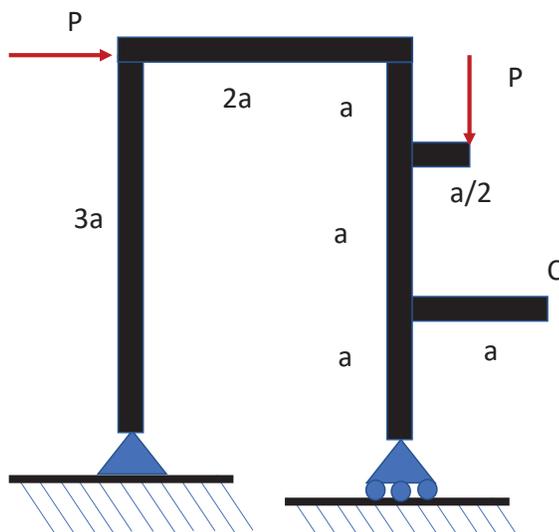
El cortante máximo da la siguiente tensión tangencial

$$\tau_{xy} = \frac{3V}{2A} = \frac{3}{4} \frac{P}{t^2}$$

pero ocurre en el centro de la sección donde no hay σ_{xx} en este caso. Por tanto la sección con mayor tensión es la central en la cara superior inferior con valor

$$\sigma_{xx} = \frac{M}{I}y = \frac{RP/2}{t^4/12} \frac{t}{2} = \frac{12PR}{t^3}$$

3. Calcular los diagramas de esfuerzos del siguiente pórtico, así como los desplazamientos y el giro en el punto C (despreciando la deformación longitudinal de las vigas).



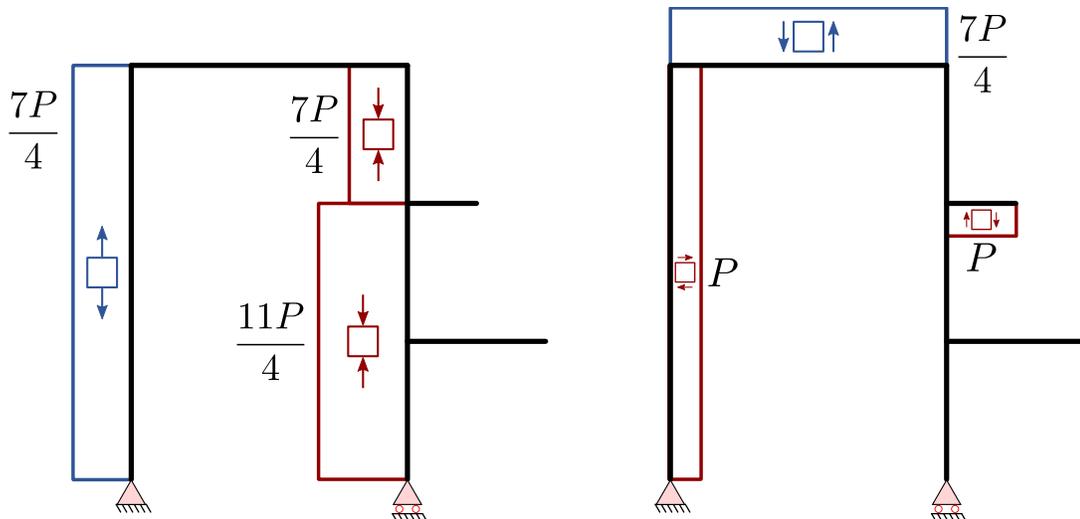
Solución

Como el problema es isostático (3 incógnitas: V_A , H_A y V_B , y 3 ecuaciones, las de equilibrio), las reacciones pueden determinarse a través de las ecuaciones de equilibrio.

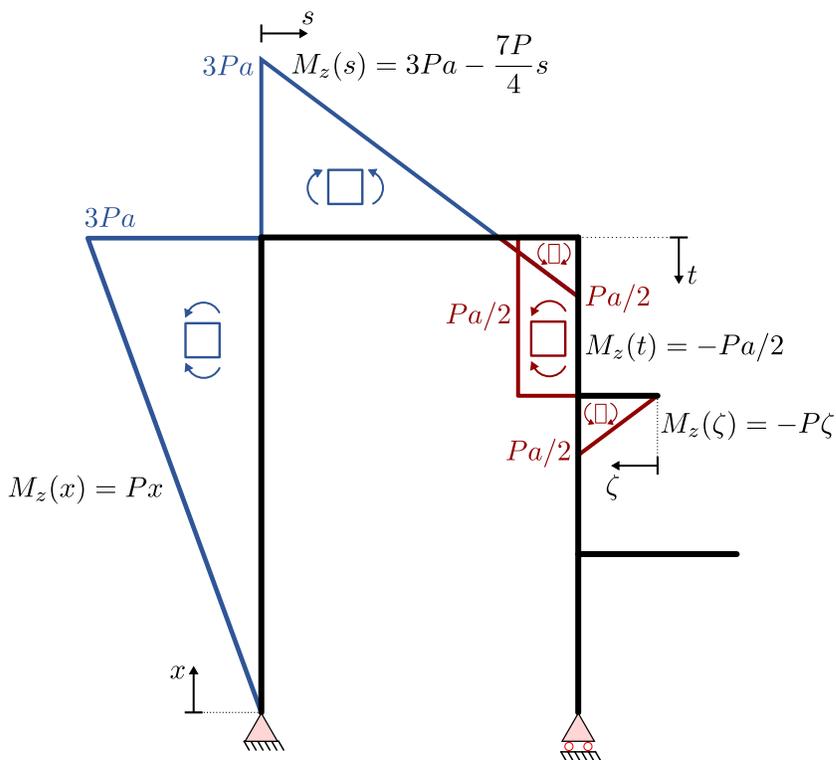
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \quad H_A + P = 0 \\ \sum F_y = 0; & \quad V_A + V_B = P \\ \sum M_A = 0; & \quad 2V_B = 11P/2 \end{aligned}$$

$$H_A = -P; \quad V_A = -\frac{7P}{4}; \quad V_B = \frac{11P}{4}$$

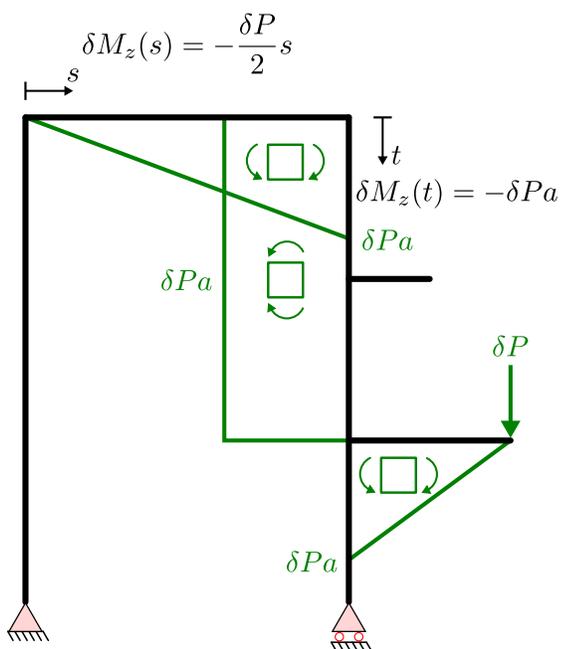
Los diagramas de esfuerzo axial y cortante son:



El diagrama de momento flector, con las leyes de momento flector $M_z(\bullet)$ en función de los ejes locales dispuestos en la figura, es:



Para determinar el desplazamiento vertical del punto C, se plantea un estado virtual con una carga vertical δP (hacia abajo) en C, dando lugar al siguiente diagrama de momentos flectores:



Nótese que no se ha incluido la ley de momento flector de la protuberancia inferior derecha debido a que no va a contribuir directamente al desplazamiento (en el caso real, dicha parte no está cargada).

Así, aplicando el PTVC se obtiene:

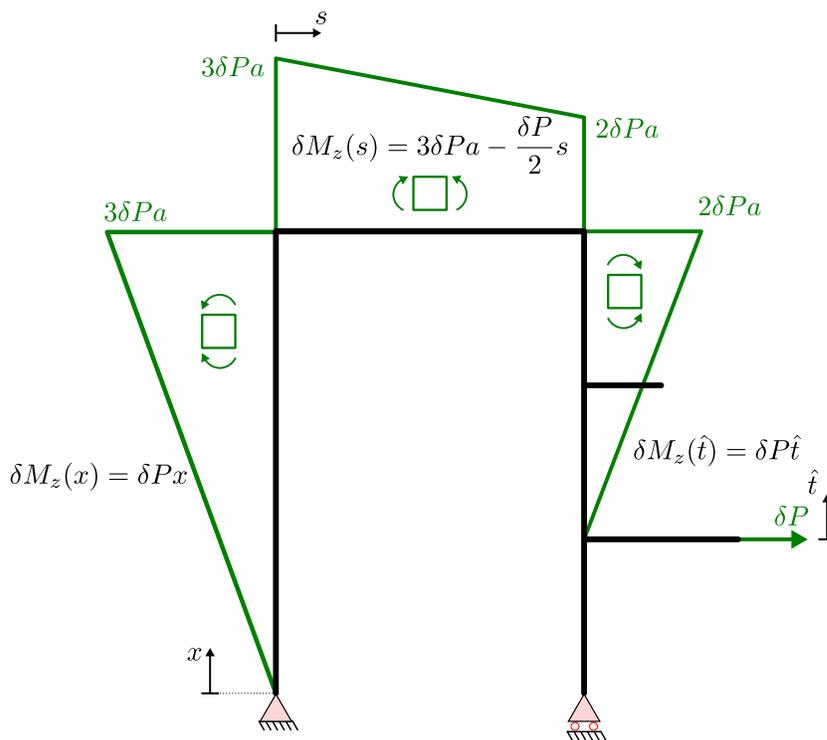
$$\delta P \cdot v_C = \int_L \frac{\delta M_z(x) M_z(x)}{EI_{zz}} dx$$

$$EI_{zz} \delta P v_C = \underbrace{\int_0^{2a} \left(-\frac{\delta P}{2}s\right) \left(3Pa - \frac{7P}{4}s\right) ds}_{-2Pa^3/3} + \underbrace{\int_0^a \frac{Pa}{2} \delta P adt}_{Pa^3/2}$$

$$v_C = -\frac{Pa^3}{6EI_{zz}}$$

Es decir, el desplazamiento real es hacia arriba.

Para determinar el desplazamiento horizontal del punto C, se plantea un estado virtual con una carga horizontal δP (hacia la derecha) en C, dando lugar al siguiente diagrama de momentos flectores:



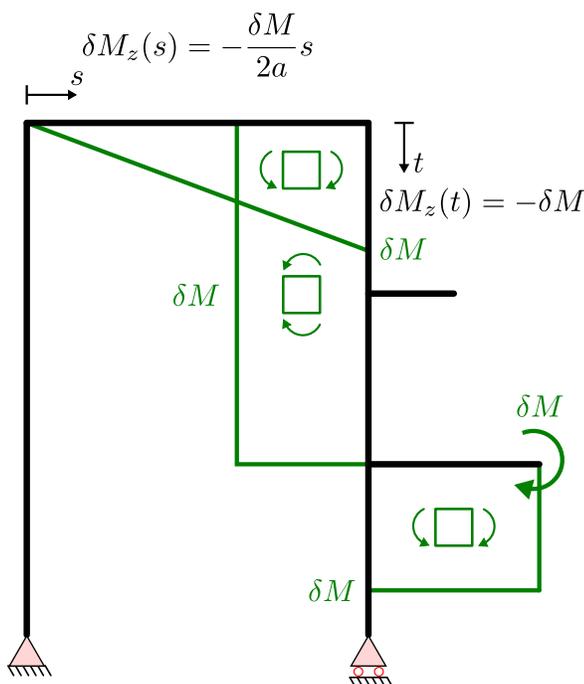
Nótese que se ha situado un nuevo eje local \hat{t} en el tramo vertical derecho por comodidad de la expresión. Aplicando el PTVC se tiene:

$$\delta P \cdot u_C = \int_L \frac{\delta M_z(x) M_z(x)}{EI_{zz}} dx$$

$$EI_{zz} \delta P u_C = \underbrace{\int_0^{3a} P \delta P x^2 dx}_{9Pa^3} + \underbrace{\int_0^{2a} P \delta P \left(3a - \frac{s}{2}\right) \left(3a - \frac{7}{4}s\right) ds}_{41Pa^3/6} + \underbrace{\int_a^{2a} P \delta P \hat{t} \left(-\frac{a}{2}\right) d\hat{t}}_{-3Pa^3/4}$$

$$u_C = \frac{181Pa^3}{12EI_{zz}}$$

Por último, para determinar el giro del punto C, se plantea un estado virtual con un momento virtual δM en C, dando lugar al siguiente diagrama de momentos flectores:



Aplicando el PTVC,

$$\delta M \cdot \theta_C = \int_L \frac{\delta M_z(x) M_z(x)}{EI_{zz}} dx$$

$$EI_{zz} \delta M \theta_C = \underbrace{\int_0^{2a} \left(-\frac{\delta M}{2a} s\right) \left(3Pa - \frac{7P}{4}s\right) ds}_{-2Pa^2/3} + \underbrace{\int_0^a \frac{Pa}{2a} \delta M adt}_{Pa^2/2}$$

$$\theta_C = -\frac{Pa^2}{6EI_{zz}}$$

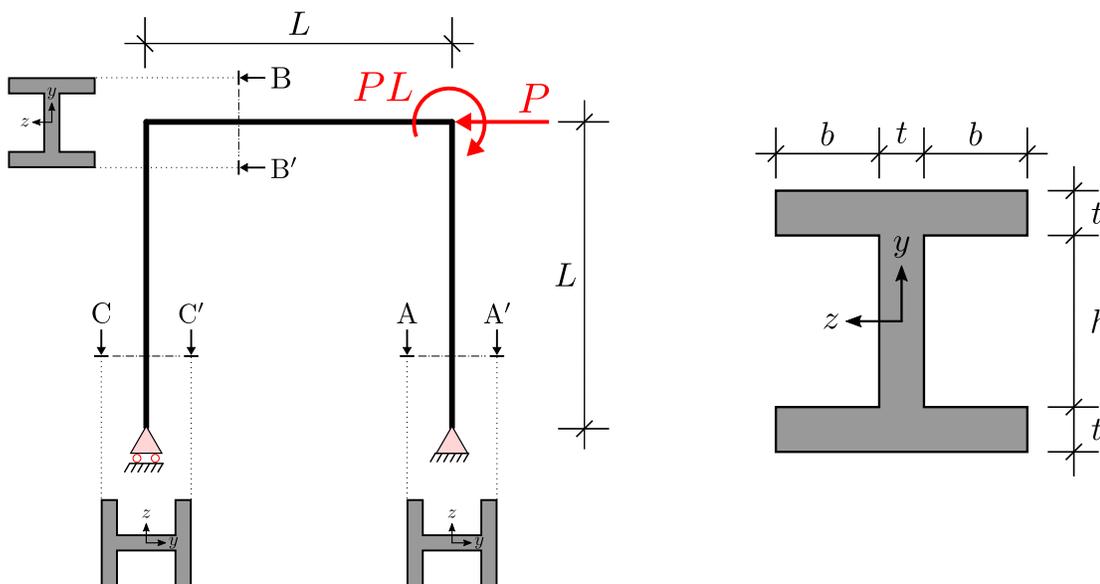
Nótese que $\theta_C = v_C/a$. Esto puede explicarse a través de dos vías: como puede observarse, los diagramas de momento flector virtual en el caso de desplazamiento vertical y giro son idénticos a excepción del tramo horizontal inferior derecho. Sin embargo,

como dicho tramo no está cargado, no afecta para el desplazamiento real, dando lugar al mismo valor (dividido entre a).

La primera es una explicación matemática. Físicamente puede verse que debido a que el tramo horizontal inferior no está cargado, que el desplazamiento horizontal de C es pequeño ($u_C \ll a$) y que la deformación longitudinal de las vigas es despreciable, el giro de C puede expresarse como

$$\theta_C = v_C/a$$

4. Sea el pórtico de la figura, construido con vigas de sección en “doble T” orientadas según indican los cortes A–A’, B–B’ y C–C’.



Se pide (según los ejes locales indicados en la figura):

- El momento de inercia de la sección según z local, I_{zz} (mm^4)
- Máxima tensión longitudinal (según x local) en valor absoluto, $\sigma_{xx,\text{máx}}$ (MPa)
- Máxima tensión tangencial según y local en valor absoluto, $\tau_{xy,\text{máx}}$ (MPa)
- Posición (y_{OC}, z_{OC}) del centro de cortadura de la sección, referida a los ejes locales indicados en la figura (mm, mm)

Datos: P, L, b, h, t

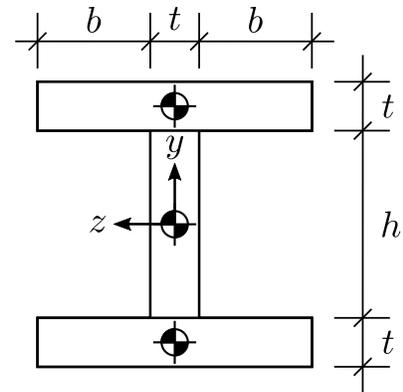
Solución

Apartado 1. El momento de inercia según el eje z de la sección en “doble T” de la figura puede calcularse tomando el momento de inercia de un rectángulo con dimensiones $(2b + t) \times (h + 2t)$ (sección ‘maciza’) y restando los momentos de inercia dos rectángulos de dimensión $b \times h$ (parte ‘hueca’ de la sección). Esto puede realizarse debido a que los ejes z locales de las figuras geométricas consideradas coinciden con el eje z de la sección a estudio.

$$I_{zz} = \frac{1}{12} (2b + t)(h + 2t)^3 - 2 \cdot \frac{1}{12} h^3 b$$

De igual modo, el momento de inercia I_{zz} también puede calcularse como la suma de las contribuciones por partes, tal y como se indica en la siguiente figura (en dicho caso, deben tenerse en cuenta los términos de Steiner):

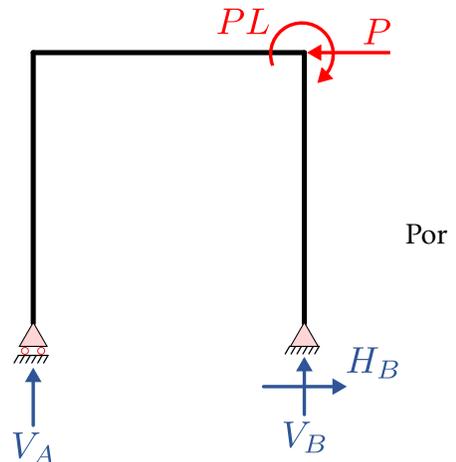
$$I_{zz} = \frac{1}{12}h^3t + 2 \cdot \frac{1}{12}t^3(t+2b) + 2(t+2b)t\left(\frac{h+t}{2}\right)^2$$



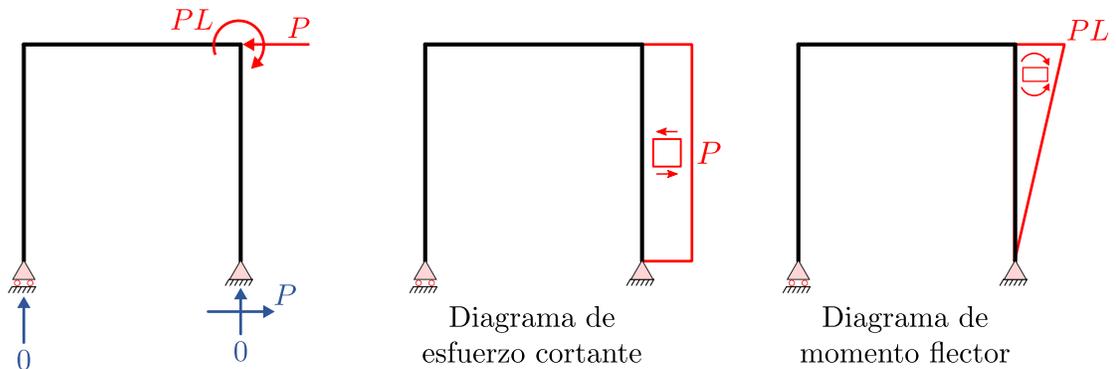
Apartado 2. Para calcular la máxima tensión longitudinal se deben calcular las distribuciones de esfuerzos axiales y de momentos flectores, puesto que ambos efectos generan tensión longitudinal en la sección.

Por tanto, debe resolverse la estructura. Como es isostática (número de incógnitas: 3 reacciones; número de ecuaciones: 3, de equilibrio), haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio se determinan todas las reacciones. Planteando las reacciones como se indica en la figura, las ecuaciones de equilibrio dan lugar a:

$$\begin{aligned} \sum M_{z,B} = 0; & \quad V_A L + PL - PL = 0; & \quad \boxed{V_A = 0} \\ \sum F_x = 0; & \quad H_B - P = 0; & \quad \boxed{H_B = P} \\ \sum F_y = 0; & \quad V_A + V_B = 0; & \quad \boxed{V_B = 0} \end{aligned}$$



tanto, las leyes de esfuerzos son las siguientes:



Como puede observarse, el esfuerzo axial es nulo en todo el pórtico (flexión simple). Así, la máxima tensión longitudinal tiene lugar donde el momento flector es máximo, en la esquina superior derecha, de valor

$$M_{z,\text{máx}} = PL$$

Así, haciendo uso de la Ley de Navier se puede determinar la tensión longitudinal máxima (en valor absoluto):

$$|\sigma_{xx,\text{máx}}| = \frac{M_{z,\text{máx}}}{I_{zz}} y_{\text{máx}},$$

con y referida al centroide de la sección, y donde se ha tenido en cuenta que únicamente hay M_z (en ejes locales) y que la sección presenta ejes de simetría i.e. $I_{yz} = 0$. Así, como $y_{\text{máx}} = h/2 + t$

$$|\sigma_{xx,\text{máx}}| = \frac{PL}{I_{zz}} \left(\frac{h}{2} + t \right)$$

Apartado 3. La tensión cortante máxima aparece en el centroide de la sección ($\tau_{xy,\text{máx}}$). Para calcular el cortante en dicho punto, primeramente deben calcularse las contribuciones al cortante de las alas. Según el teorema de Colignon,

$$\tau_{xz} = \frac{V_y Q_z^*}{I_{zz} b(z)}$$

Debido a la simetría vertical, las contribuciones izquierda y derecha son iguales. El momento estático considerado para este caso es el de medio ala i.e.

$$Q_z^* = (b + t/2) \cdot t \cdot (h + t)/2$$

Así, el cortante máximo de medio ala según xz es

$$\tau_{xz,\text{máx}} = \frac{V_{y,\text{máx}}}{2I_{zz}} (h + t)(b + t/2)$$

Conociendo $\tau_{xz,\text{máx}}$, $\tau_{xy}(y)$ en el alma obedece la siguiente ley

$$\tau_{xy}(y) = 2\tau_{xz,\text{máx}} + \frac{V_y Q_z^*}{I_{zz} b(y)} = 2 \cdot \frac{V_y}{2I_{zz}} (h + t)(b + t/2) + \frac{V_y Q_z^*}{I_{zz} b(y)}$$

El cortante $\tau_{xy,\text{máx}}$ máximo tiene lugar donde el momento estático respecto al eje z es máximo, esto es, en el centroide de la sección, cuyo valor es

$$Q_z^* = (h/2) \cdot t \cdot (h/4)$$

donde se ha tomado un área barrida A^* hasta el centroide de la sección. Por tanto,

$$\tau_{xy,\text{máx}} = \frac{V_{y,\text{máx}}}{I_{zz}} (h + t)(b + t/2) + \frac{V_{y,\text{máx}} h^2}{8I_{zz}}$$

310 12.2. Solución de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos [Isostáticas]

Finalmente, del diagrama de esfuerzo cortante se extrae que $V_{y,\text{máx}} = P$, llegando al siguiente resultado:

$$\tau_{xy,\text{máx}} = \frac{P}{I_{zz}}(h+t)(b+t/2) + \frac{Ph^2}{8I_{zz}}$$

Apartado 4. La posición del centro de cortadura, al tratarse de un perfil con doble simetría (respecto a los ejes centroidales), coincide con el centroide de la sección. Por tanto, en unos ejes referidos al centroide de la sección (sistema local), dicha posición es:

$$OC = (0 \text{ mm}, 0 \text{ mm})$$

Resultados de las versiones

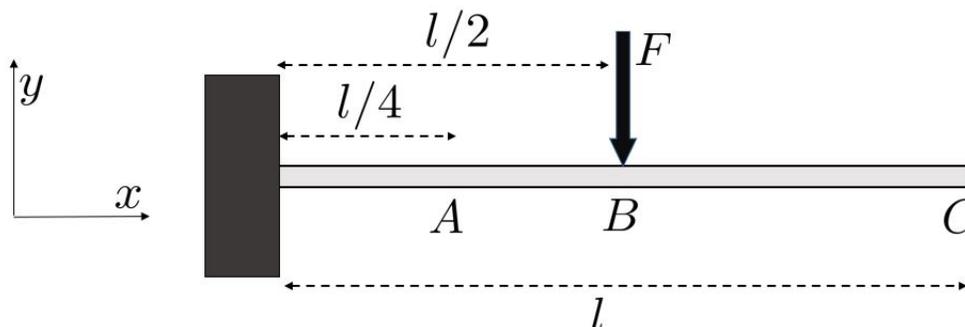
	V1	V2	V3	V4
P [N]	1000	500	850	2000
L [m]	1	2	3	0.5
b [mm]	100	120	70	90
h [mm]	50	40	100	100
t [mm]	3	6	2	4

Cuadro 12.1: Datos del enunciado.

	V1	V2	V3	V4
I_{zz} [mm ⁴]	887504.00	1602464.00	1644224.00	4315584.00
$\sigma_{xx,máx}$ [MPa]	31.549	16.225	80.646	12.513
$\tau_{xy,máx}$ [MPa]	6.413	1.828	4.390	5.013
OC [mm, mm]	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)

Cuadro 12.2: Resultados de las versiones.

5. La viga de la figura está empotrada en un extremo y tiene como sollicitación una fuerza F aplicada en el punto B situado a una distancia $l/2$ del empotramiento, como muestra la figura. Otros puntos significativos del problema son el punto A , situado a $l/4$ del empotramiento, y el punto C , situado en el extremo libre de la viga a una distancia l del empotramiento. La viga tiene $EI_{zz}(Nmm^2)$



- Valor absoluto del momento flector en el punto A (kNm).
- Sentido del momento flector en el punto A.
- Valor absoluto del cortante en el punto A (N).
- Sentido del cortante en el punto A.
- Valor absoluto de la flecha en el punto B (mm).
- Valor absoluto del giro en el punto B (mrad)
- Valor absoluto de la flecha en el punto C (mm).
- Valor absoluto del giro en el punto C (mrad)

Solución

Lo primero es calcular la ley de momentos flectores, que será dividida en dos tramos. El primero desde el empotramiento hasta donde se aplica la carga y el otro desde el punto de aplicación de la carga hasta el extremo libre, donde es nulo.

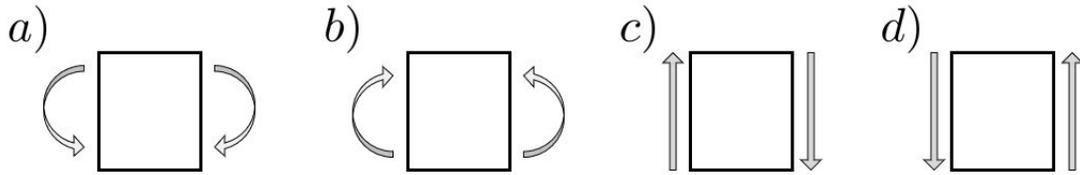
$$0 - B \rightarrow M_{fz}(x) = -F(l/2 - x) \quad (12.8)$$

$$B - C \rightarrow M_{fz}(x) = 0 \quad (12.9)$$

Y en el punto A, el momento flector en valor absoluto será $| -Fl/4 |$, y el cortante:

$$V_y(x) = -\partial M_{fz}(x)/\partial x = 0 \rightarrow |V_y(l/4)| = F \quad (12.10)$$

Y el sentido del flector sería a y el del cortante c en la siguiente figura:



En este caso, para calcular el giro en B vamos a integrar el primer tramo, ya que partimos del empotramiento donde el giro y las flechas iniciales son nulas. Por ello el giro será:

$$\theta_z(x) = \int -F(l/2 - x)dx = -\frac{Flx}{2EI} + \frac{Fx^2}{2EI} \quad (12.11)$$

Y la flecha:

$$w_y(x) = \int \left(-\frac{Flx}{2EI} + \frac{Fx^2}{2EI} \right) dx = -\frac{Flx^2}{4EI} + \frac{Fx^3}{6EI} \quad (12.12)$$

Al empezar en un empotramiento las constantes de integración serán nulas. Particularizando en B:

$$\theta_z(B) = -\frac{Fl^2}{8EI} \quad (12.13)$$

y la flecha:

$$w_y(B) = -\frac{Fl^3}{24EI} \quad (12.14)$$

Y extrapolando a C, como el flector es nulo en B-C:

$$\theta_z(C) = \theta_z(B) = -\frac{Fl^2}{8EI} \quad (12.15)$$

y la flecha:

$$w_y(B) = w_y(C) + \theta_z(B)l/2 = -\frac{5Fl^3}{48EI} \quad (12.16)$$

6. Sea la viga muy esbelta ($at^3 \ll a^3t$) sometida al estado de carga mostrado en la Figura 1 y cuya sección de pequeño espesor está indicada en la Figura 2.

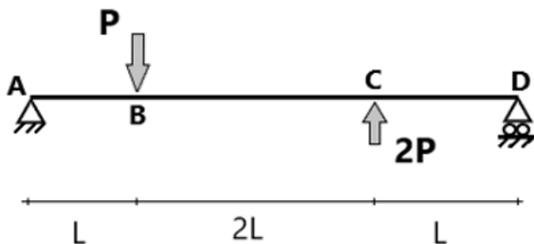


Figura 1

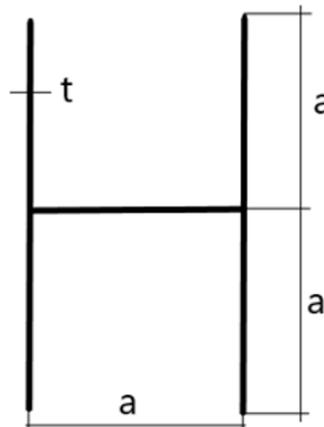


Figura 2

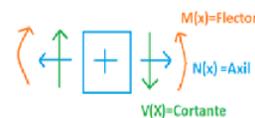
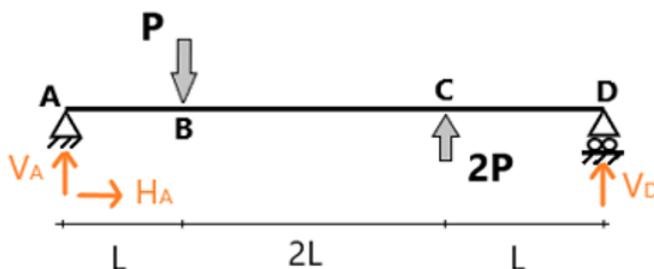
- El módulo del valor del cortante máximo en el diagrama de fuerzas cortantes. (kN)
- El módulo del valor del momento flector máximo en el diagrama de momentos flectores. (kNm)
- El giro en el punto A. (mrad) (Despreciando el efecto de las fuerzas cortantes)
- El desplazamiento vertical (en valor absoluto) en el punto B. (mm) (Despreciando el efecto de las fuerzas cortantes)

Datos: $P=20$ kN; $L=0.4$ m; $a=75$ mm; $t=4$ mm

Solución

- El módulo del valor del cortante máximo en el diagrama de fuerzas cortantes. (kN)

En primer lugar, se determinan las reacciones utilizando las ecuaciones de equilibrio. En la figura, además aparece la referencia utilizada en la resolución del problema



$$\sum F_x = 0; H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0; V_A - P + 2P + V_D = 0$$

$$\sum M_z(A) = 0; -PL + 2P \cdot 3L + V_D 4L = 0$$

siendo las reacciones,

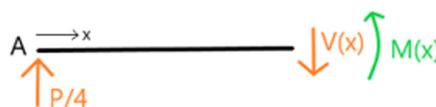
$$H_A = 0 \text{ (kN)}; \quad V_A = \frac{P}{4} = 5 \text{ (kN)}; \quad V_D = \frac{-5P}{4} = -25 \text{ (kN)}$$

Para cada uno de los tramos de la barra, se determinan las leyes de fuerzas y momentos flectores,

Barra AB: ($0 \leq x < L$)

$$V_y(x) = \frac{P}{4} \text{ (kN)}$$

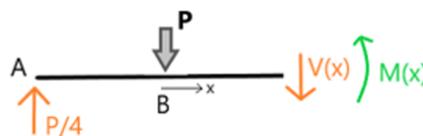
$$M_z(x) = \frac{P}{4} x \text{ (kNm)}$$



Barra CB: ($0 \leq x < 2L$)

$$V_y(x) = \frac{-3P}{4} \text{ (kN)}$$

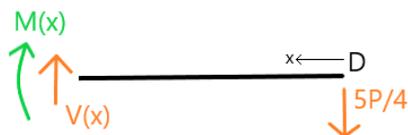
$$M_z(x) = \frac{-3P}{4} x + \frac{PL}{4} \text{ (kNm)}$$



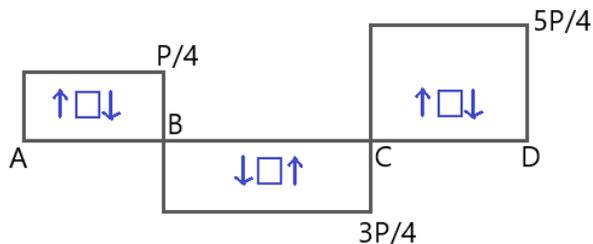
Barra DC: ($0 \leq x < L$)

$$V_y(x) = \frac{5P}{4} \text{ (kN)}$$

$$M_z(x) = \frac{5P}{4} x \text{ (kNm)}$$



El diagrama de fuerzas cortantes de la viga es,

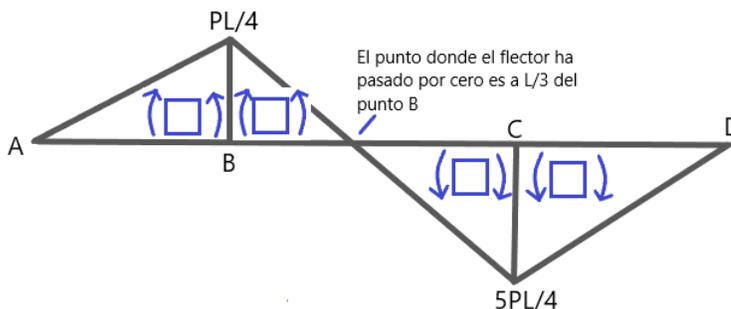


siendo el cortante máximo en valor absoluto,

$$V_y^{\max} = \frac{5P}{4} = 25 \text{ (kN)}$$

- b) El módulo del valor del momento flector máximo en el diagrama de momentos flectores. (kNm)

El diagrama de momentos flectores de la viga es,

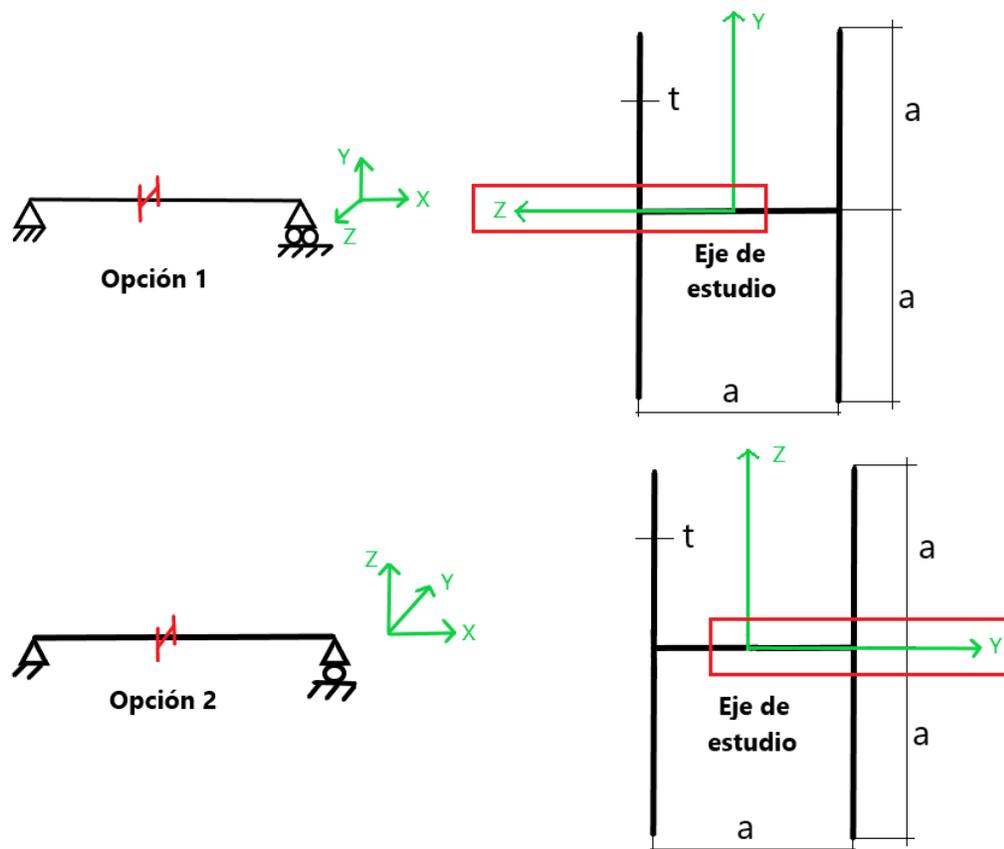


siendo el flector máximo en valor absoluto,

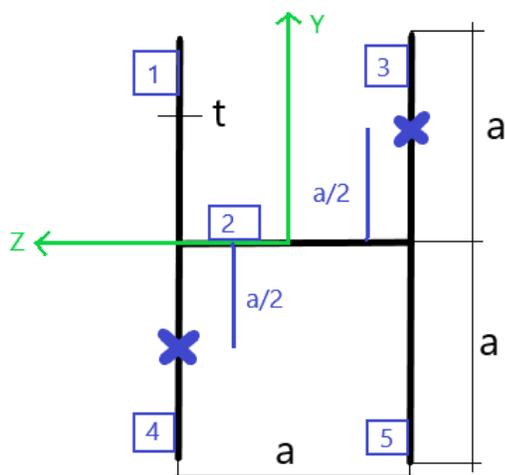
$$M_z^{\max} = \frac{5PL}{4} = 10 \text{ (kNm)}$$

- c) El giro en el punto A. (mrad) (Despreciando el efecto de las fuerzas cortantes)

Previamente, se calcula la inercia del perfil dado en la figura 2. En este caso, no se han indicado los ejes. Así que, lo primero que se debe de hacer es colocar los ejes del centroide (centro de masa). Si se observa la figura 2, el perfil dado tiene dos ejes de simetría. Esto implica que el Centroide está situado en la intersección de ambos ejes. Por otra parte, al no especificar los ejes hay dos posibilidades de posicionar los ejes en función de los ejes utilizados para la resolución de la viga como se muestra a continuación:



En este caso, se ha optado por desarrollar la opción 1. Para calcular la I_{zz} se dividirá el perfil como se muestra en la figura. Las áreas 1, 3, 4, 5 tienen la misma inercia al tener la misma área y la misma distancia de su centro de masa al centroide del perfil.



Para calcular la inercia se utiliza la fórmula,

$$I = \frac{1}{12}(\text{Lado perpendicular al eje})^3 \cdot \text{Lado} + \text{Area} \cdot d^2$$

siendo especificada para cada área:

$$I_{zz} = I_{zz_1} + I_{zz_2} + I_{zz_3} + I_{zz_4} + I_{zz_5}$$

$$I_{zz_1} = I_{zz_3} = I_{zz_4} = I_{zz_5} = \frac{1}{12}a^3 \cdot t \text{ (mm}^4\text{)} + a \cdot t \cdot \left(\pm \frac{a}{2}\right)^2 \text{ (mm}^4\text{)}$$

$$I_{zz_2} = \frac{1}{12}t^3 \cdot a \approx 0 \text{ (mm}^4\text{)} \text{ Viga muy esbelta}$$

$$I_{zz} = 2,25 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Para el cálculo del giro en el punto A se utilizará tanto el Teorema de los Trabajos Virtuales (T.T.V) como los Teoremas de Mohr.

T.T.V. Construir el estado virtual con las hipótesis siguientes:

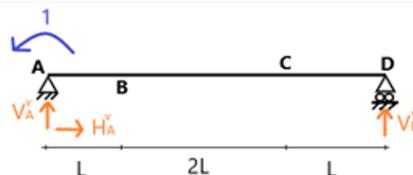
- 1.- Estado isostático.
- 2.- Anular las cargas externas.
- 3.- Giro unidad en el punto A (Lugar donde se busca el giro)
- 4.- Respetar las referencias utilizadas durante el estado real.

El estado virtual para calcular el giro en el punto A está dibujado en la figura, además de las reacciones virtuales asociadas al mismo,

$$H_A^V = 0 \text{ (kN)}$$

$$V_A^V = \frac{1}{4L} \text{ (kN)}$$

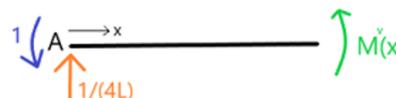
$$V_D^V = -\frac{1}{4L} \text{ (kN)}$$



se determina el momento flector de cada tramo del estado virtual.

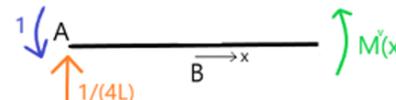
Barra AB (Virtual): ($0 \leq x < L$)

$$M_z^V(x) = -1 + \frac{1}{4L}x \text{ (kNm)}$$



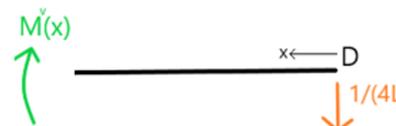
Barra CB (Virtual): ($0 \leq x < 2L$)

$$M_z^V(x) = -1 + \frac{1}{4L}(x+L) \text{ (kNm)}$$



Barra DC (Virtual): ($0 \leq x < L$)

$$M_z^V(x) = -\frac{1}{4L}x \text{ (kNm)}$$



Al sustituir los momentos flectores reales y virtuales para cada tramo en el T.T.V.

$$1 \cdot \phi_A = \int_0^L \frac{M_{AB}^R(x)M_{AB}^V(x)}{EI_{zz}} dx + \int_0^{2L} \frac{M_{BC}^R(x)M_{BC}^V(x)}{EI_{zz}} dx + \int_0^L \frac{M_{CD}^R(x)M_{CD}^V(x)}{EI_{zz}} dx$$

se obtiene el giro en el punto A,

$$\phi_A = \frac{3PL^2}{8EI_{zz}} = \boxed{2,54(\text{mrad})}$$

Teoremas de Mohr Para calcular el giro se utiliza el 2º Teorema de Mohr,

$$u_i = u_j + \phi_j D + \frac{\text{Area} d}{EI_{zz}}$$

siendo,

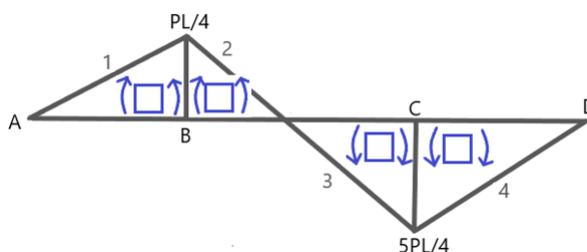
D: Distancia entre los puntos i y j.

Área: Creada por los momentos flectores con sus correspondientes signos.

d: Distancia del centro de masa de cada área al punto i.

Para este problema, las condiciones de contorno de la viga son $u_i = u_D = 0$ y $u_j = u_A = 0$

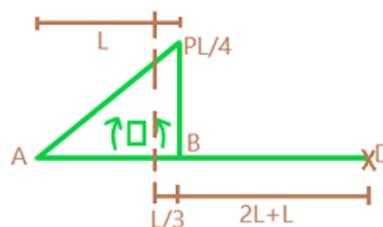
El diagrama de momentos flectores de la viga es,



Analizando cada área y sus distancias del centro de masa de cada área al punto D,

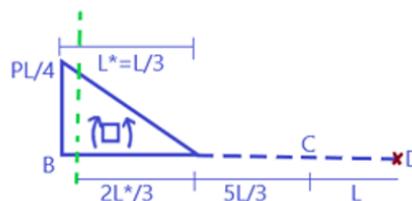
$$A_1 = \frac{1}{2} L \frac{PL}{4} \text{ (Área con signo positivo)}$$

$$D_1 = \frac{L}{3} + 3L$$



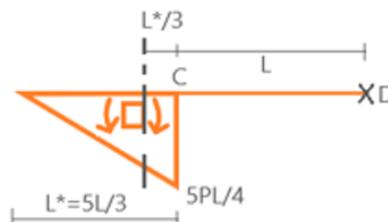
$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{L}{3} \frac{PL}{4} \text{ (Área con signo positivo)}$$

$$D_2 = \frac{2L}{3} + L + \frac{5L}{3}$$



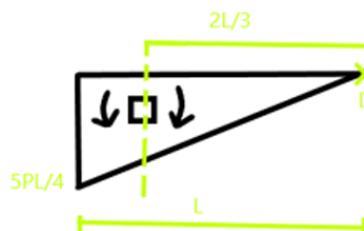
$$A_3 = \frac{1}{2} \frac{5L}{3} \frac{5PL}{4} \text{ (Área con signo negativo)}$$

$$D_3 = \frac{1}{3} \frac{5L}{3} + L$$



$$A_4 = \frac{1}{2} L \frac{5PL}{4} \text{ (Área con signo negativo)}$$

$$D_4 = \frac{2L}{3}$$



Finalmente, el giro en el punto A (sentido anti-horario) utilizando los teoremas de Mohr quedará

$$\phi_A = \frac{3PL^2}{8EI_{zz}} = 2,54 \text{ (mrad)}$$

d) El desplazamiento vertical (en valor absoluto) en el punto B. (mm) (Despreciando el efecto de las fuerzas cortantes)

En la resolución se utilizará tanto el Teorema de los Trabajos Virtuales (T.T.V.) como los Teoremas de Mohr,

T.T.V. Construir el estado virtual con las hipótesis siguientes:

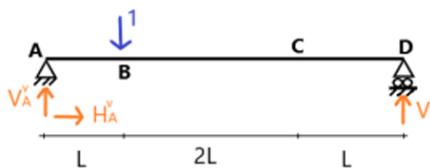
- 1.- Estado isostático.
- 2.- Anular las cargas externas.
- 3.- Desplazamiento unidad en el punto B. (Lugar donde se busca el desplazamiento)
- 4.- Respetar las referencias utilizadas durante el estado real.

El estado virtual para calcular el desplazamiento vertical en el punto B está dibujado en la figura, además de las reacciones virtuales asociadas al mismo,

$$H_A^V = 0 \text{ (kN)}$$

$$V_A^V = \frac{3}{4} \text{ (kN)}$$

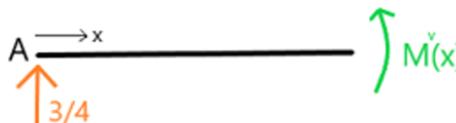
$$V_D^V = \frac{1}{4} \text{ (kN)}$$



se determina el momento flector en cada tramo del estado virtual,

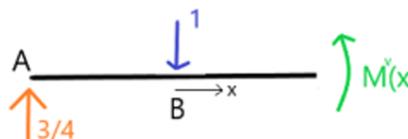
Barra AB (Virtual): ($0 \leq x < L$)

$$M_z^V(x) = \frac{3}{4} x \text{ (kNm)}$$



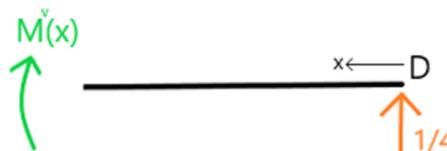
Barra CB (Virtual): ($0 \leq x < 2L$)

$$M_z^V(x) = \frac{3}{4} L - \frac{1}{4} x \text{ (kNm)}$$



Barra DC (Virtual): ($0 \leq x < L$)

$$M_z^V(x) = \frac{1}{4}x \text{ (kNm)}$$



Al sustituir los momentos flectores reales y virtuales para cada tramo en el T.T.V.

$$1 \cdot u_B = 1 \cdot \delta_B = \int_0^L \frac{M_{AB}^R(x)M_{AB}^V(x)}{EI_{zz}} dx + \int_0^{2L} \frac{M_{BC}^R(x)M_{BC}^V(x)}{EI_{zz}} dx + \int_0^L \frac{M_{CD}^R(x)M_{CD}^V(x)}{EI_{zz}} dx$$

se obtiene el desplazamiento vertical (flecha) en el punto B,

$$u_B = -\frac{5PL^3}{12EI_{zz}} = -1,13 \text{ (mm)}$$

El signo negativo tiene la interpretación física de indicar que el sentido del desplazamiento en dicho punto (B) es contrario al que se ha supuesto en el estado virtual, es decir, el desplazamiento en el punto B sería hacia arriba. Sin embargo, al indicar en el enunciado en valor absoluto habría que dar el número sin signo.

Teoremas de Mohr En este caso el 2º Teorema de Mohr se utiliza entre los puntos A y B,

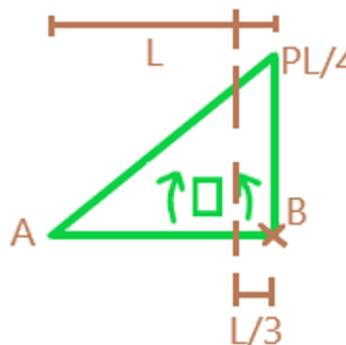
$$u_B = u_A + \phi_A D + \frac{\text{Area } d}{EI_{zz}}$$

siendo las condiciones de contorno de la viga, $u_A=0$ y $\phi_A = \frac{3PL^2}{8EI_{zz}}$

El área que se analiza es el área 1,

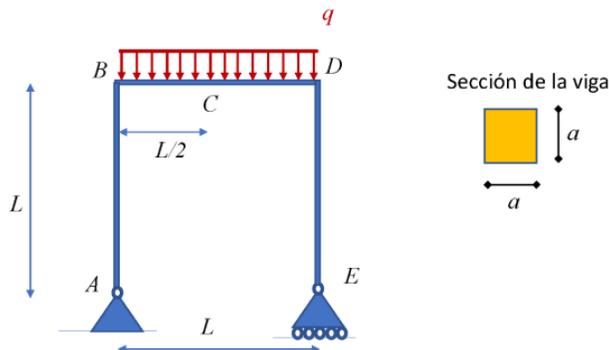
$$A_1 = \frac{1}{2}L \frac{PL}{4} \text{ (Área con signo positivo)}$$

$$D_1 = \frac{L}{3}$$



siendo el desplazamiento en el punto B el mismo que el obtenido por el T.T.V. Para conocer el sentido del desplazamiento con el Teorema de Mohr se analizaría la deformada de la viga (ecuación de la elástica). Al igual que en el T.T.V. el desplazamiento del punto B es hacia arriba.

7. Dado el pórtico de la figura, con sección cuadrada de lado a .



Datos: $q=5000 \text{ N/m}$; $L=1 \text{ m}$; $a=0.1 \text{ m}$; $E=1000 \text{ MPa}$.

Se pide:

- Reacción en el punto E.
- Fuerza interna de cortante máxima.
- Desplazamiento vertical en el punto C, se puede considerar solo debido a flexión.
- Esfuerzo σ_{xx} máximo (en valor absoluto) en el pórtico.
- Esfuerzo τ_{xy} máximo (en valor absoluto) en el pórtico.
- Giro en el punto C, se puede considerar solo debido a flexión.

Solución

a) Reacción en el punto E.

Planteando equilibrios,

$$\sum F_y = 0; V_A + V_E = qL$$

$$\sum M_z(A) = 0; V_E L = \frac{qL^2}{2}$$

Por tanto,

$$V_E = \frac{qL}{2} = 2500 \text{ N} \quad V_A = \frac{qL}{2} = 2500 \text{ N}$$

b) Fuerza interna de cortante máxima.

Mirando la ley de fuerzas internas cortantes entre B y D (es cero en el resto)

$$V_{BD}(x) = -V_A + qx = -\frac{qL}{2} + qx$$

y el valor máximo (en valor absoluto) es

$$V_{max} = \frac{qL}{2} = 2500 \text{ N}$$

- c) **Desplazamiento vertical en el punto C, se puede considerar solo debido a flexión.**

La Ley de momentos internos se puede sacar a partir del valor de la ley de fuerzas internas cortantes o con el método de las secciones, dando

$$M_{BD}(x) = V_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qL}{2} x - \frac{qx^2}{2}$$

que es máxima donde $V=0$, que se cumple en C con valor

$$M_{\max}(C) = \frac{qL^2}{8}$$

y cero de A a B y de D a E. Para el desplazamiento en el punto C, se pone una fuerza vertical virtual unitaria en ese punto, que da de ley de fuerza interna de momentos,

$$M_{BC}(x < L/2) = \frac{x}{2}$$

$$M_{BC}(x > L/2) = \frac{L}{4} - (x - L/2)$$

Así, el desplazamiento en C es (aprovechando simetría del problema)

$$\delta_v^C = \frac{2}{EI} \int_0^{L/2} \frac{1}{2} x \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) dx = -\frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} = -8 \text{ mm}$$

donde $I = \frac{a^4}{12}$

- d) **Esfuerzo σ_{xx} máximo (en valor absoluto) en el pórtico.**

El valor del esfuerzo normal,

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{\max}}{I} y_{\max} = \frac{3qL^2}{4a^3} = 3,8 \text{ MPa}$$

- e) **Esfuerzo τ_{xy} máximo (en valor absoluto) en el pórtico.**

El valor del esfuerzo tangencial,

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{V_{\max} Q^*}{b(y)I}$$

El valor máximo de Q^* ocurre en la línea central del perfil y el valor para una sección cuadrada es

$$Q^* = \frac{a^3}{8}$$

así,

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{3qL}{4a^2} = 0,375 \text{ MPa}$$

- f) Giro en el punto C, se puede considerar solo debido a flexión.**
El giro en el punto C es nulo por condición de simetría,

$$\theta_C = 0 \text{ mrad}$$

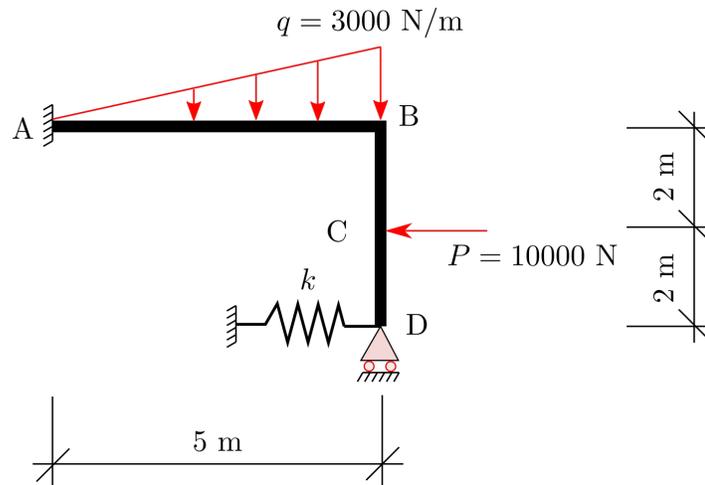
13. Deformaciones, Giros y Desplazamientos [Hiperestática]

13.1	Enunciados de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos	326
13.2	Solución de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos	329



13.1. Enunciados de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos

1. Dada una estructura sometida a las cargas como se muestra en la siguiente figura.

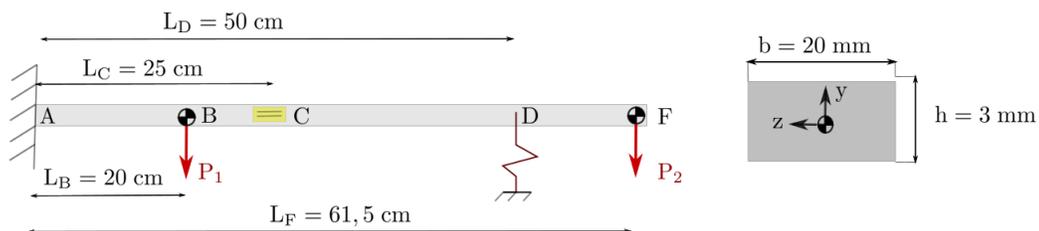


Se pide:

- Determinar la reacción vertical en el punto D.
- Determinar las leyes de momentos flectores y cortantes y dibujar sus diagramas
- Determinar el desplazamiento del muelle.
- Determinar el giro en el punto B.

Datos: $EI = 2,5 \text{ MN}\cdot\text{m}$, $k = 1 \text{ MN}/\text{m}$.

2. La viga de la figura de longitud L está construida de un material conocido (i.e. constantes E y ν). Dicha viga está empotrada en el punto A mientras que en el punto D está bajo la acción de un muelle de constante K . En los puntos B y F, la viga está sometida a dos cargas puntuales (P_1 y P_2) de valor $0,8 \text{ kg}$. Finalmente, se ha colocado un extensómetro a 25 cm del extremo A (Punto C)



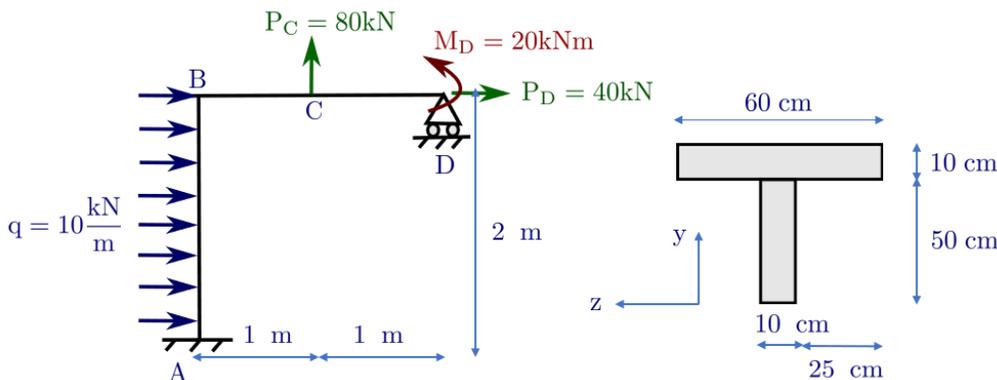
Calcular:

- Calcular la reacción en el punto D. Modelar el muelle como si fuera infinitamente rígido.
- Leyes de esfuerzos. Valores máximos del axil, del cortante y del momento flector.

c) ¿Cuál sería el desplazamiento en el punto D si el muelle tuviera una constante elástica K?

Datos: $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0,33$, $K = 20000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

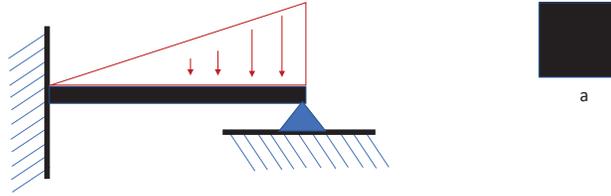
3. La estructura de la figura está sometida a una carga puntual en los puntos C (80 kN) y D (40 kN) y a un momento exterior en D (20 kNm). Además, en la barra AB tiene un carga distribuida de valor $10 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$.



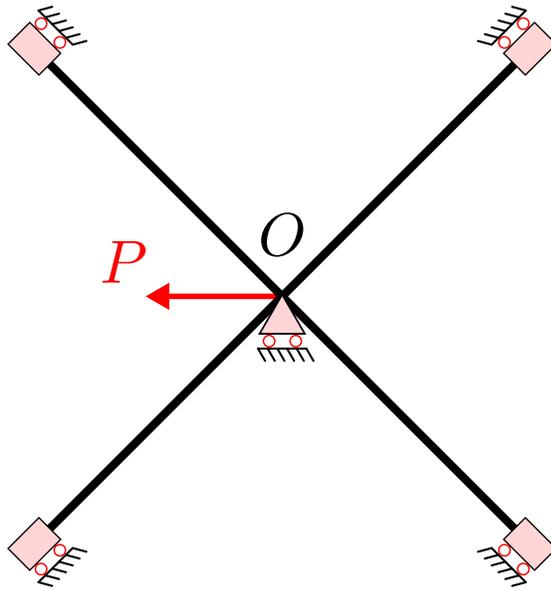
- Calcular la incógnita hiperestática (Se supondrán despreciables los esfuerzos debidos al axil y al cortante).
- Diagramas de esfuerzos.
- Desplazamiento horizontal en el punto D.
- Calcular las inercias. (I_{zz}, I_{yy}, I_{yz}) sabiendo que en todas las barras de la estructura se ha dimensionado un perfil de pared delgada T cuyas dimensiones están especificadas en la figura.
- Calcular las tensiones normales (σ_{xx}) y tangenciales (σ_{xy}, σ_{xz})

Datos: $L_{AB} = 2\text{m}$; $L_{BC} = 1\text{m}$; $L_{CD} = 1\text{m}$; $E_{AB} = E_{BC} = E_{CD} = E$

4. Dada la viga de la figura, de longitud L , sometida a una carga triangular, de valor q en el extremo derecho, detectar el punto donde es más posible que falle según el criterio de Von Mises.



5. Se tiene la estructura de vigas representada en la figura, sometida a una carga horizontal de valor P en el centro. Todas las vigas tienen igual longitud L .

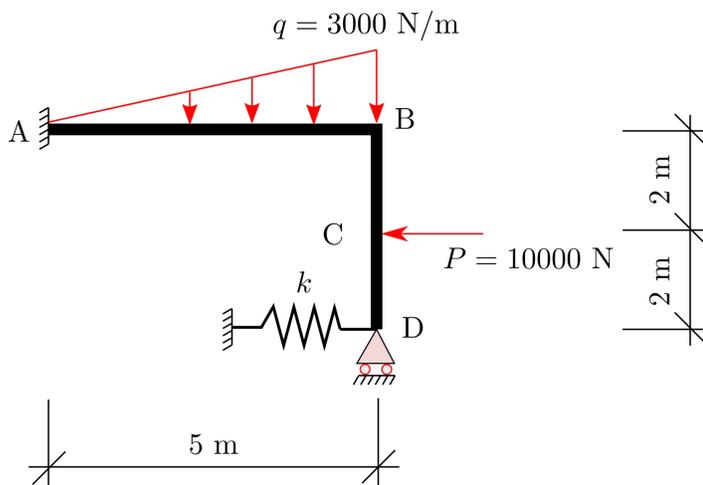


Se pide:

- Orden de hiperestaticidad de la estructura
- Ecuación de la elástica de la viga
- Desplazamiento horizontal del punto central O (positivo hacia la izquierda)
- Giro del punto central O (positivo en sentido antihorario)
- Representación gráfica (aproximada) de la deformada

13.2. Solución de ejercicios de Deformaciones, Giros y Desplazamientos

1. Dada una estructura sometida a las cargas como se muestra en la siguiente figura.



Se pide:

- Determinar la reacción vertical en el punto D.
- Determinar las leyes de momentos flectores y cortantes y dibujar sus diagramas
- Determinar el desplazamiento del muelle.
- Determinar el giro en el punto B.

Datos: $EI = 2,5 \text{ MN}\cdot\text{m}$, $k = 1 \text{ MN/m}$.

Solución:

El grado de hiperestaticidad:

$$G.H = 5 - 3 = 2$$

Por tanto, se seleccionan 2 incógnitas hiperestáticas que son la fuerza en muelle X_1 y la reacción vertical en el punto D X_2 . Se convierte la estructura hiperestática en estructura isostática.

Ecuaciones de equilibrio estático:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - P + X_1 = 0 \Rightarrow H_A = 10 - X_1$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + X_2 - \frac{15}{2} = 0 \Rightarrow V_A = 7,5 - X_2$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = -45 + 5X_2 + 4X_1$$

Leyes de momento flector:

- Tramo AB:

$$M = -45 + 5X_2 + 4X_1 + (7,5 - X_2)x - \frac{x^3}{10}$$

- Tramo BC:

$$M = (4 - x)X_1 + 10x - 20$$

Aplica una carga virtual $\delta P = 1$ en la dirección de la carga X_2 , se obtiene la ley de momento flector virtual:

$$\delta M = \begin{cases} L - x & \text{para tramo AB} \\ 0 & \text{para tramo BC} \end{cases}$$

El trabajo virtual interno complementario:

$$\delta W_{int}^C = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{\delta M M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(50X_1 + \frac{125}{3}X_2 - 421,875 \right) = 0$$

Ahora, se aplica una carga virtual $\delta P = 1$ en la dirección de la carga X_1 , se obtiene la ley de momento flector virtual:

$$\delta M = \begin{cases} 4 & \text{para tramo AB} \\ 4 - x & \text{para tramo BC} \end{cases}$$

El trabajo virtual interno complementario:

$$\delta W_{int}^C = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{\delta M M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{304}{3}X_1 + 50X_2 - \frac{103262,5}{3} \right) = v_D$$

Por otro lado, tenemos por la condición de compatibilidad:

$$v_D = -\frac{X_1}{k}$$

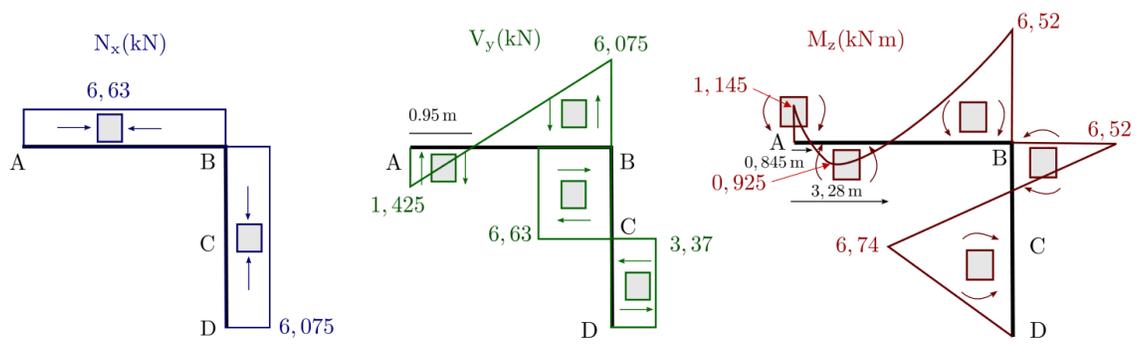
Así, se obtiene otra ecuación:

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{304}{3}X_1 + 50X_2 - \frac{103262,5}{3} \right) = -\frac{X_1}{k}$$

Con dos ecuaciones y dos incógnitas, resolviéndolas se obtienen

$$\begin{cases} X_1 = 3,3745 \text{ (kN)} \\ X_2 = 6,075 \text{ (kN)} \end{cases}$$

Los diagramas de esfuerzos de la estructura al sustituir las incógnitas hiperestáticas son,



Desplazamiento del muelle:

$$\frac{X_1}{k} = 3,4 \text{ mm}$$

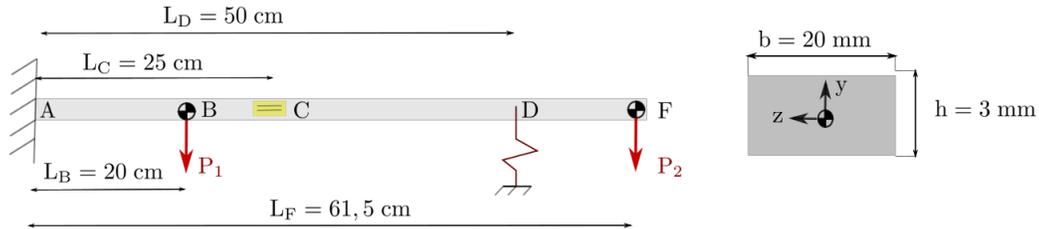
Giro en el punto B:

Aplica un momento virtual $\delta M = 1$ en el punto B, se obtiene la ley de momento flector:

$$\delta M = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\delta M \theta_B = \int_0^L \frac{\delta M M}{EI} dx = 0,001376$$

2. La viga de la figura de longitud L está construida de un material conocido (i.e. constantes E y ν). Dicha viga está empotrada en el punto A mientras que en el punto D está bajo la acción de un muelle de constante K . En los puntos B y F, la viga está sometida a dos cargas puntuales (P_1 y P_2) de valor $0,8 \text{ kg}$. Finalmente, se ha colocado un extensómetro a 25 cm del extremo A (Punto C)



Calcular:

- Calcular la reacción en el punto D. Modelar el muelle como si fuera infinitamente rígido.
- Leyes de esfuerzos. Valores máximos del axil, del cortante y del momento flector.
- ¿Cuál sería el desplazamiento en el punto D si el muelle tuviera una constante elástica K ?

Datos: $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0,33$, $K = 20000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

Solución:

- a) Calcular la reacción en el punto D. Modelar el muelle como si fuera infinitamente rígido.**

En primer lugar, se calcula el valor de la incógnita hiperestática. Para ello, se aplican los pasos siguientes:

P1.- El orden de hiperestaticidad de la estructura:

$$\text{o.h.} = \text{Reacciones} - \text{Ecuaciones} = 4 - 3 = 1$$

P2.- Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0; \quad H_A = 0 \quad (\text{N}) \quad (13.1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad -P_2 - P_1 + V_A + V_D = 0; \quad V_A = P_2 + P_1 + V_D = 16 - V_D \quad (\text{N}) \quad (13.2)$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_A = P_1 L_B - V_D L_D + P_2 L_F = 0 \quad M_A = 2,1 - 0,5V_D \quad (\text{N m}) \quad (13.3)$$

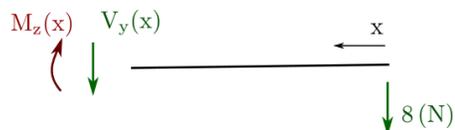
P3.- Leyes de esfuerzos: Al no existir fuerzas en el eje x no se realizarán el equilibrio de fuerzas en dicha dirección.

Barra FD: ($0 \leq x < 0,115 \text{ m}$)

$$\sum F_y = 0; V_y(x) = -8 \text{ (N)}$$

$$\sum M_p = 0; M_z(x) = -8x \text{ (Nm)}$$

Barra DB: (0 ≤ x < 0,3 m)

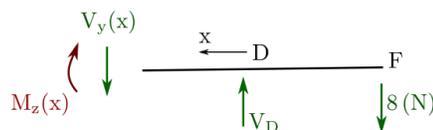


$$\sum F_y = 0; V_y(x) = V_D - 8 \text{ (N)}$$

$$\sum M_p = 0$$

$$M_z(x) = V_D x - 8(x + 0,115) \text{ (Nm)}$$

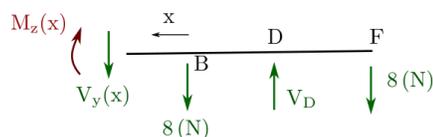
Barra BA: (0 ≤ x < 0,2 m)



$$\sum F_y = 0; V_y(x) = -16 + V_D \text{ (N)}$$

$$\sum M_p = 0;$$

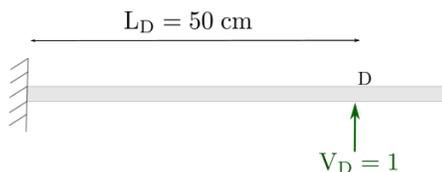
$$M_z(x) = -16x + V_D(x + 0,3) - 3,32 \text{ (Nm)}$$



P4.- Para calcular el valor de la I.H. se construye un estado virtual que tiene que cumplir:

1. Isostático.
2. Anular las cargas externas.
3. Valor unidad a la I.H. ($V_D = 1$)
4. Respetar la referencia del estado real. En la tabla están recogidos los valores de los momentos flectores virtuales obtenidos.

FD ^V (x)	DB ^V (x)	BA ^V (x)
0	x	(x + 0,3)



P5.- Aplicar el Teorema de los Trabajos Virtuales (T.T.V.=P.T.V.C.) para calcular la I.H.: $1 \cdot \delta_{VD} = 0 = \int_0^{0,115} \frac{M_{z,FD}^R(x)M_{z,FD}^V(x)}{EI_{zz}} dx + \int_0^{0,3} \frac{M_{z,DB}^R(x)M_{z,DB}^V(x)}{EI_{zz}} dx + \int_0^{0,2} \frac{M_{z,BA}^R(x)M_{z,BA}^V(x)}{EI_{zz}} dx =$

$$\int_0^{0,115} \frac{(8x)(0)}{EI_{zz}} dx + \int_0^{0,3} \frac{(V_D x - 8x - 0,92)(x)}{EI_{zz}} dx + \int_0^{0,2} \frac{(-16V_x + V_D(x + 0,3) - 3,32)(x + 0,3)}{EI_{zz}} dx = 0$$

La I.H. será:

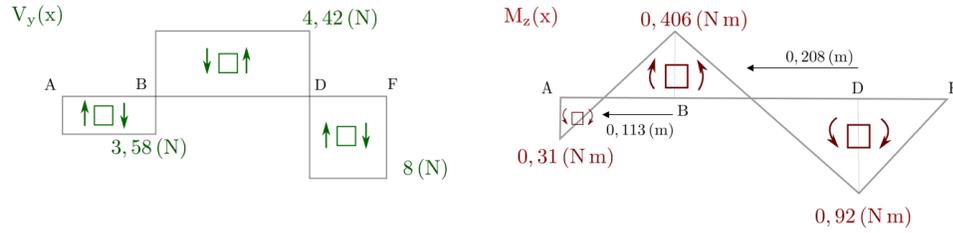
$$V_D = 12,42 \text{ (N)}$$

P6.- Finalmente, el valor de las reacciones al sustituir la I.H. será:

$$V_A = 3,58 \text{ (N)} \quad M_A = 0,31 \text{ (Nm)}$$

b) Leyes de esfuerzos. Valores máximos del axil, del cortante y del momento flector.

Las leyes del esfuerzo cortante y del momento flector al sustituir la incógnita hiperestática son:



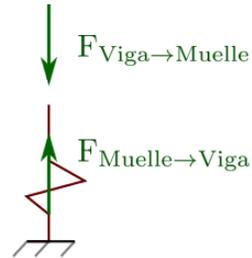
siendo los valores máximos del cortante y del flector,

$$V_{\max} = 8 \text{ (N)} \quad M_{\max} = 0,92 \text{ (Nm)}$$

- c) ¿Cuál sería el desplazamiento en el punto D si el muelle tuviera una constante de rigidez K ? ($K=20000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$)

La fuerza del muelle es equivalente a la incógnita hiperestática (Figura adjunta). Por tanto, el valor absoluto del desplazamiento en el punto D se calcula utilizando,

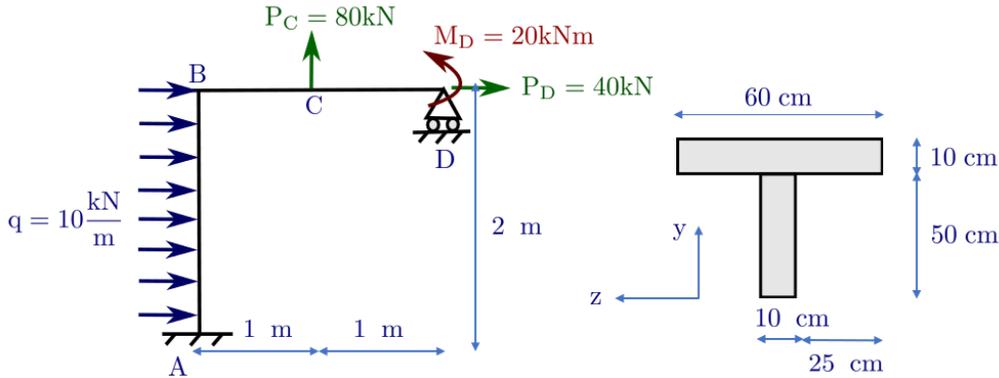
$$F = K u_D; \quad u_D = \frac{F}{K} = 6,21 \text{ mm}$$



siendo su sentido

descendente.

3. La estructura de la figura está sometida a una carga puntual en los puntos C (80 kN) y D (40 kN) y a un momento exterior en D (20 kNm). Además, en la barra AB tiene un carga distribuida de valor $10 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$.



- Calcular la incógnita hiperestática (Se supondrán despreciables los esfuerzos debidos al axil y al cortante).
- Diagramas de esfuerzos.
- Desplazamiento horizontal en el punto D.
- Calcular las inercias. (I_{zz}, I_{yy}, I_{yz}) sabiendo que en todas las barras de la estructura se ha dimensionado un perfil de pared delgada T cuyas dimensiones están especificadas en la figura.
- Calcular las tensiones normales (σ_{xx}) y tangenciales (σ_{xy}, σ_{xz})

Datos: $L_{AB} = 2\text{m}; L_{BC} = 1\text{m}; L_{CD} = 1\text{m}; E_{AB} = E_{BC} = E_{CD} = E$

Solución

- Calcular la incógnita hiperestática (Se supondrán despreciables los esfuerzos debidos al axil y al cortante).

P1.- El orden de hiperestaticidad de la estructura:

$$\mathbf{o.h. = Reacciones - Ecuaciones = 4 - 3 = 1}$$

P2.- Ecuaciones de equilibrio:

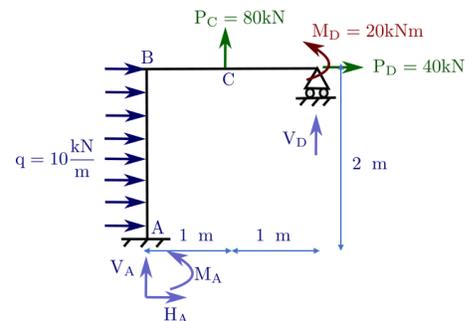
$$\sum F_x = 0; H_A + 40 + 10 \cdot 2 = 0 \quad \boxed{H_A = -60 \text{ (kN)}}$$

$$\sum F_y = 0; \quad \boxed{V_A + V_D = -80 \text{ (kN)}}$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$M_A - 20 \cdot 1 + 80 \cdot 1 + 20 - 40 \cdot 1 + V_D \cdot 2 = 0$$

$$\boxed{M_A + 2 \cdot V_D = 0 \text{ (kNm)}}$$



Elección de la incógnita hiperestática (I.H.= V_D). Todas las reacciones se expresan en función de V_D :

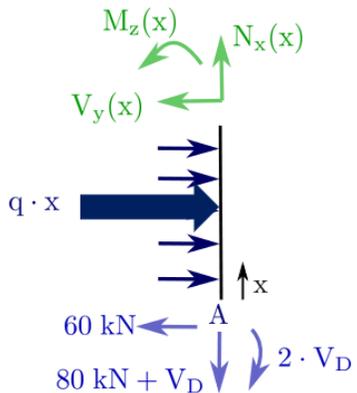
$$H_B = -60 \text{ (kN)}$$

$$V_A = -V_D - 80 \text{ (kN)}$$

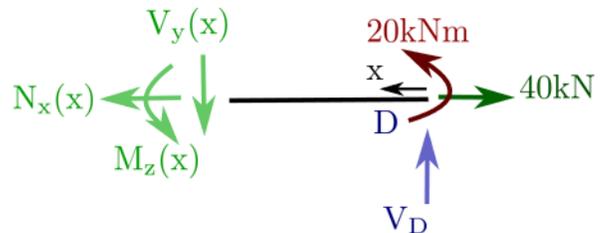
$$M_A = -2 \cdot V_D \text{ (kNm)}$$

P3.- Leyes de esfuerzos:

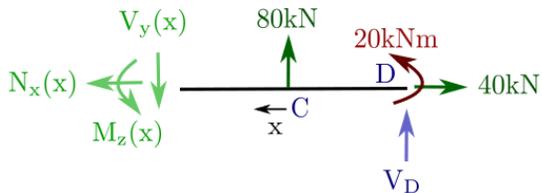
Barra AB: $[0 \leq x < 2]$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad N_x(x) &= V_D + 80 \\ \sum F_y = 0; \quad V_y(x) &= q \cdot x - 60 \\ \sum M_p = 0; \quad M_z(x) &= 2 \cdot V_D = 0 + 60 \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} \end{aligned}$$


Barra DC: $[0 \leq x < 1]$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad N_x(x) &= 40 \\ \sum F_y = 0; \quad V_y(x) &= V_D \\ \sum M_p = 0; \quad M_z(x) &= 20 + V_D \cdot x \end{aligned}$$


Barra CB: $[0 \leq x < 1]$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad N_x(x) &= 40 \\ \sum F_y = 0; \quad V_y(x) &= 80 + V_D \\ \sum M_p = 0; \end{aligned}$$


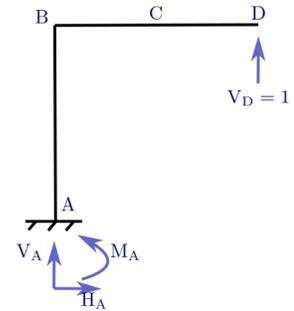
$$M_z(x) = 80 \cdot x + V_D \cdot (x + 1) + 20$$

P4.- Para calcular el valor de la I.H. se construye un estado virtual que tiene que cumplir:

1. Isostático.
2. Anular las cargas externas.
3. Valor unidad a la I.H. ($V_D = 1$)
4. Respetar la referencia del estado real.

En la tabla están recogidos los valores de los momentos flectores virtuales obtenidos.

$AB^V(x)$	$DC^V(x)$	$CB^V(x)$
2	x	(x + 1)



P5.- Aplicar el Teorema de los Trabajos Virtuales (T.T.V.=P.T.V.C.) para calcular la I.H.:

$$1 \cdot \delta_{VD} = 0 = \int_0^2 \frac{M_{z,AB}^R(x)M_{z,AB}^V(x)}{EI_{zz}} dx + \int_0^1 \frac{M_{z,DC}^R(x)M_{z,DC}^V(x)}{EI_{zz}} dx + \int_0^1 \frac{M_{z,CB}^R(x)M_{z,CB}^V(x)}{EI_{zz}} dx$$

La I.H. será:

$$V_D = -30 \text{ (kN)}$$

P6.- Finalmente, el valor de las reacciones al sustituir la I.H. será:

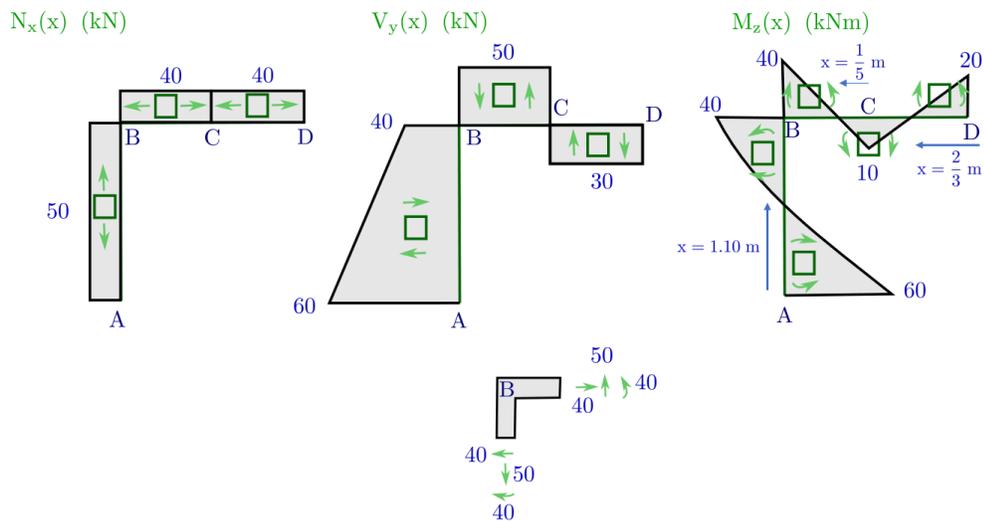
$$H_A = -60 \text{ (kN)}$$

$$V_A = -50 \text{ (kN)}$$

$$M_A = 60 \text{ (kNm)}$$

b) Diagramas de esfuerzos.

Los diagramas de esfuerzos está representado con los valores característicos, sus unidades y los puntos donde el momento flector pasa por cero. Además, se comprueba el equilibrio en el punto B intersección de la barra AB y CB



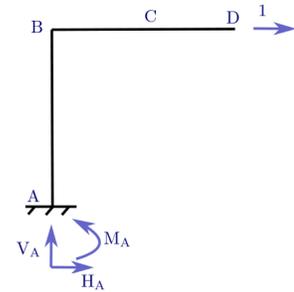
c) Desplazamiento horizontal en el punto D.

Para calcular el desplazamiento horizontal en el punto D se construye un nuevo estado virtual que tiene que cumplir:

1. Isostático.
2. Anular las cargas externas.
3. Fuerza unidad (1) en el punto D en la dirección horizontal.
4. Respetar la referencia del estado real.

En la tabla están recogidos los valores de los momentos flectores virtuales obtenidos.

$AB^V(x)$	$DC^V(x)$	$CB^V(x)$
$-2 + x$	0	0



Aplicar el Teorema de los Trabajos Virtuales (T.T.V.=P.T.V.C.) para calcular la I.H.:

$$1 \cdot u_{HD} = 0 = \int_0^2 \frac{M_{z,AB}^R(x)M_{z,AB}^V(x)}{EI_{zz}} dx + \int_0^1 \frac{M_{z,DC}^R(x)M_{z,DC}^V(x)}{EI_{zz}} dx + \int_0^1 \frac{M_{z,CB}^R(x)M_{z,CB}^V(x)}{EI_{zz}} dx$$

El desplazamiento horizontal será:

$$u_{HD} = \frac{140}{3EI_{zz}}$$

- d) Calcular las inercias (I_{zz} , I_{yy} , I_{yz}) sabiendo que en todas las barras de la estructura se ha dimensionado un perfil de pared delgada T cuyas dimensiones están especificadas en la figura.

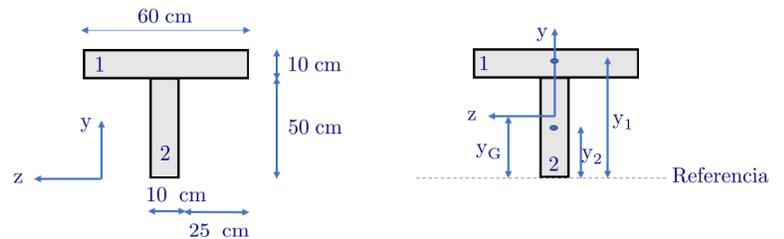
En primer lugar, se debe posicionar los ejes de la figura en el centro de masa. El eje y es un eje de simetría por tanto está a la mitad de la figura mientras que el eje z se posicionará a partir de una referencia y utilizando la fórmula siguiente:

$$A_T \cdot y_G = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2$$

$$A_1 = 600 \text{ cm}^2 \quad y_1 = 55 \text{ cm}$$

$$A_2 = 500 \text{ cm}^2 \quad y_2 = 25 \text{ cm}$$

$$y_G = 41,36 \text{ cm}$$



Una vez situadas los centros de masa de la figura las inercias se calculan utilizando la fórmula siguiente:

$$I = \frac{1}{12}(\text{Lado perpendicular al eje})^3 \cdot \text{Lado} + \text{Area} \cdot d^2$$

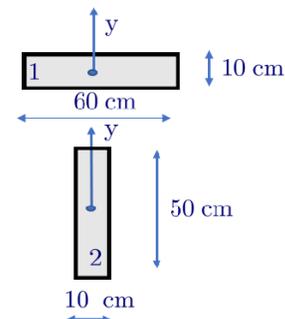
Respecto al eje y :

$$I_{yy} = I_{yy_1} + I_{yy_2}$$

$$I_{yy_1} = \frac{1}{12}(60)^3 \cdot 10 + 600 \cdot 0^2 = 180000 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy_2} = \frac{1}{12}(10)^3 \cdot 50 + 500 \cdot 0^2 = 4166,67 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = 184166,67 \text{ cm}^4$$



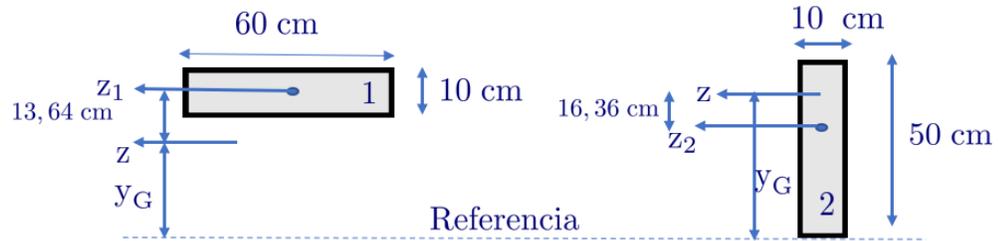
Respecto al eje z :

$$I_{zz} = I_{zz_1} + I_{zz_2}$$

$$I_{zz_1} = \frac{1}{12}(10)^3 \cdot 60 + 600 \cdot 13,64^2 = 116629,76 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz_2} = \frac{1}{12}(50)^3 \cdot 10 + 500 \cdot 16,36^2 = 237991,47 \text{ cm}^4$$

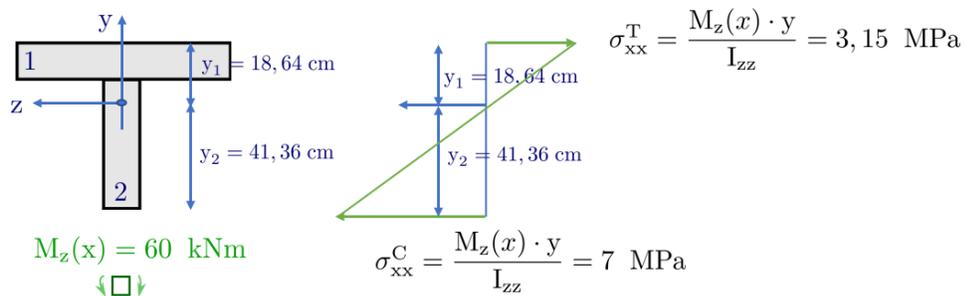
$$I_{zz} = 354621,23 \text{ cm}^4$$



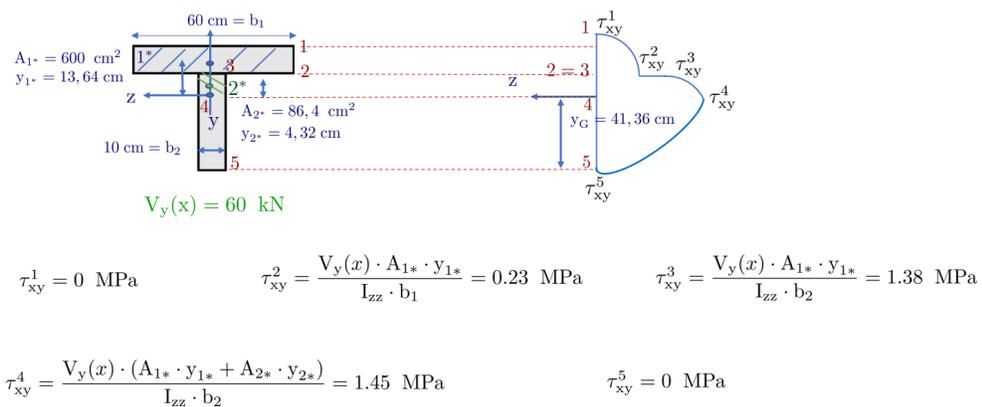
La inercia respecto al eje yz es cero al existir un eje de simetría.

e) **Calcular las tensiones normales (σ_{xx}) y tangenciales (σ_{xy}, σ_{xz})**

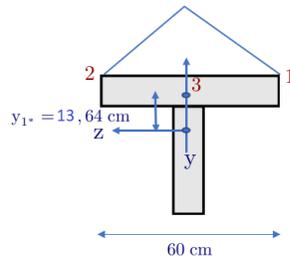
Las tensiones normales para el momento máximo están representadas en la figura siguiente:



Las tensiones tangenciales τ_{xy} para el cortante máximo están representadas en la figura:



Las tensiones tangenciales τ_{xz} para el cortante máximo están representadas en la figura:



$$V_y(x) = 60 \text{ kN}$$

$$\tau_{xz}^1 = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz}^2 = 0 \text{ MPa}$$

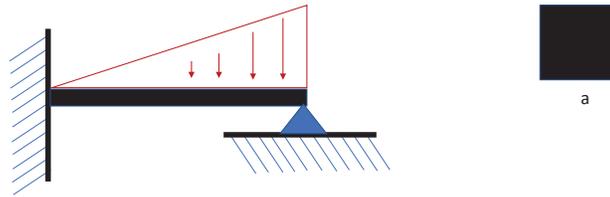
Tramo 23 = Tramo 13

$$\tau_{xz23} = \frac{V_y(x) \cdot s \cdot y_{1^*}}{I_{zz}} \longrightarrow \tau_{xz23}^3 = 0.6923 \text{ MPa}$$

$s = 30 \text{ cm}$

Observación: El punto 3 de las tensiones tangenciales τ_{xz} sería multiplicado por 2 porque representan las dos ramas de las alas del perfil de pared delgada T. Además dicho punto coincide con las tensiones tangenciales τ_{xy} en el punto 3.

4. Dada la viga de la figura, de longitud L , sometida a una carga triangular, de valor q en el extremo derecho, detectar el punto donde es más posible que falle según el criterio de Von Mises.



Solución

La tensión equivalente de Von Mises se expresa del siguiente modo:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]}$$

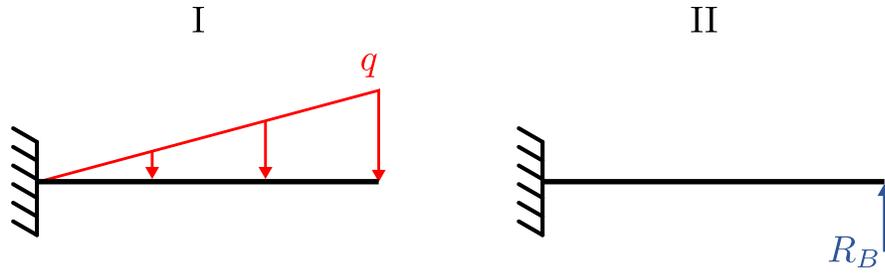
la cual, particularizada para la simplificación de vigas sometidas a esfuerzo cortante y momento flector se reduce a ($\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{yz} = 0$):

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2}$$

Para la tensión longitudinal σ_{xx} se recurre a la ley de Navier, mientras que para las tensiones tangenciales τ_{xy} y τ_{xz} se hace uso de la ley de Colignon. Por tanto, para determinar el punto donde σ_{eq} es máximo es necesario calcular las leyes de momento flector $M_z(x)$ y de esfuerzo cortante $V_y(x)$.

El problema es hiperestático de orden 2, sin embargo, al no haber solicitaciones horizontales, puede considerarse como hiperestático de orden 1 (sin pérdida de generalidad, todas las reacciones horizontales pueden considerarse nulas). Por tanto, para obtener las reacciones se aplica el método de compatibilidad, escogiendo la reacción vertical en el apoyo derecho B como incógnita hiperestática. La condición de compatibilidad es que el desplazamiento vertical en B sea nulo i.e. $v_B = 0$.

Dicha estructura se puede representar como descomposición dos casos simples I y II:



Así, la ecuación de compatibilidad puede expresarse como

$$v_B^I (\downarrow) = v_B^{II} (\uparrow)$$

El desplazamiento vertical hacia abajo de una viga empotrada sometida a una carga triangular creciente es

$$v_B^I (\downarrow) = \frac{11qL^4}{120EI_{zz}},$$

mientras que el desplazamiento vertical hacia arriba de una viga empotrada con una carga en el extremo es

$$v_B^{II} (\uparrow) = \frac{R_B L^3}{3EI_{zz}}$$

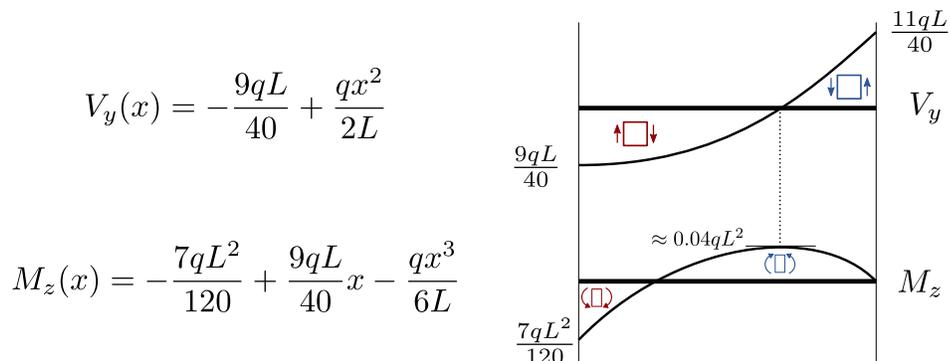
De este modo, se obtiene la incógnita hiperestática

$$R_B = \frac{11qL}{40}$$

Determinada esta reacción, el resto pueden obtenerse por equilibrio:

$$R_A = \frac{9qL}{40}, \quad M_A = -\frac{7qL^2}{120},$$

donde el signo menos (-) de M_A obedece el criterio de signos seguido en la asignatura. Las leyes de esfuerzo cortante y momento flector son (tomando el origen de x en el empotramiento):



Puede comprobarse que el punto donde el momento flector es máximo (el empotramiento) no coincide con el cortante máximo (el apoyo simple), lo cual pone de manifiesto que la variable x entra en el problema de optimización de σ_{eq} .

La ley de Navier para una sección con un eje de simetría (como la del enunciado) donde únicamente hay M_z es

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{zz}}y$$

En cuanto a la ley de Colignon, para una sección cuadrada de lado a el cortante vertical genera una distribución τ_{xy} tal que:

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{V_y(x)Q_z^*(y)}{I_{zz}b(y)} = \frac{V_y(x)}{2I_{zz}}\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right),$$

siendo el cortante τ_{xz} nulo en la sección debido a que toda área A^* perpendicular al eje z es simétrica respecto a dicho eje, dando lugar a un Q_z^* nulo:

$$\tau_{xz} = 0$$

De este modo, se observa que para determinar el σ_{eq} se debe resolver un problema de optimización en (x, y) . Para ello, se define una función $\mathcal{F}(x, y)$ a maximizar

$$\mathcal{F}(x, y) = I_{zz}^2\sigma_{eq}^2(x, y)$$

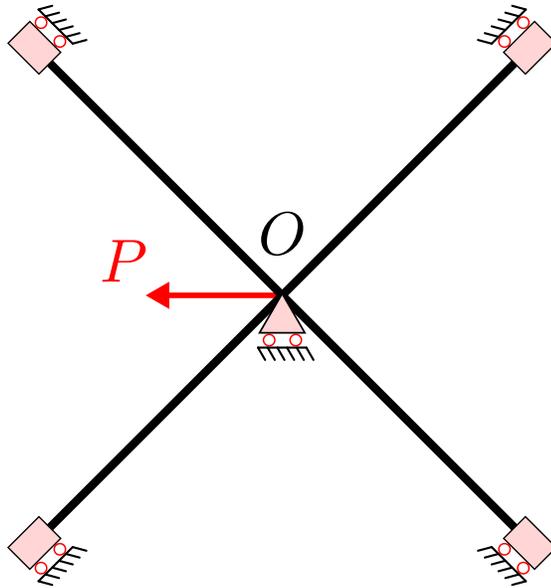
teniendo en cuenta que optimizar σ_{eq} es equivalente maximizar σ_{eq}^2 .

$$\mathcal{F}(x, y) = M_z^2(x)y^2 + \frac{3}{4}V_y^2(x)\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right)^2$$

Así, el enunciado del problema de optimización es

$\text{máx } \mathcal{F}(x, y) = M_z^2(x)y^2 + \frac{3}{4}V_y^2(x)\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right)^2$ <p>Sujeto a (s.a.)</p> $0 \leq x \leq L$ $-a/2 \leq y \leq a/2$

5. Se tiene la estructura de vigas representada en la figura, sometida a una carga horizontal de valor P en el centro. Todas las vigas tienen igual longitud L .



Se pide:

- Orden de hiperestaticidad de la estructura
- Ecuación de la elástica de la viga
- Desplazamiento horizontal del punto central O (positivo hacia la izquierda)
- Giro del punto central O (positivo en sentido antihorario)
- Representación gráfica (aproximada) de la deformada

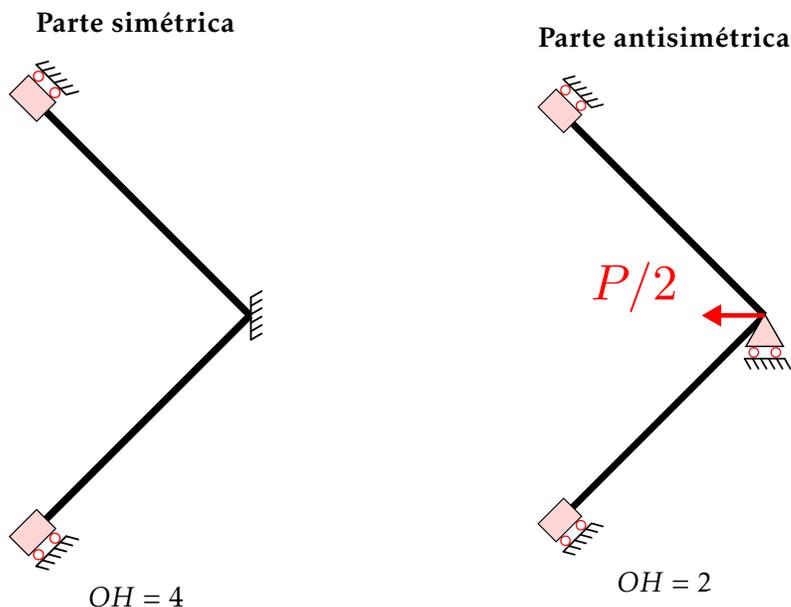
Solución

- a) Hay 9 incógnitas: cada carretilla introduce dos reacciones, mientras que el apoyo central introduce la reacción vertical i.e. $2 \times 4 + 1 = 9$, y 3 ecuaciones (las de equilibrio de la viga). Así,

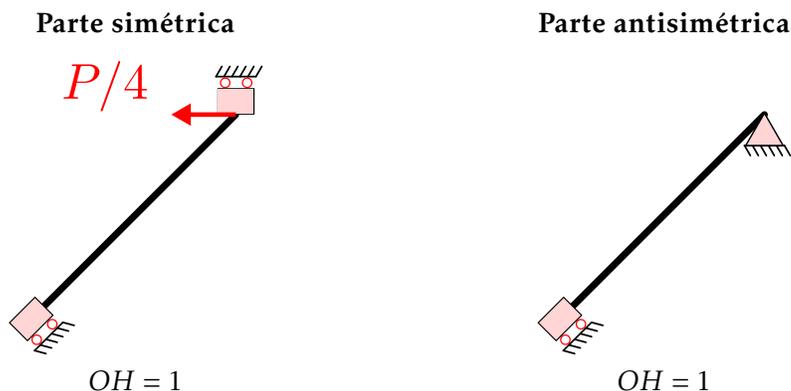
$$OH = 6$$

- b) Debido a la estructura y la carga aplicada, el problema presenta dos ejes de simetría: uno simétrico respecto al eje horizontal y otro antisimétrico respecto al eje vertical.

En primer lugar, se estudia la simetría del eje vertical (carga antisimétrica), que da lugar a las dos siguientes estructuras:



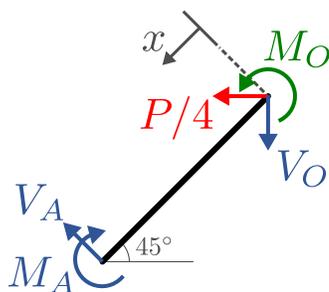
Como la parte antisimétrica está sin cargar, únicamente debe resolverse la parte antisimétrica (reduciendo así el orden de hiperestaticidad del problema de 6 a 2). En segundo lugar, se estudia la simetría del eje horizontal (carga simétrica), dando lugar a las siguientes dos estructuras:



Una vez más, sólo presenta reacciones no nulas una de las partes (en este caso, la simétrica), de orden de hiperestaticidad igual a 1.

Por lo tanto, nos centraremos en el tramo inferior izquierdo de la viga. Como tiene $OH = 1$, se escoge como incógnita hiperestática el momento de reacción en O (imponiendo posteriormente que el giro en dicha sección es nulo i.e. $\theta_O = 0$).

De este modo, el equilibrio estático se plantea de la siguiente manera:



donde se ha representado en verde la incógnita hiperestática. El equilibrio estático a lo largo del eje longitudinal de la viga proporciona que

$$V_O = -P/4$$

es decir, que el esfuerzo axil a lo largo de la viga es nulo. La ley de momento flector expresada con origen en O es

$$M_z(x) = M_O + \frac{Px}{2\sqrt{2}}$$

Para hallar la incógnita hiperestática, se utiliza el PTVC. Situando un momento virtual δM en O (en el sentido de M_O), la ley de momento flector que genera es

$$\delta M_z(x) = \delta M$$

En virtud del PTVC,

$$\delta M \cdot \theta_O = \int_0^L \frac{\delta M_z(x) M_z(x)}{EI_{zz}} dx$$

Por lo que, imponiendo la condición de compatibilidad $\theta_O = 0$,

$$\int_0^L \frac{\delta M \left(M_O + \frac{Px}{2\sqrt{2}} \right)}{EI_{zz}} dx = 0$$

$$M_O L + \frac{PL^2}{4\sqrt{2}} = 0; \quad M_O = -\frac{PL}{4\sqrt{2}}$$

La ley de momento flector es, por tanto,

$$M_z(x) = \frac{P}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

Conocida la ley de momento flector, la ecuación de la elástica a resolver, con las condiciones de contorno del problema es:

$$EI_{zz} v'' = M_z(x)$$

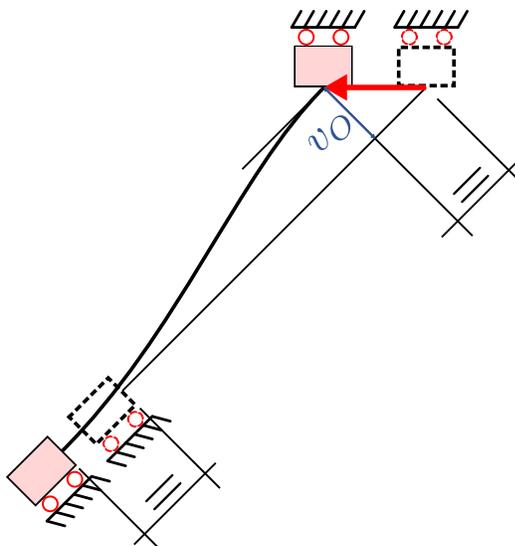
$$\begin{cases} v'(x=0) = 0 \\ v(x=L) = 0 \end{cases}$$

Así, la elástica del tramo inferior izquierdo de la viga es

$$v(\xi) = \frac{PL^3}{24\sqrt{2}EI_{zz}} (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)$$

con $\xi = x/L$. La elástica de la parte superior es simétrica respecto a la inferior, y la derecha es antisimétrica respecto a la izquierda.

El estado deformado final en dicho tramo se representa de la siguiente manera:



donde puede observarse que no hay variación longitudinal de la viga (ya que no hay esfuerzo axial) y que v_O es la flecha de la viga en su origen i.e. $v_O = v(x = 0)$.

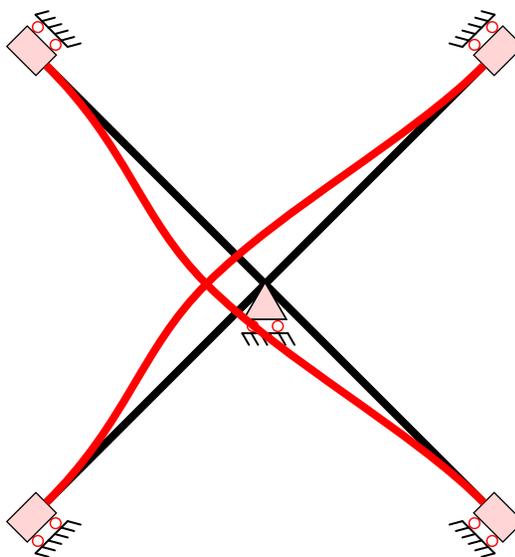
c) El desplazamiento horizontal hacia la izquierda Δ_O es (ver dibujo):

$$\Delta_O = \frac{v_O}{\cos 45} = \frac{PL^3}{24EI_{zz}}$$

d) El giro en el punto central O es nulo, por la doble condición de simetría:

$$\theta_O = 0$$

e) La deformada aproximada es



Aunque no se haya representado en el dibujo, el desplazamiento en el sentido longitudinal de las vigas está absorbido por los carritos (i.e. la viga no sufre deformación longitudinal, como se ha mencionado antes).

Parte VIII

Membranas y Pandeo

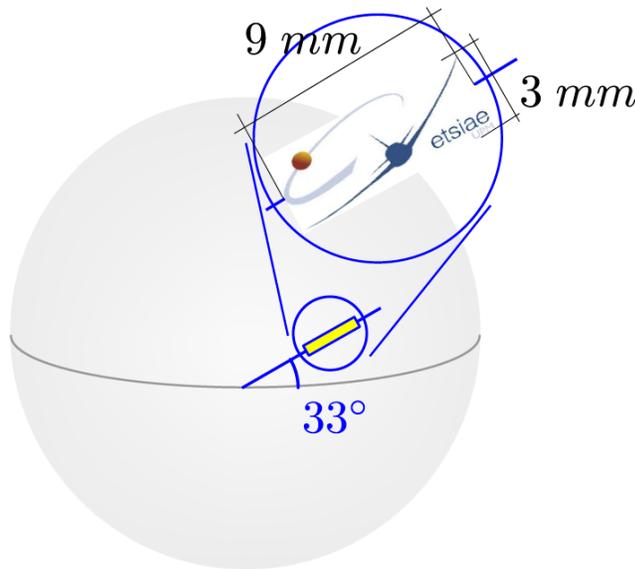
14. Membranas y Pandeo

14.1	Enunciados de ejercicios de Membranas	350
14.2	Solución de ejercicios de Membranas	351
14.3	Enunciados de ejercicios de Pandeo	355
14.4	Solución de ejercicios de Pandeo	357



14.1. Enunciados de ejercicios de Membranas

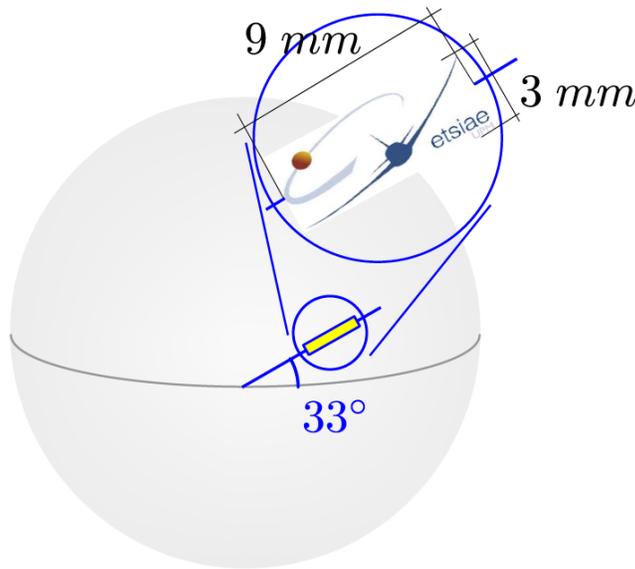
1. Un depósito esférico, está fabricado con un material isotrópico de coeficiente de Poisson, $\nu = 0,3$, módulo de Young, $E = 200 \text{ GPa}$ y coeficiente de dilatación lineal, $\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Las dimensiones del depósito son $R_{ext} = 175 \text{ mm}$ y su espesor, $t = 2 \text{ mm}$. Se introduce un fluido a presión en el depósito produciéndose una diferencia de presión respecto de la ambiente, Δp y constatándose un enfriamiento de 20°C . El efecto combinado de ambas acciones produce una variación del espesor del depósito $\Delta t = -2,58 \text{ } \mu\text{m}$. Considerando que $t/R_m \ll 1$, responda a las siguientes cuestiones:



- Determine la variación de presión Δp en MPa.
 - Determine el valor de la tensión tangencial máxima que se produce en el depósito MPa.
 - Determine el valor de la tensión tangencial en el plano del depósito (plano perpendicular a la dirección radial) en MPa.
 - Calcule el valor de la tensión de Von Mises en MPa.
 - Determinar la variación del área de una pegatina de $9 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$ adherida a la superficie y colocada formando un ángulo de 33° respecto al ecuador (despreciando los términos cuadráticos en deformaciones) exprésela en mm^2 .
2. La vasija a presión de un reactor nuclear, donde se almacenan las barras de uranio enriquecido usando agua para mantenerlas a una temperatura constante, que se convierte en vapor a presión, se puede modelar mediante un depósito cilíndrico cerrado de altura $h = 10 \text{ m}$, diámetro $D = 3 \text{ m}$, espesor $e = 5 \text{ cm}$, hecho de acero ($E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) que está sometido a una presión interna de 11 atm y una diferencia de temperatura 200 grados centígrados. Calcular la deformación leída en una galga extensométrica que está situada a 45° respecto a su eje y en el punto medio de la pared externa del recipiente.

14.2. Solución de ejercicios de Membranas

1. Un depósito esférico, está fabricado con un material isótropo de coeficiente de Poisson, $\nu = 0,3$, módulo de Young, $E = 200 \text{ GPa}$ y coeficiente de dilatación lineal, $\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Las dimensiones del depósito son $R_{ext} = 175 \text{ mm}$ y su espesor, $t = 2 \text{ mm}$. Se introduce un fluido a presión en el depósito produciéndose una diferencia de presión respecto de la ambiente, Δp y constatándose un enfriamiento de 20°C . El efecto combinado de ambas acciones produce una variación del espesor del depósito $\Delta t = -2,58 \text{ }\mu\text{m}$. Considerando que $t/R_m \ll 1$, responda a las siguientes cuestiones:



- Determine la variación de presión Δp en MPa.
- Determine el valor de la tensión tangencial máxima que se produce en el depósito MPa.
- Determine el valor de la tensión tangencial en el plano del depósito (plano perpendicular a la dirección radial) en MPa.
- Calcule el valor de la tensión de Von Mises en MPa.
- Determinar la variación del área de una pegatina de $9 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$ adherida a la superficie y colocada formando un ángulo de 33° respecto al ecuador (despreciando los términos cuadráticos en deformaciones) expésela en mm^2 .

Solución

Debido a la hipótesis de pared delgada, es posible trabajar con el radio medio en lugar de con el radio exterior y el radio interior.

$$\frac{t}{R_m} \ll 1 \rightarrow R_{ext} \approx R_{int} \approx R_m = R_{ext} - \frac{t}{2}$$

Las ecuaciones constitutivas en ejes principales

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) + \alpha \cdot \Delta T \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) + \alpha \cdot \Delta T \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) + \alpha \cdot \Delta T\end{aligned}\quad (14.1)$$

Seccionando el depósito esférico por cualquier plano que pasa por el centro, es fácil ver que cualquier tensión en el plano del depósito esférico (plano perpendicular a la dirección radial) es igual, por tanto este plano es un plano de direcciones principales y en dicho plano $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Además, todas las direcciones de ese plano son principales y la dirección perpendicular a dicho plano también es principal. Debido a que se está considerando una depósito de pequeño espesor, $t/R_m \ll 1$, dicho problema es un problema de tensión plana (la tensión en la dirección radial es nula, $\sigma_3 = 0$)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = \varepsilon_2 &= \varepsilon = \frac{1-\nu}{E}\sigma + \alpha \cdot \Delta T \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_t = -2\frac{\nu}{E}\sigma + \alpha \cdot \Delta T\end{aligned}\quad (14.2)$$

Con la variación del espesor es posible determinar $\varepsilon_t = \frac{\Delta t}{t} = -0,00129$. Con la ecuación constitutiva para el eje 3, es posible determinar la tensión σ .

$$\sigma = -\frac{\varepsilon_t - \alpha \cdot \Delta T}{2\nu} \cdot E = 336,67 \text{ MPa}$$

Con la ecuación de equilibrio es posible determinar el Δp :

$$\sigma \cdot t \cdot 2\pi R_m = \Delta p \cdot \pi \cdot R_m^2 \rightarrow \Delta p = \frac{2 \cdot \sigma \cdot t}{R_m}$$

La tensión tangencial máxima se encuentra en un plano que forma 45° con el plano del depósito. Dicha tensión tangencial máxima es el resultado de un círculo de Mohr con tensiones principales 0 y σ :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2} = 168,33 \text{ MPa}$$

La tensión equivalente de Von Mises se calcula a través de la expresión:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = \sqrt{\sigma^2} = |\sigma| = 336,67 \text{ MPa}$$

La tensión tangencial en el plano del depósito es nula al tratarse de un plano de direcciones principales.

Para calcular el área de la pegatina antes y después de la deformación se utiliza la relación de que:

$$l_f = l_0 \cdot (1 + \varepsilon)$$

La pegatina tiene dos longitudes que son incrementadas, al encontrarse en un plano de direcciones principales, la pegatina experimenta una deformación idéntica en todas las direcciones. Definiendo como $l1_0$ y $l2_0$ las dos dimensiones iniciales de la pegatina:

$$A_0 = l1_0 \cdot l2_0; \quad A_f = l1_f \cdot l2_f = l1_0(1 + \varepsilon_1) \cdot l2_0(1 + \varepsilon_2) = l1_0 \cdot l2_0 \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)$$

$$A_f - A_0 = l1_0 \cdot l2_0 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) \approx l1_0 \cdot l2_0 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

Notar que se han despreciado los términos de segundo orden en deformaciones como se indica en el enunciado. En este caso, coinciden las direcciones principales de tensión y de deformación, por tanto, este plano es también un plano de direcciones principales en deformación $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

$$\varepsilon = \frac{1 - \nu}{E} \sigma + \alpha \cdot \Delta T = 0,0009$$

$$A_f - A_0 \approx l1_0 \cdot l2_0 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 2 \cdot l1_0 \cdot l2_0 \cdot \varepsilon = 0,04851 \text{ mm}^2$$

2. La vasija a presión de un reactor nuclear, donde se almacenan las barras de uranio enriquecido usando agua para mantenerlas a una temperatura constante, que se convierte en vapor a presión, se puede modelar mediante un depósito cilíndrico cerrado de altura $h = 10\text{ m}$, diámetro $D = 3\text{ m}$, espesor $e = 5\text{ cm}$, hecho de acero ($E = 200\text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\alpha = 12 \times 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) que está sometido a una presión interna de 11 atm y una diferencia de temperatura 200 grados centígrados. Calcular la deformación leída en una galga extensométrica que está situada a 45° respecto a su eje y en el punto medio de la pared externa del recipiente.

Solución

Primero se ha de comprobar que estamos ante un caso de pared delgada, por lo que se compara el espesor con el radio i.e.

$$\frac{e}{R} = \frac{0,05\text{ m}}{1,5\text{ m}} = \frac{1}{30}$$

Como $R/e > 20$, se puede aceptar la hipótesis de pared delgada. Por tanto, las tensiones longitudinal σ_{zz} y circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ son:

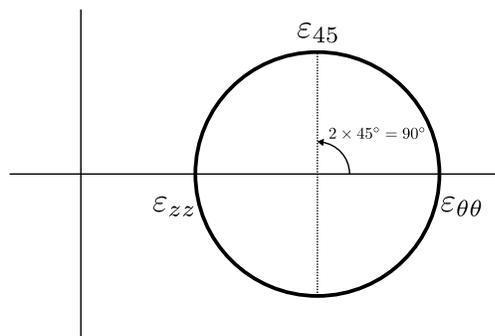
$$\sigma_{zz} = \frac{\Delta p R}{2e}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\Delta p R}{e},$$

donde $\Delta p = p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = 11\text{ atm} - 1\text{ atm} = 10\text{ atm} \approx 1\text{ MPa}$. Se comprueba que $\sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta}/2$. Las deformaciones, contando el efecto térmico, son:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

Viendo el círculo de Mohr, y sabiendo que ε_{zz} y $\varepsilon_{\theta\theta}$ son deformaciones principales, se obtiene que la lectura deseada a 45° es

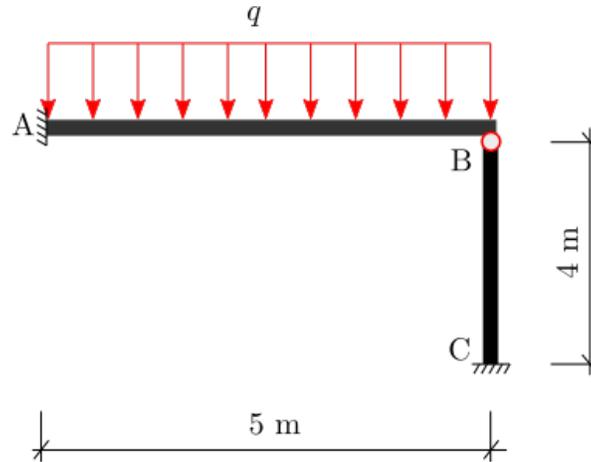


$$\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}}{2}$$

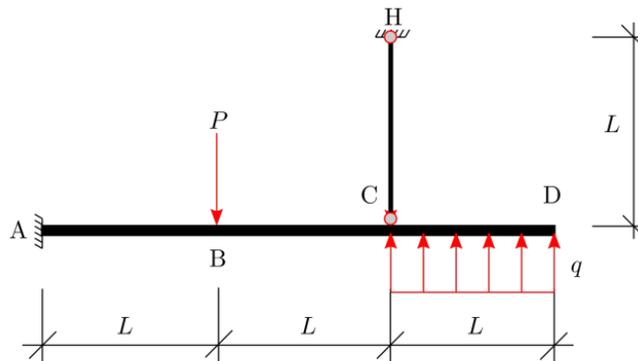
$$\varepsilon_{45} = \frac{3\Delta p R}{4Ee} (1 - \nu) + \alpha \Delta T = 2,48 \cdot 10^{-3}$$

14.3. Enunciados de ejercicios de Pandeo

1. Diseñar el soporte BC de la siguiente estructura (ver la figura), formado por dos perfiles UPN soldados por los dos extremos de sus alas, de tal forma que no se produce la inestabilidad elástica en el soporte BC. El material de los perfiles es de acero que tiene $E = 210 \text{ GPa}$. Considera que la deformación axial debido a la carga axial es despreciable. La carga distribuida es de 50 kN/m .



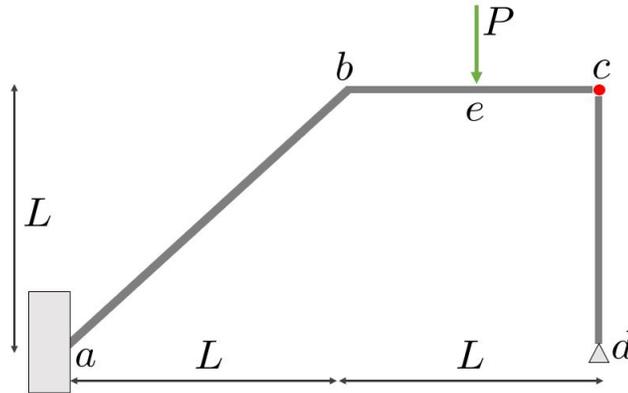
2. Dada la estructura como se muestra en la siguiente figura que se compone de una viga ABCD y una barra CH, conectado entre ellas en el punto C. La viga tiene una sección cuadrada de lado $a \text{ cm}$ y la barra tiene una sección rectangular cuyos lados miden $a \text{ cm}$ y $b \text{ cm}$, respectivamente. Los dos elementos son del mismo material que tiene el módulo de elasticidad E . Las cargas aplicadas sobre la estructura son las indicadas en la figura.



Se pide

- a) Determinar el momento de reacción en el punto A (kNm) (considérese positiva en sentido antihorario).
- b) Determinar el giro (mrad) en el punto B (valor positivo en sentido antihorario partiendo del eje longitudinal de la viga).

- c) Determinar la tensión axial máxima en la estructura completa (MPa) (en valor absoluto).
- d) Determinar el valor de q (kN/m) que produce pandeo (suponiendo la viga con rigidez axial infinita).
3. El pórtico de la figura está empotrado en el punto a y apoyada de manera fija en el punto d . La estructura es una viga continua de sección circular con una rótula en el punto c y una carga aplicada P .

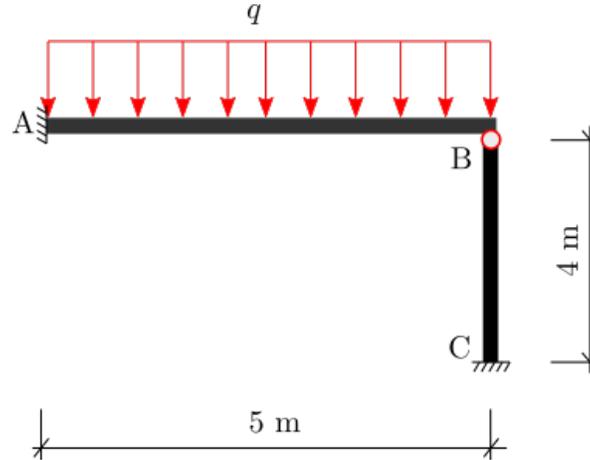


Considerando que todas las vigas tienen el mismo área, inercia y rigidez (A , E , I), se pide:

- a) Calcular la carga máxima P que puede asumir la estructura sin que se produzca pandeo en la viga $c - d$. Para ello se puede asumir que la rigidez que aporta la estructura a la barra es infinita.

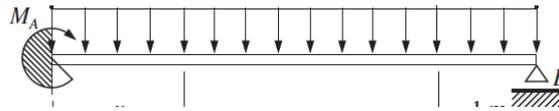
14.4. Solución de ejercicios de Pandeo

1. Diseñar el soporte BC de la siguiente estructura (ver la figura), formado por dos perfiles UPN soldados por los dos extremos de sus alas, de tal forma que no se produce la inestabilidad elástica en el soporte BC. El material de los perfiles es de acero que tiene $E = 210 \text{ GPa}$. Considera que la deformación axial debido a la carga axial es despreciable. La carga distribuida es de 50 kN/m .



Solución

Se ha considerado que la deformación axial debido a la carga axial es despreciable, por tanto se puede considerar que el punto B no mueve verticalmente si la columna BC no se pandea. Por eso, podemos transformar la estructura a la siguiente estructura:



Aplicamos el método de compatibilidad, es decir, convierte la estructura hiperestática a una estructura isostática por suprimir el apoyo en B por la fuerza incógnita V_B ,

La ley de momento flector debido a la carga distribuida:

$$M_I = qLx - \frac{qx^2}{2} - \frac{qL^2}{2}$$

Ley de momento flector debido a la carga virtual aplicada sobre el punto B en la dirección de V_B :

$$\delta M = L - x$$

La ley de momento flector debido a la carga distribuida y fuerza incógnita hiperestática:

$$M = M_I + V_B \delta M$$

El trabajo virtual complementario interno:

$$\delta W_{int}^C = \int_0^L \frac{\delta M M}{EI} dx = \int_0^L \frac{\delta M M_I}{EI} dx + V_B \int_0^L \frac{\delta M^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(-\frac{qL^4}{8} + \frac{V_B L^3}{3} \right)$$

Este trabajo virtual interno debe ser igual que el trabajo virtual externo $\delta W_{ext}^C = \delta P v_B = 0$, por tanto, tenemos

$$V_B = \frac{3qL}{8} = 93,75 \text{ kN}$$

Esta fuerza es la que actúa sobre el soporte BC, cuya longitud de pandeo, por tratarse de barra empotrada-articula, es:

$$L_p = \frac{L}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

La carga crítica para que se produzca el pandeo será:

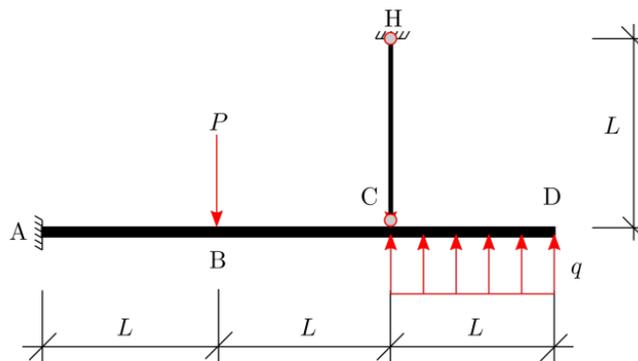
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_p^2}$$

y esta carga debe ser mayor que la carga que llega al soporte para que este soporte no se produce el pandeo, o sea:

$$I_{min} = \frac{93,75 * L_p^2}{\pi^2 E} = 36,23 \text{ cm}^4$$

La sección del soporte se forma por dos perfiles UPN soldados por los dos extremos de sus alas, por tanto, el perfil que se ajusta con el momento de inercia mínimo es el UPN 80.

2. Dada la estructura como se muestra en la siguiente figura que se compone de una viga ABCD y una barra CH, conectado entre ellas en el punto C. La viga tiene una sección cuadrada de lado a cm y la barra tiene una sección rectangular cuyos lados miden a cm y b cm, respectivamente. Los dos elementos son del mismo material que tiene el módulo de elasticidad E . Las cargas aplicadas sobre la estructura son las indicadas en la figura.

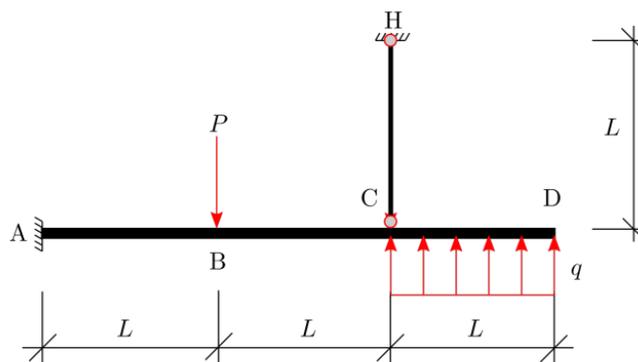


Se pide

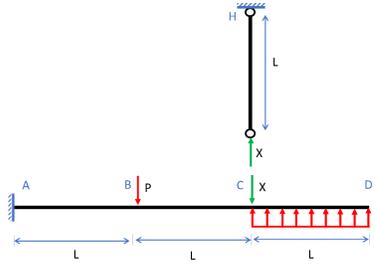
- Determinar el momento de reacción en el punto A (kNm) (considérese positiva en sentido antihorario).
- Determinar el giro (mrad) en el punto B (valor positivo en sentido antihorario partiendo del eje longitudinal de la viga).
- Determinar la tensión axial máxima en la estructura completa (MPa) (en valor absoluto).
- Determinar el valor de q (kN/m) que produce pandeo (suponiendo la viga con rigidez axial infinita).

Solución

El problema tiene un O.H. de 1 al no tener fuerzas horizontales y estar formado por una viga y una barra



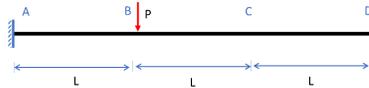
Separando la viga de la barra y añadiendo una reacción ahí, que será nuestra variable hiperestática X , obtenemos



Aplicando el principio de superposición podemos separar el problema en tres casos elementales.

Caso I

El caso I considera solo la carga P



Considerando las reacciones en el empotramiento dibujadas como positivas, tenemos que el momento en la reacción es

$$M_A^I = PL \quad (14.3)$$

Y la ley de esfuerzos flectores

$$M^I(x) = -PL + PX \quad x < L \quad (14.4)$$

Caso II

El caso II considera solo la carga distribuida q de $2L$ a $3L$



El momento en el punto A es

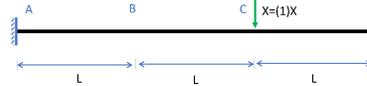
$$M_A^{II} = -\frac{5}{2}qL^2 \quad (14.5)$$

Y la ley de esfuerzos flectores

$$M^{II} = \begin{cases} \frac{5}{2}qL^2 - qLx & x < 2L \\ \frac{5}{2}qL^2 - qLx + q\frac{(x-2L)^2}{2} & 2L < x < 3L \end{cases} \quad (14.6)$$

Caso III

El caso III considera solo la carga X , que es la variable hiperestática, la construimos al mismo tiempo que un momento virtual.



El momento en el punto A es

$$M_A^{III} = 2XL \quad (14.7)$$

la ley de esfuerzos flectores virtuales es

$$\delta m(x) = -2L + x \quad x < 2L \quad (14.8)$$

y para la variable hiperestática

$$M^{III}(x) = X\delta m(x) = (-2L + x)X \quad x < 2L \quad (14.9)$$

La ley de esfuerzos flectores en la estructura es así:

$$M(x) = M^I(x) + M^{II}(x) + M^{III}(x) \quad (14.10)$$

Planteemos ahora la ecuación de compatibilidad, que estará dada por el desplazamiento en el punto C, para lo que hemos calculado una ley de flectores virtuales en el caso III, así dicho desplazamiento aplicando el PTV-CMCU es:

$$v_C = \int \frac{\delta m M(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{5}{6}PL^3 - \frac{11}{3}qL^4 + \frac{8}{3}XL^3 \right) \quad (14.11)$$

El desplazamiento axial de la barra es:

$$v_C = \frac{NL}{EA} = \frac{-XL}{EA} \quad (14.12)$$

ambos desplazamientos deben coincidir y esa es nuestra ecuación de compatibilidad, sabiendo $I = \frac{a^4}{12}$ y $A = ab$, despejamos X como:

El desplazamiento axial de la barra es:

$$X = \frac{44qL^3 - 10PL^2}{32L^2 + \frac{a^3}{b}} \quad (14.13)$$

Una vez conocido el valor de X, podemos resolver el resto de los apartados

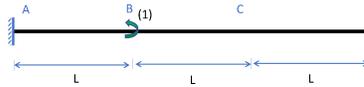
a)

El momento de reacción en el punto A viene dado por:

$$M_A = M_A^I + M_A^{II} + M_A^{III} = PL - \frac{5}{2}qL^2 + 2XL \quad (14.14)$$

b)

Para calcular el giro aplicamos un momento virtual unitario en el punto B



que nos daría el siguiente esfuerzo flector virtual

$$\delta m(x) = 1 \quad x < L \quad (14.15)$$

Así el giro es

$$\theta_B = \int \frac{\delta m M(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} dx = \frac{L^2}{EI} \left(2qL - \frac{P}{2} - \frac{3X}{2} \right) \quad (14.16)$$

c)

La máxima tensión axial es la máxima de las tensiones axiales en la viga y en la barra, en la viga será en las zonas con máximo flector según la ley de Navier, donde $\frac{v_{max}}{I} = \frac{6}{a^3}$. Así, observando las leyes de flectores, la tensión axial máxima será la máxima de los siguientes valores:

$$\sigma^A = \left| \left[-Pl + \frac{5}{2}qL^2 - 2XL \right] \frac{6}{a^3} \right| \quad (14.17)$$

$$\sigma^B = \left| \left[\frac{3}{2}qL^2 - XL \right] \frac{6}{a^3} \right| \quad (14.18)$$

$$\sigma^C = \left| \left[\frac{qL^2}{2} \right] \frac{6}{a^3} \right| \quad (14.19)$$

$$\sigma^{CH} = \left| \frac{X}{ab} \right| \quad (14.20)$$

d)

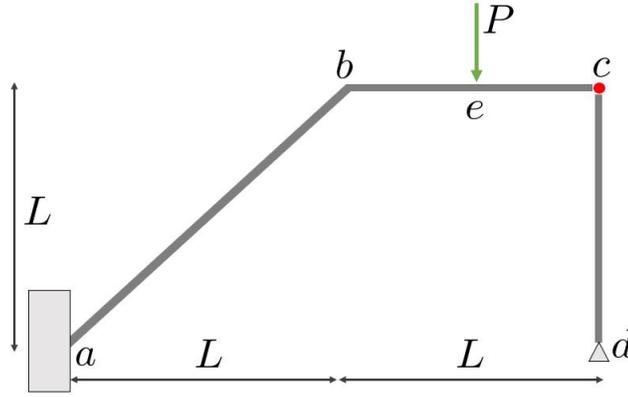
Como la estructura se supone de rigidez infinita, la barra se comporta como un pilar articulado-articulado, y si a es menor que b, la carga critica viene dada por:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E b a^3}{12L^2} = X \quad (14.21)$$

En la expresión de donde hemos obtenido X, podemos sustituir X por este valor y despejar q, obteniéndose

$$q = \frac{a^3}{44L^3} \left[P_{crit} \left(\frac{32L^2}{a^3} + \frac{1}{b} \right) + \frac{10PL^2}{a^3} \right] \quad (14.22)$$

3. El pórtico de la figura está empotrado en el punto a y apoyada de manera fija en el punto d . La estructura es una viga continua de sección circular con una rótula en el punto c y una carga aplicada P .



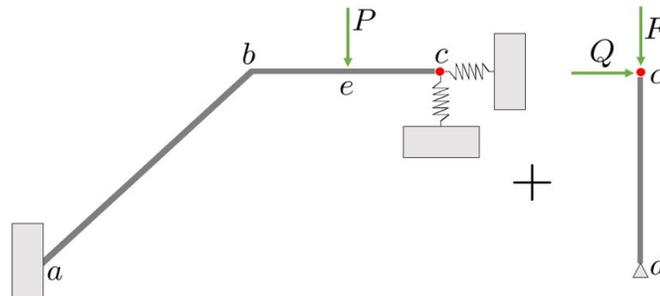
Considerando que todas las vigas tienen el mismo área, inercia y rigidez (A , E , I), se pide:

- a) Calcular la carga máxima P que puede asumir la estructura sin que se produzca pandeo en la viga $c-d$. Para ello se puede asumir que la rigidez que aporta la estructura a la barra es infinita.

Solución

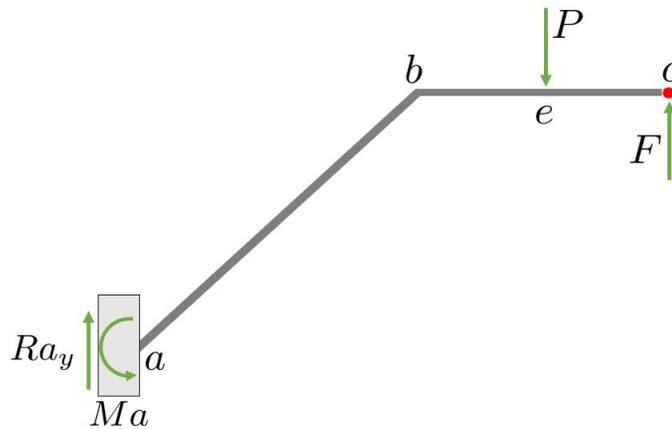
En primer lugar estudiamos el orden de hiperestaticidad de la estructura. Tenemos 5 incógnitas (reacciones en ambos apoyos) y 3 ecuaciones (equilibrio global de momentos y fuerzas). Pero al aplicar equilibrio de fuerzas en x , podemos definir que las reacciones horizontales en ambos apoyos son las dos nulas. Con ello tendremos 2 ecuaciones (equilibrio de momento y fuerza vertical) y tres incógnitas (reacciones de momento y fuerza vertical en a y la reacción vertical en d). Así, el grado de hiperestaticidad es $\text{OH}=1$.

Lo primero que vamos a hacer es dividir la estructura por la rótula de esta forma:



Analizando las dos partes, podemos determinar que sólo la fuerza F va a generar un axil, y que Q va a ser nulo. Para ello calculamos el momento flector en el apoyo d y aplicamos la condición de la rótula por la cual se hace nulo. Posteriormente aplicaremos compatibilidad entre ellas, lo que quiere decir que en c debe de haber compatibilidad de desplazamientos y fuerzas a ambos lados.

La parte izquierda sigue siendo una estructura de $OH=1$, por lo que vamos a sustituir el muelle (restricción de movimiento) por una fuerza y una condición de contorno. Esto mismo lo podríamos realizar con cualquier restricción para transformar la estructura en una isostática equivalente. En este caso la condición de contorno será que la flecha en c está relacionada con la fuerza F mediante la ley de Hooke del muelle:



Aquí, resolvemos la estructura isostática, obteniendo:

$$Ra_y = P - F \tag{14.23}$$

$$Ma = \frac{3LP}{2} - 2LF \tag{14.24}$$

Una vez obtenidas las reacciones calculamos los esfuerzos flectores en cada tramo. En el tramo $a - b$ el momento flector será:

$$Mf_z(x) = -P\left(x - \frac{3L}{2}\right) + F(2L - x) \tag{14.25}$$

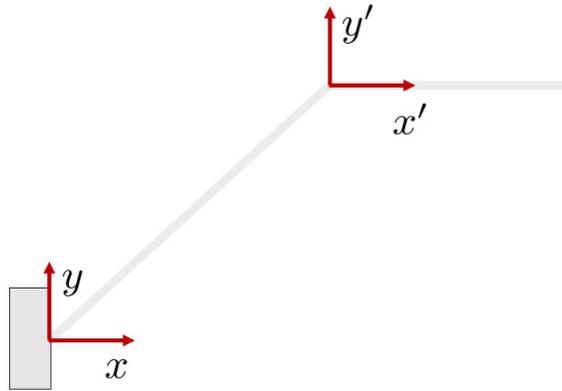
Y en el tramo $c - e$:

$$Mf_z(x') = -P\left(\frac{L}{2} - x'\right) + F(L - x') \tag{14.26}$$

Y en el tramo $e - c$:

$$Mf_z(x') = F(L - x') \quad (14.27)$$

En este segundo tramo usamos un sistema local de coordenadas, pero sería equivalente a usar el sistema global de coordenadas como $Mf_z(x) = F(2L - x)$, haciendo el cambio de variable $x' = x - L$. Ambos son equivalentes y depende de lo que sea más cómodo en cada caso.



Ahora, una vez calculados los esfuerzos flectores, necesitamos aplicar la condición de contorno en c , para lo cual calculamos el desplazamiento vertical en c .

Para ello tenemos varias opciones, la primera es usar Castigliano para calcular el desplazamiento de c derivando la energía elástica del sistema con respecto a F . La energía interna es la suma de la energía elástica de cada tramo donde hemos definido el esfuerzo flector:

$$U_1 = \frac{1}{2} \left(\int_0^L [P(x - (3L)/2 + F(2L - x))]^2 \sqrt{2} dx / EI \right) \quad (14.28)$$

$$U_1 = \sqrt{2} L^3 (28F^2 - 38FP + 13P^2) / (24EI) \quad (14.29)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \left(\int_0^{L/2} [-P(L/2 - x') + F(L - x')]^2 dx' / EI \right) \quad (14.30)$$

$$U_2 = L^3 (7F^2 - 5FP + P^2) / (48EI) \quad (14.31)$$

$$U_3 = \frac{1}{2} \left(\int_{L/2}^L [F(L - x')]^2 dx' / EI \right) \quad (14.32)$$

$$U_3 = F^2 L^3 / (48EI) \quad (14.33)$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (14.34)$$

Y el desplazamiento de c en la dirección de F será:

$$v_c = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{L^3(112\sqrt{2}F - 76\sqrt{2}P + 16F - P)}{48EI} \quad (14.35)$$

Otra opción es aplicar el principio de trabajos virtuales, para lo cual necesitamos un estado virtual con una carga unitaria aplicada donde queremos aplicar el desplazamiento. En este caso esa carga unitaria estará situada donde está F , con su sentido. En este caso las leyes de esfuerzos serán iguales a las que hemos calculado antes haciendo $P = 0$ y $F = 1$. Con ello aplicamos el PTV:

$$\delta F v_c = \int_a^b \delta M f_z(x) \chi(x) dx + \int_b^e \delta M f_z(x) \chi(x) dx + \int_e^c \delta M f_z(x) \chi(x) dx \quad (14.36)$$

Con $\delta F = 1$ tenemos:

$$v_c = \frac{L^3(112\sqrt{2}F - 76\sqrt{2}P + 16F - P)}{48EI} \quad (14.37)$$

Que es el mismo resultado obtenido por Castigliano previamente. Ahora aplicamos la condición de contorno, que es $F = kv_c$. Sustituyendo F en v_c desajamos F .

$$F = \frac{L^3 P (76\sqrt{2} + 5)k}{(112\sqrt{2} + 16)kL^3 + 48EI} \quad (14.38)$$

Según la división que hemos hecho de la estructura, esta F calculada es el axil del tramo $c - d$, lo que necesitamos calcular es la carga crítica de pandeo de esa barra. Como la sección es circular, la inercia mínima es la misma que hemos usado anteriormente (cualquier eje tiene la misma inercia). Las condiciones de contorno es apoyo fijo en ambos extremos, ya que podemos asumir que la estructura tiene una rigidez horizontal infinita. Con ello, la carga crítica será:

$$F_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (14.39)$$

Igualando esto a F , despejamos P :

$$P = \frac{112(k(\sqrt{2} + 1/7)L^3 + (3EI)/7)\pi^2 EI}{L^5(76\sqrt{2} + 5)k} \quad (14.40)$$

Ahora, lo que queda por calcular es el valor de k , este vendrá de compatibilizar el movimiento de c en el tramo $c-d$. Así, el axil de la barra se relacionará con el desplazamiento vertical de c como:

$$N = F = \frac{v_c EA}{L} \quad (14.41)$$

Por lo que:

$$k = \frac{EA}{L} \quad (14.42)$$

Parte IX

Cálculo de Estructuras

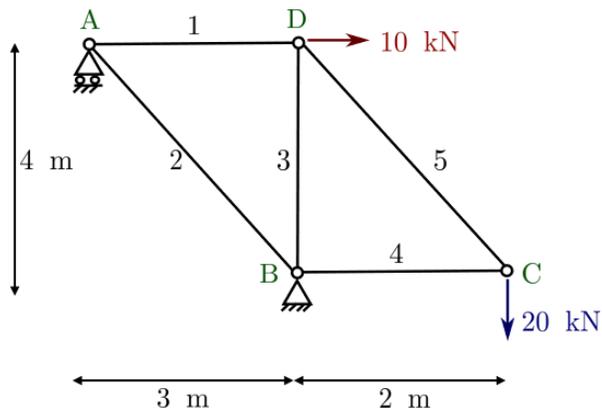
15. Cálculo de Estructuras

- 15.1 Enunciados de ejercicios de Cálculo de Estructuras 371
- 15.2 Solución de ejercicios de Cálculo de Estructuras 372



15.1. Enunciados de ejercicios de Cálculo de Estructuras

1. Para la estructura de la figura:

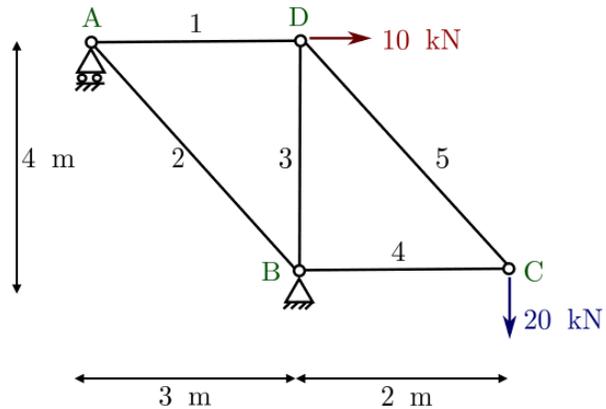


- a) Orden de hiperestaticidad de la estructura.
- b) Valor de las reacciones.
- c) Axiles de las barras.
- d) Tensión de las barras a compresión.
- e) Alargamientos de las barras 2 y 4.
- f) ¿Cuál sería el valor de la barra 2 para que la tensión sea como máximo de 275 MPa?.

Datos: $A_1 = 10 \text{ mm}^2$, $A_2 = 20 \text{ mm}^2$, $A_3 = 30 \text{ mm}^2$, $A_4 = 40 \text{ mm}^2$,
 $A_5 = 50 \text{ mm}^2$, $E = 210 \text{ GPa}$

15.2. Solución de ejercicios de Cálculo de Estructuras

1. Para la estructura de la figura:



- Orden de hiperestaticidad de la estructura.
- Valor de las reacciones.
- Axiles de las barras.
- Tensión de las barras a compresión.
- Alargamientos de las barras 2 y 4.
- ¿Cuál sería el valor de la barra 2 para que la tensión sea como máximo de 275 MPa?.

Datos: $A_1 = 10 \text{ mm}^2$, $A_2 = 20 \text{ mm}^2$, $A_3 = 30 \text{ mm}^2$, $A_4 = 40 \text{ mm}^2$,
 $A_5 = 50 \text{ mm}^2$, $E = 210 \text{ GPa}$

Solución

- a) Orden de hiperestaticidad de la estructura.**

El orden de hiperestaticidad se calculará utilizando la siguiente formula para estructuras articuladas:

$$\text{o.h.} = \text{Barras} - 2 \cdot \text{Nudos} + \text{Reacciones} = 5 - 2 \cdot 4 + 3 = 0$$

La estructura es isostática al ser su o.h.=0.

- b) Valor de las reacciones.**

Determinación de los ángulos α y β :

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{3}{4} \rightarrow \alpha = 36,86^\circ$$

$$\text{tg}(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{3}{4} \rightarrow \beta = 63,43^\circ$$

Las reacciones se determinaran utilizando las ecuaciones de equilibrio globales en la estructura.

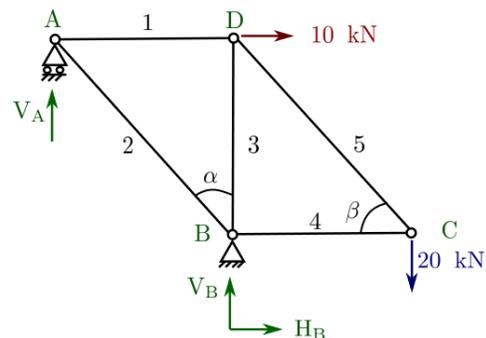
$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_B + 10 = 0 \rightarrow \boxed{H_B = -10}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_A + V_B = 20 \rightarrow V_B = 20 + \frac{80}{3}$$

$$\boxed{V_B = \frac{140}{3}}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -3 \cdot V_A - 2 \cdot 20 - 4 \cdot 10 = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{V_A = \frac{-80}{3}}$$



c) **Axiles de las barras.**

Para resolver la estructura articulada de manera eficiente hay que ir planteando las ecuaciones de equilibrio en aquellos nudos donde el numero de barras desconocidas (incógnitas) sea 2. Analizando la estructura sería conveniente comenzar siguiendo el orden (Nudo C, Nudo D ó nudo B, Nudo A).

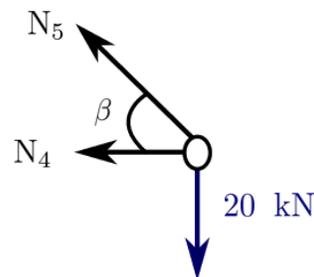
Nudo C:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_4 - N_5 \cos \beta = 0 \rightarrow N_4 = N_5 \cos \beta$$

$$\boxed{N_4 = -10 \text{ kN}} \quad \text{Compresión}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -20 + N_5 \sin \beta = 0$$

$$\boxed{N_5 = 22,36 \text{ kN}} \quad \text{Tracción}$$



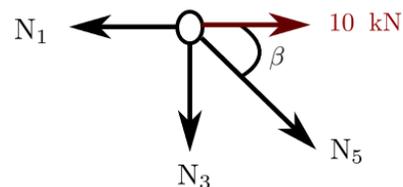
Nudo D:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_1 + 10 + N_5 \cos \beta = 0$$

$$\boxed{N_1 = 20 \text{ kN}} \quad \text{Tracción}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -N_3 + N_5 \sin \beta = 0$$

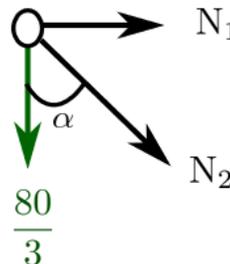
$$\boxed{N_3 = -20 \text{ kN}} \quad \text{Compresión}$$



Nudo A:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -N_2 \cos \alpha - \frac{80}{3} = 0$$

$$\boxed{N_2 = -\frac{80}{3} \text{ kN}} \quad \text{Compresión}$$



d) **Tensión de las barras a compresión.**

Las barras que trabajan a compresión son la 2,3,4. La tensión de una barra se define por la fórmula siguiente:

$$\sigma_{\text{Barra}} = \frac{N_{\text{Barra}}}{A_{\text{Barra}}}$$

Especificando para cada una de las barras:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \boxed{-1333,33 \text{ (MPa)} = \sigma_2}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \boxed{-666,67 \text{ (MPa)} = \sigma_3}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \boxed{-250 \text{ (MPa)} = \sigma_4}$$

e) **Alargamientos de las barras 2 y 4.**

El alargamiento de las barra 2 y 4 se calculan utilizando la fórmula siguiente:

$$\Delta L_{\text{Barra}} = \frac{N_{\text{Barra}} L_{\text{Barra}}}{EA_{\text{Barra}}}$$

Especificando para cada una de las barras:

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{EA_2} = \boxed{-0,0396 \text{ (m)} = \Delta L_2}$$

$$\Delta L_4 = \frac{N_4 L_4}{EA_4} = \boxed{-2,38 \cdot 10^{-3} \text{ (m)} = \Delta L_4}$$

f) **¿Cuál sería el valor de la barra 2 para que la tensión sea como máximo de 275 MPa?.**

Para la barra 2 se impone una tensión menor de 275 MPa.

$$|\sigma_2| \leq 275 \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \leq 275 \text{ (MPa)} \quad \boxed{A_2 = 121,21 \text{ (mm}^2\text{)}}$$

Parte X

Cálculo Matricial

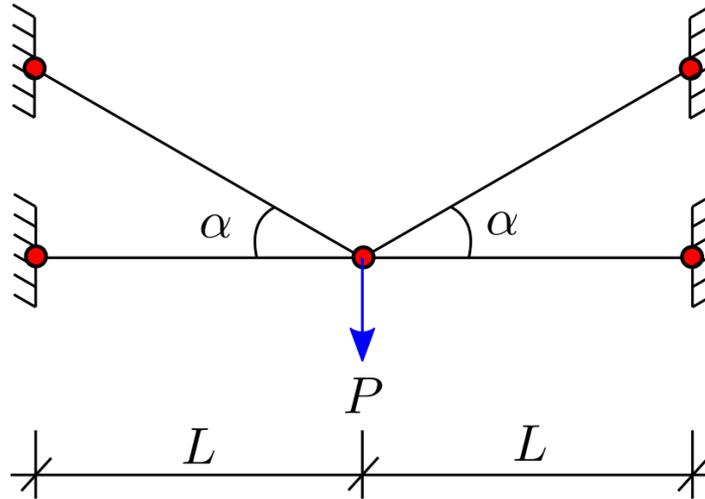
16. Cálculo Matricial

16.1	Enunciados de ejercicios de Cálculo Matricial	377
16.2	Solución de ejercicios de Cálculo Matricial	383



16.1. Enunciados de ejercicios de Cálculo Matricial

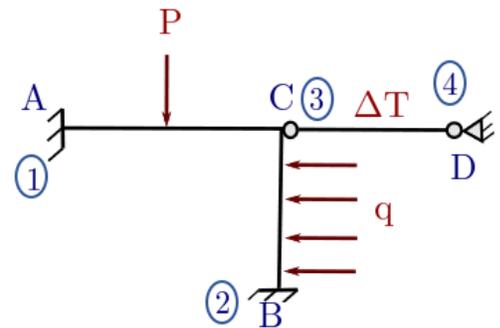
1. Dada una estructura de barras sometida a la carga como se muestra en la siguiente figura. Los datos son: $E = 70 \text{ GPa}$, $A = 100 \text{ mm}^2$, $L = 1 \text{ m}$ y $\alpha = 30^\circ$



Resolviendo el problema con el método de cálculo matricial, se pide:

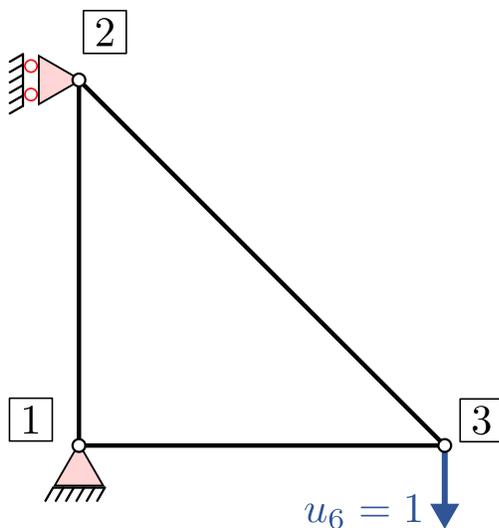
- a) Determinar el desplazamiento vertical en el punto de aplicación de la carga.
- b) Determinar los axiles en las barras.

2. Calcular el campo de desplazamientos en el punto C de la siguiente estructura sabiendo que la carga P está situada en la mitad de la barra AC. Obtener también dicho campo de desplazamientos utilizando MATLAB.



Datos: $L_{AB} = L_{BC} = L_{CD} = 3 \text{ m}$; $A_{AB} = A_{BC} = A_{CD} = 100 \text{ cm}^2$; $E = 70 \text{ GPa}$;
 $I_{AB} = I_{BC} = 4000 \text{ cm}^4$; $P = 5000 \text{ N}$; $q = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$; $\Delta T = 30^\circ\text{C}$; $\alpha = 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

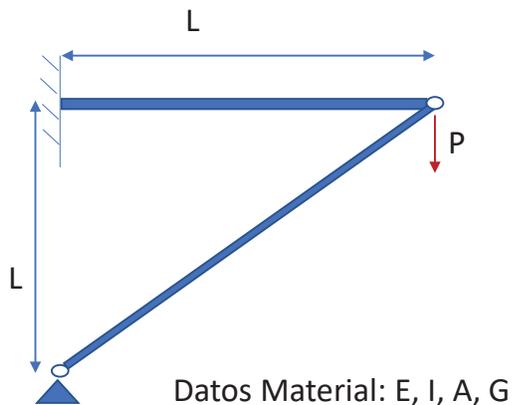
3. Considérese la estructura de barras a la que se ha impuesto un desplazamiento unitario $u_6 = 1$ en uno de sus nodos, tal y como se muestra en la siguiente figura. La longitud de las barras horizontal y vertical es L.



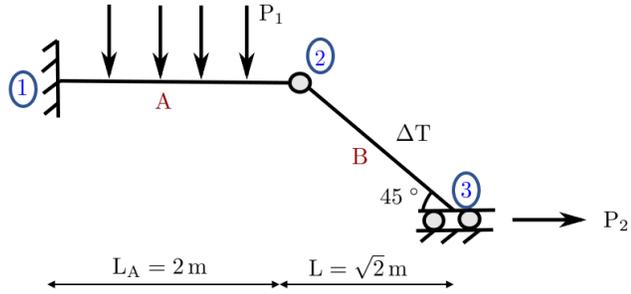
Utilizando el cálculo matricial (idealización de barras), obtener:

- Matrices global K y reducida por las condiciones de contorno K_{ff} de la estructura
- Obtener la fuerza según el grado de libertad 6 que provoca el desplazamiento unitario
- Determinar las reacciones

4. Plantear el siguiente problema mediante cálculo matricial

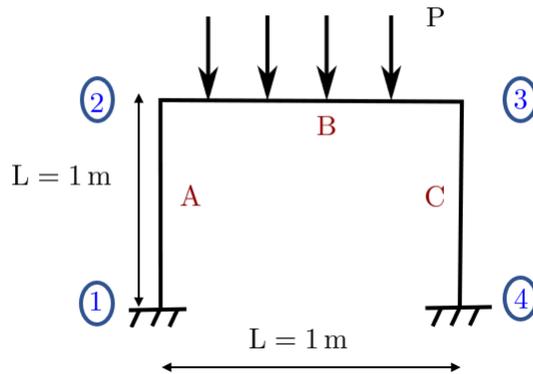


- Utilizando el cálculo matricial de la rigidez, determinar el campo de desplazamientos de la estructura. Obtener también dicho campo de desplazamientos utilizando MATLAB.
- 5.



Datos: $L_A = 2 \text{ m}$; $L = \sqrt{2} \text{ m}$; $A_A = A_B = 100 \text{ cm}^2$; $E = 70 \text{ GPa}$; $I_A = I_B = 4000 \text{ cm}^4$; $P_2 = 50 \text{ kN}$; $P_1 = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$; $\Delta T = 50^\circ\text{C}$; $\alpha = 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

6. Usando MATLAB, calcular el campo de desplazamientos y las fuerzas de empotramiento (Reacciones) de la estructura.

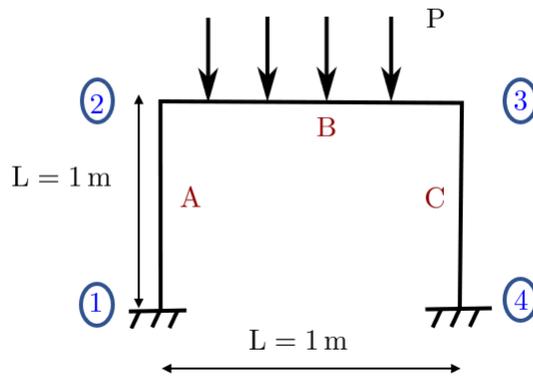


Datos: $L_A = L_B = L_C = 1 \text{ m}$; $A_A = A_B = A_C = 200 \text{ cm}^2$; $E = 210 \text{ GPa}$;

$I_A = I_B = I_C = 900000 \text{ cm}^4$; $P = 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

7. Calcular y dibujar el diagrama de esfuerzos de cada una de las barras de la estructura conocido el campo de desplazamientos de la misma.

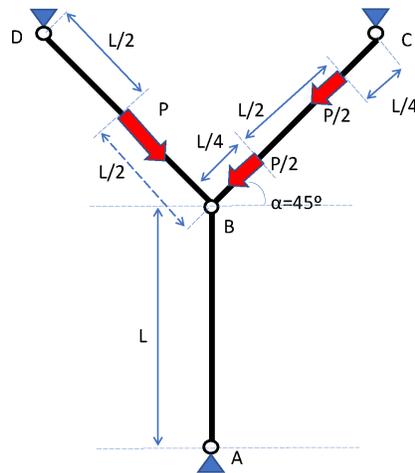
$$u^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; u^{(2)} = \begin{bmatrix} 10^{-4} \text{ mm} \\ -2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \\ 0 \text{ rad} \end{bmatrix}; u^{(3)} = \begin{bmatrix} -10^{-4} \text{ mm} \\ -2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \\ 0 \text{ rad} \end{bmatrix}; u^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Datos: $L_A = L_B = L_C = 1 \text{ m}$; $A_A = A_B = A_C = 200 \text{ cm}^2$; $E = 210 \text{ GPa}$;

$$I_A = I_B = I_C = 900000 \text{ cm}^4; \quad P = 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

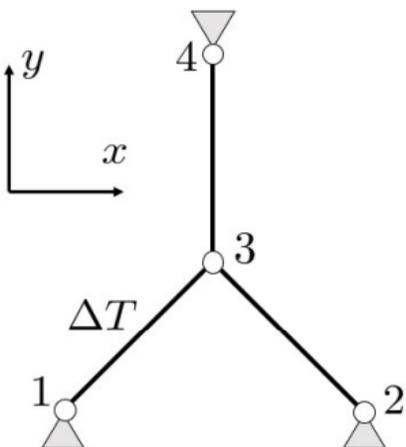
8. En la figura se presenta una estructura de barras con varias fuerzas. cada barra tiene una longitud $L=1 \text{ m}$, un modulo de Young $E=1 \text{ MPa}$ y un Área $A=0.2 \text{ cm}^2$. Las cargas vienen definidas por $P=5 \text{ N}$.
Los grados de libertad de cada nodo son $A=(1,2)$, $B=(3,4)$, $C=(5,6)$, $D=(7,8)$.



Se pide:

- La matriz de rigidez en ejes locales del elemento que va del nodo B al C (N/m).
- La matriz de rigidez en ejes globales de toda la estructura (N/m).
- Vector global de fuerzas externas (en GDL libres) (N).
- Vector global de desplazamientos (m).
- Fuerzas de reacción en el nodo A (N)

9. La estructura de la figura está formada por 3 barras articuladas, todas con la misma longitud L , rigidez E y área A . La barra 3-4 es vertical, y las barras 1-3 y 2-3 forman 45° con la horizontal. La barra 1-3 está sometida a un incremento térmico que solicita a toda la estructura.

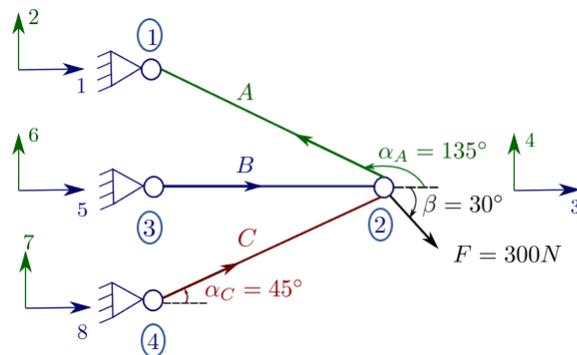


Se pide:

- Orden de hiperestaticidad de la estructura.
- Número de grados libres.
- Matriz de rigidez reducida.
- Vector de fuerzas nodales reducido.
- Desplazamiento x e y del nudo 3.
- Axil de la barra 2-3, considerando las tracciones positivas y las compresiones negativas.
- Reacción vertical en el apoyo del nodo 4.
- Reacción horizontal total en el apoyo del nodo 1.

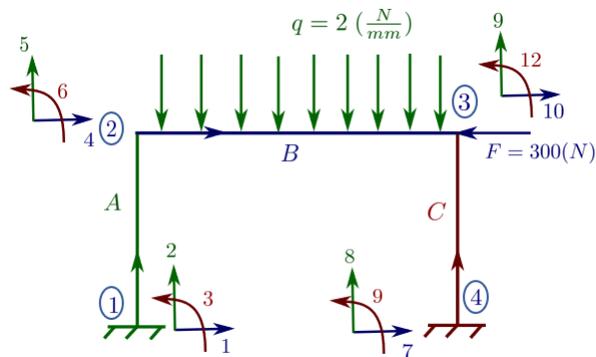
Datos: $L = 1 \text{ m}$; $A = 50 \text{ mm}^2$; $E = 200 \text{ GPa}$; $\Delta T = 200^\circ\text{C}$; $\alpha = 1,0 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

10. Usando MATLAB, calcular el campo de desplazamientos de la estructura.



Datos: $L_A = L_C = 2\sqrt{2}$ m; $L_B = 2$ m; $A_A = A_B = A_C = 200$ cm²; $E = 200$ MPa; $F = 300$ N

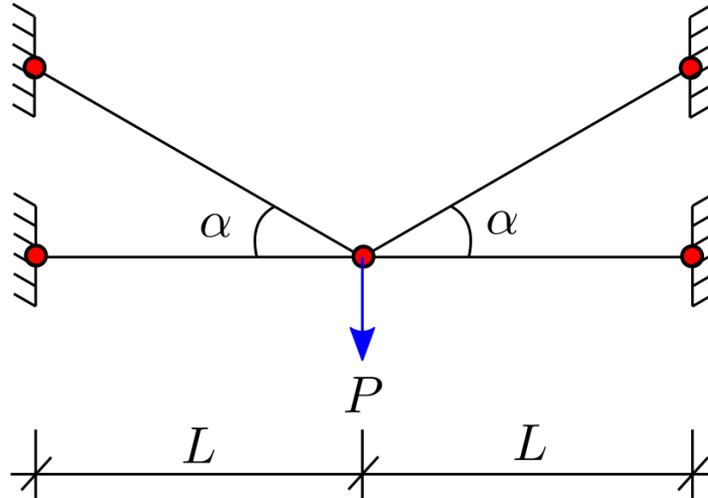
11. Usando MATLAB, calcular el campo de desplazamientos de la estructura.



Datos: $L_A = L_C = 4$ m; $L_B = 6$ m; $A_A = A_B = A_C = 100$ cm²; $E = 200$ GPa;
 $I_A = I_B = I_C = 1500$ cm⁴; $F = 300$ N; $q = 2 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$

16.2. Solución de ejercicios de Cálculo Matricial

1. Dada una estructura de barras sometida a la carga como se muestra en la siguiente figura. Los datos son: $E = 70 \text{ GPa}$, $A = 100 \text{ mm}^2$, $L = 1 \text{ m}$ y $\alpha = 30^\circ$

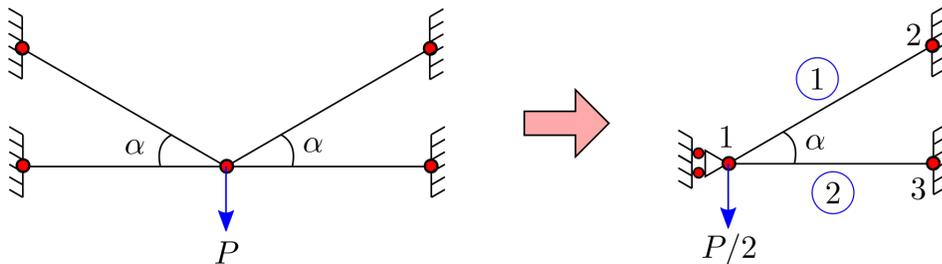


Resolviendo el problema con el método de cálculo matricial, se pide:

- Determinar el desplazamiento vertical en el punto de aplicación de la carga.
- Determinar los axiles en las barras.

Solución

Por la simetría de la geometría y de las cargas aplicadas, podemos simplificar la estructura como la siguiente:



Elemento 1:

- La matriz de rigidez elemental en coordenadas locales:

$$K'_e = \frac{EA}{L/\cos \alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La matriz de rotación:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

- La matriz de transformación:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

- La matriz de rigidez de elemento 1 en coordenadas globales

$$K_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

- Las coordenadas locales coinciden con las coordenadas globales, por tanto, la matriz de rigidez de este elemento en coordenadas globales es:

$$K_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez global de la estructura simplificada:

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} + 1 & \frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -1 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz reducida por las condiciones de contorno:

$$K_{11} = \frac{EA\sqrt{3}}{8L}$$

La fuerza reducida por las condiciones de contorno:

$$F_{11} = -P/2$$

Entonces, el desplazamiento vertical del nudo 1 es:

$$v_1 = F_{11}/K_{11} = -\frac{4PL}{EA\sqrt{3}}$$

Así que el vector de desplazamiento de todos los nudos es:

$$\mathbf{u} = \left[0 \quad -\frac{4PL}{EA\sqrt{3}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

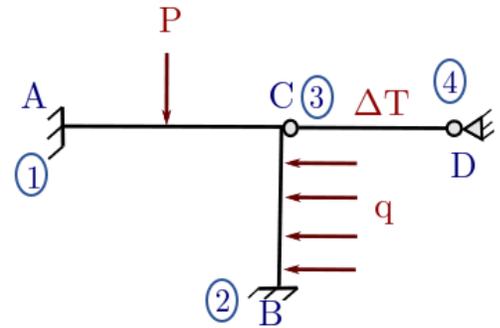
Podemos calcular el vector de las fuerzas nodales sin reducir por las condiciones de contorno

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u} = \left[-\frac{\sqrt{3}P}{2} \quad -\frac{P}{2} \quad \frac{\sqrt{3}P}{2} \quad \frac{P}{2} \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

De aquí, se puede sacar los axiles en las barras:

$$N_1 = P \text{ y } N_2 = 0$$

2. Calcular el campo de desplazamientos en el punto C de la siguiente estructura sabiendo que la carga P está situada en la mitad de la barra AC. Obtener también dicho campo de desplazamientos utilizando MATLAB.

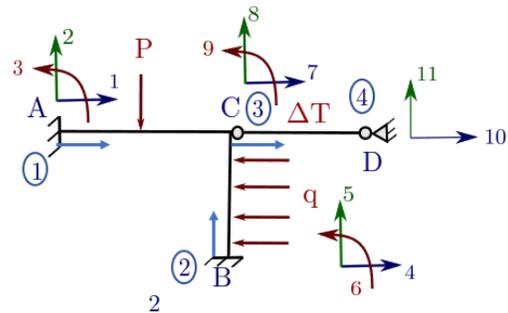


Datos: $L_{AB} = L_{BC} = L_{CD} = 3\text{ m}$; $A_{AB} = A_{BC} = A_{CD} = 100\text{ cm}^2$; $E = 70\text{ GPa}$;
 $I_{AB} = I_{BC} = 4000\text{ cm}^4$; $P = 5000\text{ N}$; $q = 1\frac{\text{kN}}{\text{m}}$; $\Delta T = 30^\circ\text{C}$; $\alpha = 10^{-5}\frac{1}{^\circ\text{C}}$

Solución

Para calcular el campo de desplazamiento en el punto C se pueden realizar los pasos detallados a continuación,

P1.- Sentido de las barras. Grados de libertad.



(g.d.l.) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)

P2.-Condiciones de contorno.

Analizando los nudos de la estructura se puede observar que el campo de desplazamientos del nudo 1,2,4 son nulos. El único nudo que tiene permitido todos los desplazamientos es el nudo 3 que coincide con los grados de libertad (7,8,9)

P3.- Matriz de la estructura.

$$[K]_{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} k_{11}^{AC} & 0 & k_{13}^{AC} & 0 \\ 0 & k_{22}^{BC} & k_{23}^{BC} & 0 \\ k_{31}^{AC} & k_{32}^{BC} & k_{33}^{BC+AC+CD} & k_{34}^{CD} \\ 0 & 0 & k_{43}^{CD} & k_{44}^{CD} \end{bmatrix}$$

P4.- Matrices elementales de cada barra.



$$k_g = \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \frac{EA_B}{L_B} & 0 & 0 & -\frac{EA_B}{L_B} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_B}{L_B^3} & \frac{6EI_B}{L_B^2} & 0 & -\frac{12EI_B}{L_B^3} & \frac{6EI_B}{L_B^2} \\ 0 & \frac{6EI_B}{L_B^2} & \frac{4EI_B}{L_B} & 0 & -\frac{6EI_B}{L_B^2} & \frac{2EI_B}{L_B} \\ \hline -\frac{EA_B}{L_B} & 0 & 0 & \frac{EA_B}{L_B} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_B}{L_B^3} & -\frac{6EI_B}{L_B^2} & 0 & \frac{12EI_B}{L_B^3} & -\frac{6EI_B}{L_B^2} \\ 0 & \frac{6EI_B}{L_B^2} & \frac{2EI_B}{L_B} & 0 & -\frac{6EI_B}{L_B^2} & \frac{4EI_B}{L_B} \end{bmatrix}$$



$$k_g = \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline A & D & P & -A & -D & -P \\ D & B & F & -D & -B & F \\ P & F & C & -P & -F & \frac{C}{2} \\ \hline -A & -D & -P & A & D & -P \\ -D & -B & -F & D & B & -F \\ P & F & \frac{C}{2} & -P & -F & C \end{bmatrix} \begin{matrix} C = \frac{4EI_B}{L_B} \\ P = -\sin(\alpha) \frac{6EI_B}{L_B^2} \\ F = \cos(\alpha) \frac{6EI_B}{L_B^2} \\ D = \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left(\frac{EA_B}{L_B} - \frac{12EI_B}{L_B^3} \right) \\ B = \sin^2(\alpha) \frac{EA_B}{L_B} + \cos^2(\alpha) \frac{12EI_B}{L_B^3} \\ A = \cos^2(\alpha) \frac{EA_B}{L_B} + \sin^2(\alpha) \frac{12EI_B}{L_B^3} \end{matrix}$$



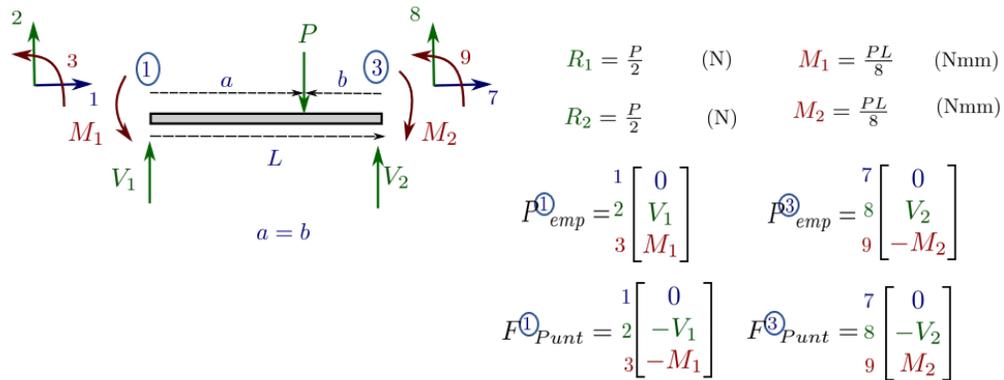
$$k_g = k_l = \frac{EA_A}{L_A} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 & 11 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{7} \\ \textcircled{8} \\ \textcircled{10} \\ \textcircled{11} \end{matrix} \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix}$$

En el caso de la barra CD para poderla sumar más fácilmente con el resto de matrices se puede añadir una columna y fila de ceros en el grado de libertad asociado al giro (9)

P5.- Vector de cargas.

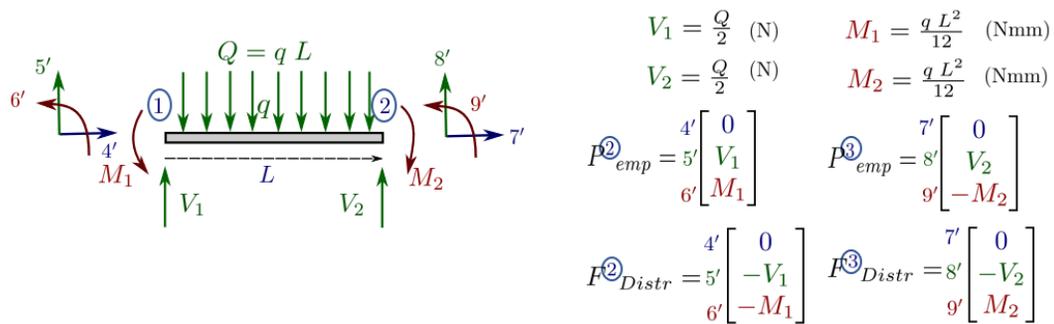
La suma del vector de cargas serían las fuerzas en el nudo donde los grados de libertad son distintos de cero (7,8,9) $F_{\text{Total}} = F_{\text{Puntual}}^3 + F_{\text{Distribuida}}^3 + F_{\text{Térmica}}^3$

Carga Puntual en la barra AC.



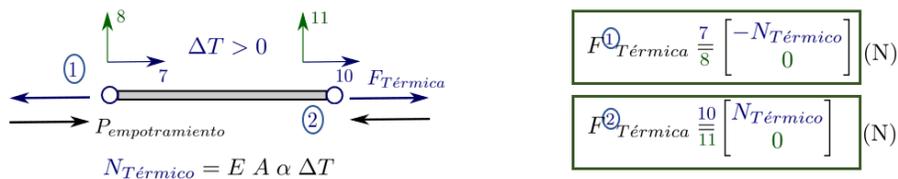
Carga distribuida en la barra BC.

En la barra BC las cargas están expresadas en grados de libertad locales (4',5',6',7',8',9'). Por tanto, la fuerza distribuida en el nudo 3 debe ser multiplicada por la matriz de cambio de la barra BC para expresarla en coordenadas globales.



Carga térmica en la barra CD.

En el caso de que se considere para una resolución más fácil, el giro en la barra CD, implicará poner una fila de ceros en el grado de libertad del momento.



P5.- Campo de desplazamientos

El campo de desplazamientos en el punto C será determinado utilizando la relación entre las fuerzas y desplazamientos mediante las matrices de rigidez.

$$F = Ku$$

siendo el campo de desplazamientos en dicho punto:

$$u_7 = -3,46 \text{ mm}$$

$$u_8 = 6 \text{ mm}$$

$$u_9 = 0,76 \text{ rad}$$

El código de MATLAB para calcular el desplazamiento en el punto C se detalla a continuación.

```

% Propiedades geométricas de las barras.
Lac=3000 %Unidades de mm
Ldc=3000
Lbc=3000
E=70000 %Unidades de MPa=N/mm^2
Aac=(100)*(100) %Unidades de mm^2
Adc=(100)*(100)
Abc=(100)*(100)
Iac=(4000)*(10000) %Unidades de mm^4
Ibc=(4000)*(10000) %Unidades de mm^4

%Valor de las cargas.
P=5000 %Unidades de N (Carga puntual)
q=1 %Unidades de N/mm (Carga distribuida)
T=30 %Unidades °C
alpha=10^(-5) %Coeficiente de dilatación térmica. Unidades (1/°C)

%Condiciones de contorno de los desplazamientos conocidos. El campo de
%desplazamientos en el punto C es lo que se está buscando
uA=[0,0,0]' %Nudo rígido sin desplazamiento 3 g.d.l.
uB=[0,0,0]' %Nudo rígido sin desplazamiento 3 g.d.l.
uD=[0,0]' %Nudo articulado sin desplazamiento. 2 g.d.l.

%Construcción de la matriz elemental de la barra AC (Nudo rígido A--> Nudo
%rígido C] (Coordenadas locales)
klac=[E*Aac/Lac 0 0 -E*Aac/Lac 0 0;
      0 12*E*Iac/(Lac^3) 6*E*Iac/(Lac^2) 0 -12*E*Iac/(Lac^3) 6*E*Iac/(Lac^2);
      0 6*E*Iac/(Lac^2) 4*E*Iac/(Lac) 0 -6*E*Iac/(Lac^2) 2*E*Iac/(Lac);
      -E*Aac/Lac 0 0 E*Aac/Lac 0 0;
      0 -12*E*Iac/(Lac^3) -6*E*Iac/(Lac^2) 0 12*E*Iac/(Lac^3) -6*E*Iac/(Lac^2);
      0 6*E*Iac/(Lac^2) 2*E*Iac/(Lac) 0 -6*E*Iac/(Lac^2) 4*E*Iac/(Lac)]
%El ángulo es 0, por tanto, los ejes locales coinciden con los ejes globales.
kgac=klac

%Construcción de la matriz elemental de la barra BC (Nudo rígido B--> Nudo
%rígido C](Coordenadas locales)
klbc=[E*Abc/Lbc 0 0 -E*Abc/Lbc 0 0;
      0 12*E*Ibc/(Lbc^3) 6*E*Ibc/(Lbc^2) 0 -12*E*Ibc/(Lbc^3) 6*E*Ibc/(Lbc^2);
      0 6*E*Ibc/(Lbc^2) 4*E*Ibc/(Lbc) 0 -6*E*Ibc/(Lbc^2) 2*E*Ibc/(Lbc);
      -E*Abc/Lbc 0 0 E*Abc/Lbc 0 0;
      0 -12*E*Ibc/(Lbc^3) -6*E*Ibc/(Lbc^2) 0 12*E*Ibc/(Lbc^3) -6*E*Ibc/(Lbc^2);
      0 6*E*Ibc/(Lbc^2) 2*E*Ibc/(Lbc) 0 -6*E*Ibc/(Lbc^2) 4*E*Ibc/(Lbc)]
Lb_c=[cosd(90) -sind(90) 0;sind(90) cosd(90) 0; 0 0 1]
Rbc=[Lb_c zeros(3);zeros(3) Lb_c] %Matriz de cambio respecto a los ejes globales
% Matriz elemental de la barra BC (Coordenadas globales)
kgbc=Rbc*klbc*Rbc'

%Construcción de la matriz elemental de la barra CD (Nudo rígido C--> Nudo
%rígido D](Coordenadas locales)
klcd=(E*Adc/Ldc)*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]
%El ángulo es 0, por tanto, los ejes locales coinciden con los ejes globales.
kgcd=klcd

```

```

%Cuidado con la barra DC. Está unida a un nudo rígido lo que implica que
%tenemos tres grados de libertad así que se debe añadir dos filas de ceros
%y dos columnas de cero en la rigidez a la flexión.
kfgdc=(E*Adc/Ldc)*[1 0 0 -1 0 0; 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;
-1 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0]

%Construcción de la matriz general. Debemos de tener cuidado porque cada
%elemento de las matrices elementales deben ir a las mismas posiciones de
%las matrices globales. Cuidado con los grados de libertad
K=zeros(12)
K([1,2,3],[1,2,3])=kgac([1,2,3],[1,2,3])
K([1,2,3],[4,5,6])=zeros(3) %Lecturas por filas y por columnas
K([1,2,3],[7,8,9])=kgac([1,2,3],[4,5,6])
K([1,2,3],[10,11,12])=zeros(3)
K([4,5,6],[1,2,3])=zeros(3)
K([4,5,6],[4,5,6])=kgbc([1,2,3],[1,2,3])
K([4,5,6],[7,8,9])=kgbc([1,2,3],[4,5,6])
K([4,5,6],[10,11,12])=zeros(3)
K([7,8,9],[1,2,3])=kgac([4,5,6],[1,2,3])
K([7,8,9],[4,5,6])=kgbc([4,5,6],[1,2,3])
K([7,8,9],[7,8,9])=kgac([4,5,6],[4,5,6])+kgbc([4,5,6],[4,5,6])+kfgdc([1,2,3],[1,2,3])
K([7,8,9],[10,11,12])=kfgdc([1,2,3],[4,5,6])
K([10,11,12],[1,2,3])=zeros(3)
K([10,11,12],[4,5,6])=zeros(3)
K([10,11,12],[7,8,9])=kfgdc([4,5,6],[1,2,3])
K([10,11,12],[10,11,12])=kfgdc([4,5,6],[4,5,6])

%Vector de cargas.
%Carga puntual.
Rpuntuala=[0,P/2,P*Lac^2/8]' %Reacción en el nudo A
Rpuntualc=[0,P/2,-P*Lac^2/8]' %Reacción en el nudo C

%Incremento térmico.
Rtermiac=[E*Adc*alpha*T 0 0]' %Reacción en el punto C.
Rtermiad=[-E*Adc*alpha*T 0 0]' %Reacción en el punto D.

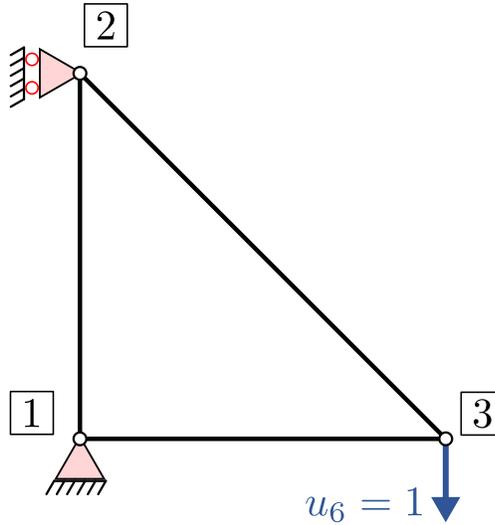
%Carga distribuida.
Rdistb=[0 (q*Lbc/2) (q*(Lbc)^2/12)]' %Reacción en el punto B (locales)
Rdistb=Lb_c*Rdistb %Reacción en el punto B (globales)
Rdistc=[0 q*Lbc/2 -q*Lbc^2/12]' %Reacción en el punto B (locales)
Rdistcg=Lb_c*Rdistc %Reacción en el punto B (globales)

%Calcular el campo de desplazamientos.Sólo he utilizado el campo de
%desplazamientos distinto de cero que serían los grados de libertad (7,8,9)
KLL=K([7,8,9],[7,8,9])
Kin=inv(KLL)
Fp=[-Rdistcg-Rpuntualc-Rtermiac]
u=Kin*Fp
uprueba=KLL\Fp

ufinal=[0; 0; 0;0;0;0; u ;0;0;0]

```

3. Considérese la estructura de barras a la que se ha impuesto un desplazamiento unitario $u_6 = 1$ en uno de sus nodos, tal y como se muestra en la siguiente figura. La longitud de las barras horizontal y vertical es L .



Utilizando el cálculo matricial (idealización de barras), obtener:

- Matrices global K y reducida por las condiciones de contorno K_{ff} de la estructura
- Obtener la fuerza según el grado de libertad 6 que provoca el desplazamiento unitario
- Determinar las reacciones

Solución

- Sabiendo que la matriz de rigidez locales de un elemento barra (en su sistema local) es

$$[\mathbf{K}]_{\mathbf{x}_{\text{local}}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_{\text{local}}}, \quad (16.1)$$

se pretende obtener las matrices de rigideces locales expresadas en el sistema global representado en la figura mediante matrices de rotación para proceder al ensamblaje de la matriz global. Comenzando por el elemento barra ① (comprendido entre los nodos 1 y 2), la expresión de su sistema de ejes local (\mathbf{X}') en el global (\mathbf{X}) es:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2'} = -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_{4'} = -\mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (16.2)$$

Por tanto, la matriz de giro $[\mathbf{R}_{\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}}]$ es

$$[\mathbf{R}_{X' \rightarrow X}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.3)$$

Así, la matriz de rigidez del elemento ① se expresa como

$$[\mathbf{K}^1]_X = \left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{K}_{11}^1] & [\mathbf{K}_{12}^1] \\ \hline [\mathbf{K}_{21}^1] & [\mathbf{K}_{22}^1] \end{array} \right]_X = [\mathbf{R}_{X' \rightarrow X}] [\mathbf{K}^1]_{X'} [\mathbf{R}_{X \rightarrow X'}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_X \quad (16.4)$$

donde se ha destacado también la representación en submatrices por grados de libertad involucrados. Esta representación se utilizará posteriormente para el ensamblaje de la matriz de rigidez.

El elemento ② comprende los nodos 2 y 3, y los vectores de su sistema de referencia X'' en función del sistema de referencia global adquieren la siguiente expresión:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1''} = \sqrt{2}/2 (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4) \\ \mathbf{e}_{2''} = \sqrt{2}/2 (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \\ \mathbf{e}_{3''} = \sqrt{2}/2 (\mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_6) \\ \mathbf{e}_{4''} = \sqrt{2}/2 (\mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6) \end{cases} \quad (16.5)$$

Con ello, la matriz de giro $[\mathbf{R}_{X'' \rightarrow X}]$ es

$$[\mathbf{R}_{X'' \rightarrow X}] = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16.6)$$

por lo que la matriz de rigidez global del elemento ② es

$$[\mathbf{K}^2]_X = [\mathbf{R}_{X'' \rightarrow X}] [\mathbf{K}^2]_{X''} [\mathbf{R}_{X \rightarrow X''}] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}_X \quad (16.7)$$

Nótese que $L_2 = \sqrt{2}L$. Por último, para el elemento ③ (nodos 1 a 3) se observa que ejes locales y globales coinciden (para la construcción de su matriz de rigidez en ejes globales) i.e. $[\mathbf{R}_{X''' \rightarrow X}] = \mathbf{I}$. Por tanto, su matriz de rigidez en ejes globales es

$$[\mathbf{K}^3]_X = [\mathbf{K}]_{X_{\text{local}}} \quad (16.8)$$

Con todo ello, el ensamblaje de la matriz de rigidez global es del siguiente modo

$$[\mathbf{K}]_X = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 + \mathbf{K}_{11}^3 & \mathbf{K}_{12}^1 & \mathbf{K}_{13}^3 \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{22}^2 & \mathbf{K}_{23}^2 \\ \mathbf{K}_{31}^3 & \mathbf{K}_{32}^2 & \mathbf{K}_{33}^2 + \mathbf{K}_{33}^3 \end{bmatrix} \quad (16.9)$$

Sustituyendo los resultados obtenidos previamente,

$$[\mathbf{K}]_{\mathbf{X}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (16.10)$$

Los grados de libertad permitidos (o libres, f) son 4 y 5, por lo que la matriz reducida por las condiciones de contorno \mathbf{K}_{ff} es

$$[\mathbf{K}_{ff}]_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{54} & K_{55} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}} \quad (16.11)$$

- b) Para obtener dicha fuerza, es necesario resolver primero los desplazamientos libres. Para ello, se realiza la condensación estática de la matriz de rigidez. Sabiendo que la expresión $\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u}$ puede separarse por grados de libertad libres (f) y restringidos (r), es posible expresar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fr} \\ \mathbf{K}_{rf} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_f \\ \mathbf{f}_r \end{bmatrix} \quad (16.12)$$

Expandiendo la primera ecuación de la relación previa,

$$\mathbf{K}_{ff}\mathbf{u}_f + \mathbf{K}_{fr}\mathbf{u}_r = \mathbf{f}_f \Rightarrow \mathbf{u}_f = \mathbf{K}_{ff}^{-1}(\mathbf{f}_f - \mathbf{K}_{fr}\mathbf{u}_r) \quad (16.13)$$

De la figura se extrae que los desplazamientos restringidos son $\mathbf{u}_r = [0, 0, 0, -1]^T$. Así,

$$\mathbf{u}_f = -\mathbf{K}_{ff}^{-1}\mathbf{K}_{fr}\mathbf{u}_r = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16.14)$$

Conocidos los desplazamientos libres \mathbf{u}_f , de la segunda expresión de la Ecuación (16.12) pueden obtenerse las fuerzas de reacción i.e.

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{K}_{rf}\mathbf{u}_f + \mathbf{K}_{rr}\mathbf{u}_r \quad (16.15)$$

Como la fuerza pedida es f_6 , se toma la última relación de (16.15)

$$f_6 = \underbrace{K_{64}u_4 + K_{65}u_5}_{\text{último componente de } \mathbf{K}_{rf}\mathbf{u}_f} + \underbrace{K_{66}u_6}_{\text{último componente de } \mathbf{K}_{rr}\mathbf{u}_r} = \frac{EA}{L} \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) \quad (16.16)$$

c) Por último, se piden el resto de reacciones i.e. f_1 , f_2 y f_3

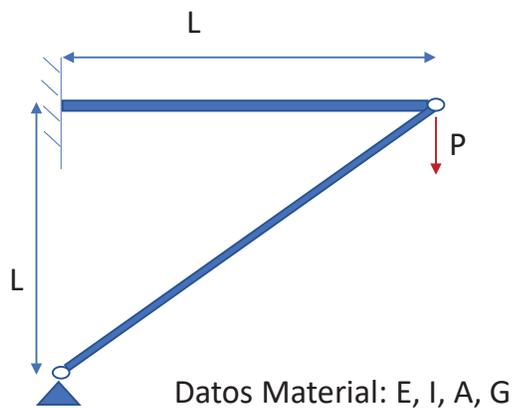
Para este problema concreto, sabiendo que los grados de libertad libres son $f = 4, 5$ y los restringidos son $r = 1, 2, 3, 6$, y que $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, dichas reacciones pueden expresarse como

$$f_i = K_{i4}u_4 + K_{i5}u_5 + K_{i6}(-1), \quad i = 1, 2, 3 \quad (16.17)$$

Operando, se llega al resultado final

$$\begin{array}{l} f_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \frac{EA}{L} \\ f_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \frac{EA}{L} \\ f_3 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \frac{EA}{L} \end{array} \quad (16.18)$$

4. Plantear el siguiente problema mediante cálculo matricial



Solución

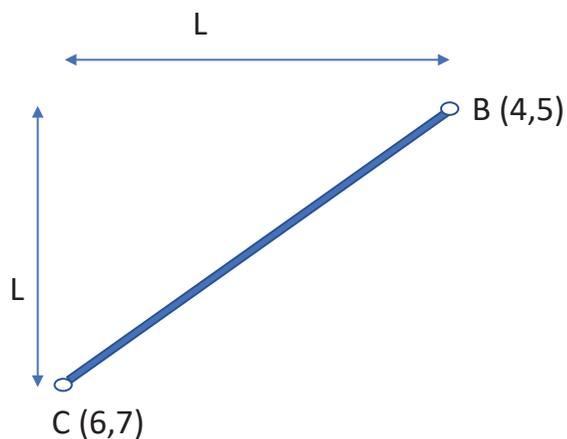
Fijándonos en la barra superior, nodo A a B, vemos que es de rígido, con tres grados de libertad que llamamos 1,2 3, a articulado con dos grados de libertad 4 y 5



Entonces la matriz de rigidez es:

$$k_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 3\frac{EI}{L^3} & 3\frac{EI}{L^2} & 0 & -3\frac{EI}{L^3} \\ 0 & 3\frac{EI}{L^2} & 3\frac{EI}{L} & 0 & -3\frac{EI}{L^2} \\ -\frac{EA}{L^3} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -3\frac{EI}{L^3} & -3\frac{EI}{L^2} & 0 & 3\frac{EI}{L^3} \end{pmatrix}$$

Para la barra que va de B a C, sabiendo que el ángulo es 45 grados pero geometría, dando a C los grados de libertad 6 y 7



llegamos a la matriz

$$k_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{EA}{2\sqrt{2}L}$$

Comprobando las fuerzas en los nodos, y considerando las reacciones, tenemos

$$F_A = \begin{pmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \end{pmatrix}$$

$$F_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

$$F_C = \begin{pmatrix} H_C \\ V_C \end{pmatrix}$$

Y los desplazamientos en nodos

$$u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_B = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$u_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

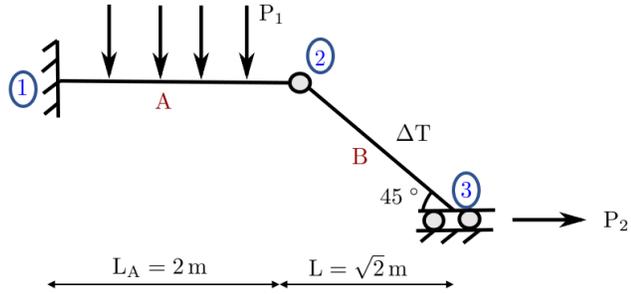
Así, el resultado ensamblado entero es

$$\begin{pmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \\ 0 \\ -P \\ H_C \\ V_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EI}{L^3} & 3\frac{EI}{L^2} & 0 & -3\frac{EI}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EI}{L^2} & 3\frac{EI}{L} & 0 & -3\frac{EI}{L^3} & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{2\sqrt{2}L} & \frac{EA}{2\sqrt{2}L} & -\frac{EA}{2\sqrt{2}L} & -\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \\ 0 & -3\frac{EI}{L^3} & -3\frac{EI}{L^2} & \frac{EA}{2\sqrt{2}L} & 3\frac{EI}{L^3} + \frac{EA}{2\sqrt{2}L} & -\frac{EA}{2\sqrt{2}L} & -\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{2\sqrt{2}L} & -\frac{EA}{2\sqrt{2}L} & \frac{EA}{2\sqrt{2}L} & \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{2\sqrt{2}L} & -\frac{EA}{2\sqrt{2}L} & \frac{EA}{2\sqrt{2}L} & \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y la solución viene de resolver

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{EA}{2\sqrt{2}L} & \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \\ \frac{EA}{2\sqrt{2}L} & 3\frac{EI}{L^3} + \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

- Utilizando el cálculo matricial de la rigidez, determinar el campo de desplazamientos de la estructura. Obtener también dicho campo de desplazamientos utilizando MATLAB.
- 5.

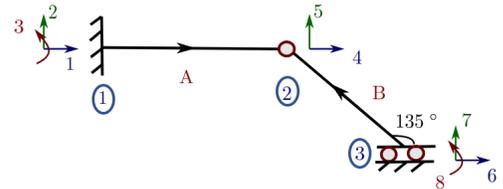


Datos: $L_A = 2 \text{ m}$; $L = \sqrt{2} \text{ m}$; $A_A = A_B = 100 \text{ cm}^2$; $E = 70 \text{ GPa}$; $I_A = I_B = 4000 \text{ cm}^4$; $P_2 = 50 \text{ kN}$; $P_1 = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$; $\Delta T = 50^\circ\text{C}$; $\alpha = 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

Solución

- a) Para calcular el campo de desplazamiento de la estructura se realizarán los siguientes pasos:

P1.- Sentido de las barras. Grados de libertad.



P2.- Condiciones de contorno.

Esta estructura tiene 3 grados de libertad (4,5,6) que son los movimientos permitidos de la estructura.

$$u^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{bmatrix}; \quad u^{(2)} = \begin{bmatrix} u_4 \neq 0 \\ u_5 \neq 0 \end{bmatrix}; \quad u^{(3)} = \begin{bmatrix} u_6 \neq 0 \\ u_7 = 0 \\ u_8 = 0 \end{bmatrix}$$

P3.- Matriz de la estructura.

$$[K]_g = \begin{bmatrix} k_{11}^A & k_{12}^A & 0 \\ k_{21}^A & k_{22}^{A+B} & k_{23}^B \\ 0 & k_{32}^B & k_{33}^B \end{bmatrix}$$

P4.- Matrices elementales de cada barra.

Barra A: ① [Nodo Rígido (1,2,3)] → ② [Nodo Articulado (4,5)] ($\alpha = 0^\circ$. Los ejes locales coinciden con los ejes globales de la estructura.)

$$K_{G=L} = \begin{bmatrix} k_{11}^A & k_{12}^A \\ k_{21}^A & k_{22}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA_A}{L_A} & 0 & 0 & \frac{-EA_A}{L_A} & 0 \\ 0 & \frac{3EI_A}{L_A^3} & \frac{3EI_A}{L_A^2} & 0 & \frac{-3EI_A}{L_A^3} \\ 0 & \frac{3EI_A}{L_A^2} & \frac{3EI_A}{L_A} & 0 & \frac{-3EI_A}{L_A^2} \\ \frac{-EA_A}{L_A} & 0 & 0 & \frac{EA_A}{L_A} & 0 \\ 0 & \frac{-3EI_A}{L_A^3} & \frac{-3EI_A}{L_A^2} & 0 & \frac{3EI_A}{L_A^3} \end{bmatrix}$$

quedando la matriz de rigidez al sustituir los datos,

$$K_G = \begin{bmatrix} 3,5 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -3,5 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 1050 & 2,1 \cdot 10^5 & 0 & -1050 \\ 0 & 2,1 \cdot 10^5 & 4,2 \cdot 10^9 & 0 & -2,1 \cdot 10^5 \\ -3,5 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 3,5 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -1050 & -2,1 \cdot 10^5 & 0 & 1050 \end{bmatrix} \text{ (N,mm)}$$

Barra B: ③ [Nodo Rígido (6,7,8)] → ② [Nodo Articulado (4,5)] ($\alpha = 135^\circ$. Los ejes locales no coinciden con los ejes globales de la estructura)

$$K_L = \begin{bmatrix} k_{33}^B & k_{32}^B \\ k_{23}^B & k_{22}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA_B}{L_B} & 0 & 0 & \frac{-EA_B}{L_B} & 0 \\ 0 & \frac{3EI_B}{L_B^3} & \frac{3EI_B}{L_B^2} & 0 & \frac{-3EI_B}{L_B^3} \\ 0 & \frac{3EI_B}{L_B^2} & \frac{3EI_B}{L_B} & 0 & \frac{-3EI_B}{L_B^2} \\ \frac{-EA_B}{L_B} & 0 & 0 & \frac{EA_B}{L_B} & 0 \\ 0 & \frac{-3EI_B}{L_B^3} & \frac{-3EI_B}{L_B^2} & 0 & \frac{3EI_B}{L_B^3} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la barra B se expresa en coordenadas globales cuando se multiplica por la matriz de rotación,

$$K_G = L_D K_L L_D^T$$

siendo,

$$L_D = \begin{bmatrix} R_1 & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & R_2 \end{bmatrix}; \quad R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

La matriz de la barra B en coordenadas locales es la misma que la matriz de la barra A en coordenadas globales siendo la matriz B en coordenadas globales,

$$K_G = 10^9 \begin{bmatrix} 0,0002 & -0,0002 & -0,0015 & -0,0002 & 0,0002 \\ -0,0002 & 0,0002 & -0,0015 & 0,0002 & -0,0002 \\ -0,0015 & -0,0015 & 4,2 & 0,0015 & 0,0015 \\ -0,0002 & 0,0002 & 0,0015 & -0,0002 & 0,0002 \\ 0,0002 & -0,0002 & 0,0015 & -0,0002 & 0,0002 \end{bmatrix} \text{ (N,mm)}$$

P5.- Vector de cargas.

$$F_{\text{Total}} = F_{\text{Puntual}} + F_{\text{Distribuida}} + F_{\text{Térmica}}$$

5.1.- Carga Puntual en el nodo ③.

$$F_{\text{Puntual}} = \begin{bmatrix} P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (N,mm) G.d.l. (6,7,8)}$$

5.2.- Carga distribuida en la barra A.

Las reacciones en los nodos ① y ② son las fuerzas de empotramientos mientras que las fuerzas se obtienen cambiando de signo las fuerzas de empotramiento,

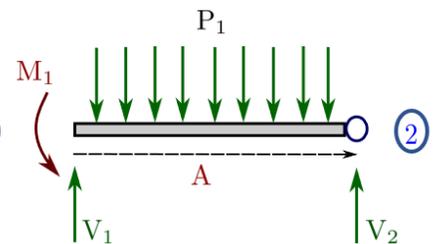
$$V_1 = \frac{5P_1L}{8}; \quad V_2 = \frac{3P_1L}{8}; \quad M_1 = \frac{P_1L^2}{8}$$

$$F_{\text{Dist}}^{\text{①}} = -P_{\text{emp}}^{\text{①}} = - \begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 12500 \\ 1,125 \cdot 10^7 \end{bmatrix} \text{ (N,mm)}$$

$$\text{G.d.l. (1,2,3)} \quad F_{\text{Dist}}^{\text{②}} = -P_{\text{emp}}^{\text{②}} = - \begin{bmatrix} 0 \\ V_2 \end{bmatrix} =$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ 7500 \end{bmatrix} \text{ (N,mm)}$$

G.d.l. (4,5)



5.3.- Carga térmica en la barra B.

El axil térmico es una reacción en la dirección de la barra B en los nodos ② y ③. Dicho axil es una fuerza de empotramiento local que se transformará en una fuerza global proyectándola y cambiándole el signo,

$$N_{\text{Térmico}} = E A \alpha \Delta T = 3,5 \cdot 10^5$$

el axil térmico en los ejes locales, $F_{T,L}^{(2)} = -P_{emp,L}^{(2)} =$
 $-\begin{bmatrix} EA\alpha\Delta T \\ 0 \end{bmatrix}$ (N) G.d.l. (4',5')

$$F_{T,L}^{(3)} = P_{emp,L}^{(3)} = \begin{bmatrix} EA\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (N,mm) G.d.l. (6',7',8')}$$

el axil térmico en los ejes globales,

$$F_{T,G}^{(2)} = -P_{emp,G}^{(2)} = \begin{bmatrix} -N\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -N\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,47 \cdot 10^5 \\ 2,47 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \text{ (N)}$$

G.d.l. (4,5)

$$F_{T,G}^{(3)} = -P_{emp,G}^{(3)} = \begin{bmatrix} N\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -N\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,47 \cdot 10^5 \\ -2,47 \cdot 10^5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (N,mm)}$$

G.d.l. (6,7,8)

P5.- Determinar el campo de desplazamientos

El cálculo del campo de desplazamientos será determinado utilizando la relación entre las fuerzas y desplazamientos para los grados de libertad del problema (4,5,6).

$$F = Ku$$

Por tanto, la matriz de rigidez de la estructura considerando los grados de libertad (4,5,6) es,

$$K = 10^5 \begin{bmatrix} 5,2553 & -1,7448 & -1,7553 \\ -1,7448 & 1,7658 & 1,7448 \\ -1,7553 & 1,7448 & 1,7553 \end{bmatrix} \text{ (N,mm) G.d.l. (4,5,6)}$$

y el vector de cargas en los mismos grados de libertad es,

$$F_{T,G} = \begin{bmatrix} -N\frac{\sqrt{2}}{2} \\ N\frac{\sqrt{2}}{2} - V_2 \\ N\frac{\sqrt{2}}{2} + P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,47 \cdot 10^5 \\ 2,39 \cdot 10^5 \\ 2,97 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \text{ (N) G.d.l. (4,5,6)}$$

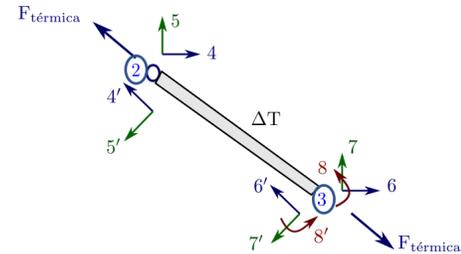
siendo el campo de desplazamientos de la estructura,

$$u_4 = 0,1429 \text{ mm}$$

$$u_5 = -17,7244 \text{ mm}$$

$$u_6 = 19,4560 \text{ mm}$$

El código de MATLAB para calcular el campo de desplazamientos se detalla a continuación.



```

% Propiedades geométricas de las barras.
La=2000 %Unidades de mm
Lb=2000
E=70000 %Unidades de MPa=N/mm^2
Aa=(100)*(100) %Unidades de mm^2
Ab=(100)*(100)
Ia=(4000)*(10000) %Unidades de mm^4
Ib=(4000)*(10000) %Unidades de mm^4

%Valor de las cargas.
P=50000 %Unidades de N (Carga puntual)
q=10 %Unidades de N/mm (Carga distribuida)
T=50 %Unidades °C
alpha=10^(-5) %Coeficiente de dilatación térmica. Unidades (1/°C)

%Condiciones de contorno de los desplazamientos conocidos.
u1=[0,0,0]' %Nudo rígido sin desplazamiento 3 g.d.l.
u3=[0,0]' %Nudo rígido sin desplazamiento en el vertical y en el giro.

%Construcción de la matriz elemental de la barra A (Nudo rígido 1--> Nudo
%rígido 2] (Coordenadas locales)
kla=[E*Aa/La 0 0 -E*Aa/La 0;
      0 3*E*Ia/(La^3) 3*E*Ia/(La^2) 0 -3*E*Ia/(La^3);
      0 3*E*Ia/(La^2) 3*E*Ia/(La) 0 -3*E*Ia/(La^2);
      -E*Aa/La 0 0 E*Aa/La 0;
      0 -3*E*Ia/(La^3) -3*E*Ia/(La^2) 0 3*E*Ia/(La^3)]
%El ángulo es 0, por tanto, los ejes locales coinciden con los ejes globales.
kga=kla

%Construcción de la matriz elemental de la barra B (Nudo rígido 3--> Nudo
%artículo 2](Coordenadas locales)
klb=[E*Ab/Lb 0 0 -E*Ab/Lb 0;
      0 3*E*Ib/(Lb^3) 3*E*Ib/(Lb^2) 0 -3*E*Ib/(Lb^3);
      0 3*E*Ib/(Lb^2) 3*E*Ib/(Lb) 0 -3*E*Ib/(Lb^2);
      -E*Ab/Lb 0 0 E*Ab/Lb 0;
      0 -3*E*Ib/(Lb^3) -3*E*Ib/(Lb^2) 0 3*E*Ib/(Lb^3)]
R1=[cosd(135) -sind(135) 0;sind(135) cosd(135) 0; 0 0 1]
R2=[cosd(135) -sind(135);sind(135) cosd(135)]

Rbc=[R1 zeros(3,2);zeros(2,3) R2] %Matriz de cambio respecto a los ejes globales
% Matriz elemental de la barra BC (Coordenadas globales)
kgb=Rbc*klb*Rbc'

%Construcción de la matriz general. Debemos de tener cuidado porque cada
%elemento de las matrices elementales deben ir a las mismas posiciones de
%las matrices globales. Cuidado con los grados de libertad
K=zeros(8)
K([1,2,3],[1,2,3])=kga([1,2,3],[1,2,3])
K([1,2,3],[4,5])=kga([1,2,3],[4,5]) %Lectura por fila y por columna
K([1,2,3],[6,7,8])=zeros(3) %cada una de las matrices.
K([4,5],[1,2,3])=kga([4,5],[1,2,3])
K([4,5],[4,5])=kga([4,5],[4,5])+ kgb([4,5],[4,5])
K([4,5],[6,7,8])=kgb([4,5],[1,2,3])

```

```

K([6,7,8],[1,2,3])=zeros(3)
K([6,7,8],[4,5])=kgb([1,2,3],[4,5])
K([6,7,8],[6,7,8])=kgb([1,2,3],[1,2,3])

%Vector de cargas.
%Carga puntual.
Fp456=[0 0 P]' %Fuerza en el nudo 3

%Incremento térmico.
Rtermica2=[E*Ab*alpha*T*cosd(45) -E*Ab*alpha*T*sind(45)] %Reacción en el nudo 2.
Rtermica3=[-E*Ab*alpha*T*cosd(45) E*Ab*alpha*T*sind(45) 0]'%Reacción en el nudo 3.

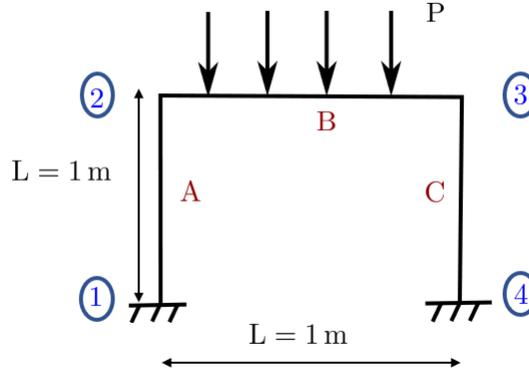
Ft456=[-E*Ab*alpha*T*cosd(45) +E*Ab*alpha*T*sind(45) 0]'
Ft645=[0 0 E*Ab*alpha*T*cosd(45)]'
%Carga distribuida.
Rdist1=[0 5*q*La/8 q*La^2/8]' %Reacción en el nudo 1(glocales)
Rdist2=[0 3*q*La/8] %Reacción en el nudo 2(globales)

Fd456=-[0 3*q*La/8 0]'
%Calcular el campo de desplazamientos.Sólo he utilizado el campo de
%desplazamientos distinto de cero que serían los grados de libertad (4,5,6)
KLL=K([4,5,6],[4,5,6])
Kinv=inv(KLL)
Fp= Fd456+Ft645+Ft456+Fp456
u=Kinv*Fp
uprueba=KLL\Fp

ufinal=[0; 0; 0; u;0;0]

```

6. Usando MATLAB, calcular el campo de desplazamientos y las fuerzas de empotramiento (Reacciones) de la estructura.



Datos: $L_A = L_B = L_C = 1 \text{ m}$; $A_A = A_B = A_C = 200 \text{ cm}^2$; $E = 210 \text{ GPa}$;

$$I_A = I_B = I_C = 900000 \text{ cm}^4; \quad P = 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Solución

El campo de desplazamientos de la estructura es,

$$u^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\text{mm,rad}); \quad u^{(2)} = \begin{bmatrix} 10^{-4} \\ -2,4 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} (\text{mm,rad}); \quad u^{(3)} = \begin{bmatrix} -10^{-4} \\ -2,4 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} (\text{mm,rad});$$

$$u^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\text{mm,rad})$$

Las fuerzas de empotramiento (reacciones) en cada una de las barras,

$$P_{\text{emp}}^{(A)} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,10 \\ -0,0071 \\ 0,8274 \\ -0,10 \\ 0,0071 \\ -7,9196 \end{bmatrix} (\text{N,Nmm}); \quad P_{\text{emp}}^{(B)} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,0071 \\ 0,1 \\ 7,9196 \\ -0,0071 \\ 0,1 \\ -7,9196 \end{bmatrix} (\text{N,Nmm}); \quad P_{\text{emp}}^{(C)} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,0071 \\ -0,8274 \\ -0,10 \\ -0,0071 \\ 7,9196 \end{bmatrix} (\text{N,Nmm});$$

```

% Propiedades geométricas de las barras.
La=1000 %Unidades de mm
Lb=1000
Lc=1000
E=210000 %Unidades de MPa=N/mm^2
Aa=(200)*(100) %Unidades de mm^2
Ab=(200)*(100)
Ac=(200)*(100)
Ia=(900000)*(10000) %Unidades de mm^4
Ic=(900000)*(10000) %Unidades de mm^4
Ib=(900000)*(10000) %Unidades de mm^4

%Valor de la carga.
P2=20 %Unidades de N/mm (Carga distribuida)

%Condiciones de contorno de los desplazamientos conocidos.
u1=[0,0,0]' %Nudo rígido sin desplazamiento 3 g.d.l.
u4=[0,0,0]' %Nudo rígido sin desplazamiento 3 g.d.l.

%Construcción de la matriz elemental de la barra A(Nudo rígido 1--> Nudo
%rígido 2] (Coordenadas locales)
k1a=[E*Aa/La 0 0 -E*Aa/La 0 0;
      0 12*E*Ia/(La^3) 6*E*Ia/(La^2) 0 -12*E*Ia/(La^3) 6*E*Ia/(La^2);
      0 6*E*Ia/(La^2) 4*E*Ia/(La) 0 -6*E*Ia/(La^2) 2*E*Ia/(La);
      -E*Aa/La 0 0 E*Aa/La 0 0;
      0 -12*E*Ia/(La^3) -6*E*Ia/(La^2) 0 12*E*Ia/(La^3) -6*E*Ia/(La^2);
      0 6*E*Ia/(La^2) 2*E*Ia/(La) 0 -6*E*Ia/(La^2) 4*E*Ia/(La)]

Lat=[cosd(90) -sind(90) 0;sind(90) cosd(90) 0; 0 0 1]
Ra=[Lat zeros(3);zeros(3) Lat] %Matriz de cambio respecto a los ejes globales

% Matriz global de la barra A (Coordenadas globales)
kga=Ra*k1a*Ra'

%Construcción de la matriz elemental de la barra B (Nudo rígido 2--> Nudo
%rígido 3](Coordenadas locales=Coordenadas globales)
k1b=[E*Ab/Lb 0 0 -E*Ab/Lb 0 0;
      0 12*E*Ib/(Lb^3) 6*E*Ib/(Lb^2) 0 -12*E*Ib/(Lb^3) 6*E*Ib/(Lb^2);
      0 6*E*Ib/(Lb^2) 4*E*Ib/(Lb) 0 -6*E*Ib/(Lb^2) 2*E*Ib/(Lb);
      -E*Ab/Lb 0 0 E*Ab/Lb 0 0;
      0 -12*E*Ib/(Lb^3) -6*E*Ib/(Lb^2) 0 12*E*Ib/(Lb^3) -6*E*Ib/(Lb^2);
      0 6*E*Ib/(Lb^2) 2*E*Ib/(Lb) 0 -6*E*Ib/(Lb^2) 4*E*Ib/(Lb)]

%El ángulo es 0, por tanto, los ejes locales coinciden con los ejes globales.
kgb=k1b

%Construcción de la matriz elemental de la barra C(Nudo rígido 4--> Nudo
%rígido 3] (Coordenadas locales)
k1c=[E*Ac/Lc 0 0 -E*Ac/Lc 0 0;
      0 12*E*Ic/(Lc^3) 6*E*Ic/(Lc^2) 0 -12*E*Ic/(Lc^3) 6*E*Ic/(Lc^2);
      0 6*E*Ic/(Lc^2) 4*E*Ic/(Lc) 0 -6*E*Ic/(Lc^2) 2*E*Ic/(Lc);
      -E*Ac/Lc 0 0 E*Ac/Lc 0 0;
      0 -12*E*Ic/(Lc^3) -6*E*Ic/(Lc^2) 0 12*E*Ic/(Lc^3) -6*E*Ic/(Lc^2);

```

```

0 6*E*Ic/(Lc^2) 2*E*Ic/(Lc) 0 -6*E*Ic/(Lc^2) 4*E*Ic/(Lc)]

Lct=[cosd(90) -sind(90) 0;sind(90) cosd(90) 0; 0 0 1]
Rc=[Lct zeros(3);zeros(3) Lct] %Matriz de cambio respecto a los ejes globales

% Matriz global de la barra B (Coordenadas globales)
kgc=Rc*kIc*Rc'

%Construcción de la matriz general. Debemos de tener cuidado porque cada
%elemento de las matrices elementales deben ir a las mismas posiciones de
%las matrices globales. Cuidado con los grados de libertad
K=zeros(12)
K([1,2,3],[1,2,3])=kga([1,2,3],[1,2,3])
K([1,2,3],[4,5,6])=kga([1,2,3],[4,5,6]) %Lectura por filas y por columnas de
K([1,2,3],[7,8,9])=zeros(3) %cada matriz.
K([1,2,3],[10,11,12])=zeros(3)
K([4,5,6],[1,2,3])=kga([4,5,6],[1,2,3])
K([4,5,6],[4,5,6])=kga([4,5,6],[4,5,6])+kgb([1,2,3],[1,2,3])
K([4,5,6],[7,8,9])=kgb([1,2,3],[4,5,6])
K([4,5,6],[10,11,12])=zeros(3)
K([7,8,9],[1,2,3])=zeros(3)
K([7,8,9],[4,5,6])=kgb([4,5,6],[1,2,3])
K([7,8,9],[7,8,9])=kgb([4,5,6],[4,5,6])+kgc([4,5,6],[4,5,6])
K([7,8,9],[10,11,12])=kgc([4,5,6],[1,2,3])
K([10,11,12],[1,2,3])=zeros(3)
K([10,11,12],[4,5,6])=zeros(3)
K([10,11,12],[7,8,9])=kgc([1,2,3],[4,5,6])
K([10,11,12],[10,11,12])=kgc([1,2,3],[1,2,3])

%Vector de cargas.
%Carga distribuida.
Rdist2=[0 (P2*Lb/2) (P2*(Lb)^2/12)]' %Reacción en el nudo 2 (Barra B)
Rdist3=[0 P2*Lb/2 -P2*Lb^2/12]' %Reacción en el nudo 3 (Barra B)

%Calcular el campo de desplazamientos.Sólo he utilizado el campo de
%desplazamientos distinto de cero que serían los grados de libertad (7,8,9)
KLL=zeros(6)
KLL([1,2,3],[1,2,3])=K([4,5,6],[4,5,6])
KLL([1,2,3],[4,5,6])=K([4,5,6],[7,8,9])
KLL([4,5,6],[1,2,3])=K([7,8,9],[4,5,6])
KLL([4,5,6],[4,5,6])=K([7,8,9],[7,8,9])
Kinv=inv(KLL)
Fp2=-[Rdist2; 0;0;0]
Fp3=-[ 0;0;0; Rdist3]
Fp=Fp2+Fp3
u=Kinv*Fp

uprueba1=KLL\Fp

ufinal=[0; 0; 0; u ;0;0;0]

u2n=[ufinal(4); ufinal(5); ufinal(6)] %globales desplazamiento del nudo 2
u3n=[ufinal(7); ufinal(8); ufinal(9)] %globales desplazamiento del nudo 3

```

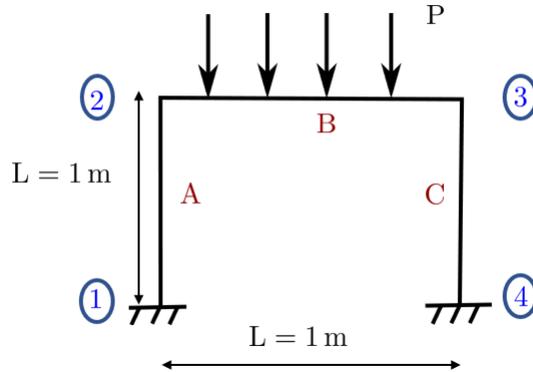
```
%Pempotramiento Barra A
u2l=[0;0;0;Lat'*u2n] %Desplazamiento en A locales
PempA=k1a*u2l

%Pempotramiento Barra C
u3l=[0;0;0;Lct'*u3n] %Desplazamiento en C locales
PempC=k1c*u3l

%Pempotramiento Barra B
ub1=u %Desplazamiento en B locales
PempB=k1b*ub1+[Rdist2;Rdist3] %Sumar la carga distribuida
```

7. Calcular y dibujar el diagrama de esfuerzos de cada una de las barras de la estructura conocido el campo de desplazamientos de la misma.

$$u^{①} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; u^{②} = \begin{bmatrix} 10^{-4} \text{ mm} \\ -2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \\ 0 \text{ rad} \end{bmatrix}; u^{③} = \begin{bmatrix} -10^{-4} \text{ mm} \\ -2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \\ 0 \text{ rad} \end{bmatrix}; u^{④} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

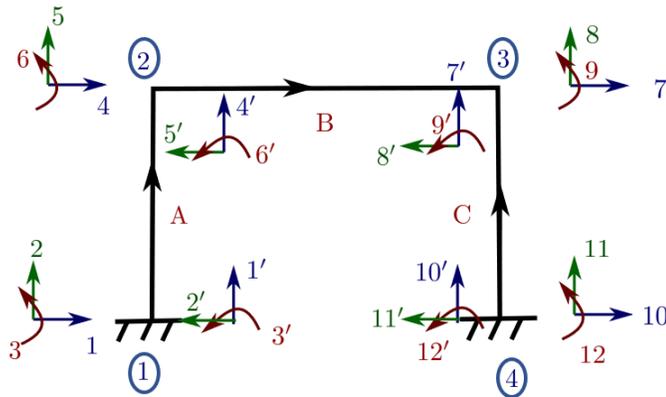


Datos: $L_A = L_B = L_C = 1 \text{ m}$; $A_A = A_B = A_C = 200 \text{ cm}^2$; $E = 210 \text{ GPa}$;

$$I_A = I_B = I_C = 900000 \text{ cm}^4; P = 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Solución

El campo de desplazamientos dado está expresado en las coordenadas globales del problema para cada uno de los nodos de la estructura y con el sentido indicado en cada una de las barras de la figura.



Para dibujar los esfuerzos asociados a cada barra se tienen que expresar los desplazamientos en ejes locales de la misma. En este problema, todas las barras tienen la misma matriz de rigidez elemental (Nodo Rígido-Nodo Rígido),

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Barra A: ① [Nodo Rígido (1,2,3)] → ② [Nodo Rígido (4,5,6)] ($\alpha = 90^\circ$). Los ejes locales (1',2',3',4',5',6') no coinciden con los ejes globales de la estructura (1,2,3,4,5,6) por tanto, el campo de desplazamientos dado debe ser rotado para calcular las fuerzas de empotramiento, siendo la matriz de rotación,

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El campo de desplazamientos locales de la barra A es,

$$u_L^{①} = R^T u^{①} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; u_L^{②} = R^T u^{②} = \begin{bmatrix} -0,0024 \text{ mm} \\ -0,0001 \text{ mm} \\ 0 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

El vector de fuerzas de empotramiento en ejes locales es,

$$P_{emp} = Ku$$

siendo,

$$P_{emp,L}^{①} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,1000 \text{ N} \\ -0,0071 \text{ N} \\ 0,8274 \text{ Nmm} \end{bmatrix}; P_{emp,L}^{②} = 10^5 \begin{bmatrix} -0,1000 \text{ N} \\ 0,0071 \text{ N} \\ -7,9196 \text{ Nmm} \end{bmatrix}$$

Barra B: ② [Nodo Rígido (4,5,6)] → ③ [Nodo Rígido (7,8,9)]. Los ejes locales coinciden con los ejes globales siendo el campo de desplazamientos

$$u^{②} = \begin{bmatrix} 10^{-4} \text{ mm} \\ -2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \\ 0 \text{ rad} \end{bmatrix}; u^{③} = \begin{bmatrix} -10^{-4} \text{ mm} \\ -2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \\ 0 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

La barra B tiene una carga distribuida que hay que sumar al vector de fuerzas de empotramiento,

$$P_{emp} = Ku + P_{emp,distr}$$

siendo,

$$P_{emp,distr}^{(2)} = 10^6 \begin{bmatrix} 0 \text{ N} \\ 0,01 \text{ N} \\ 1,6667 \text{ Nmm} \end{bmatrix}; P_{emp,distr}^{(3)} = 10^6 \begin{bmatrix} 0 \text{ N} \\ 0,01 \text{ N} \\ -1,6667 \text{ Nmm} \end{bmatrix}$$

quedando finalmente el vector de fuerzas de empotramiento total en la barra B,
 $1.0e+05 *$

$$P_{emp}^{(2)} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,0071 \text{ N} \\ 0,1 \text{ N} \\ 7,9196 \text{ Nmm} \end{bmatrix}; P_{emp}^{(3)} = 10^5 \begin{bmatrix} -0,0071 \text{ N} \\ 0,1 \text{ N} \\ -7,9196 \text{ Nmm} \end{bmatrix}$$

Barra C: (4) [Nodo Rígido (10,11,12)] → (3) [Nodo Rígido (7,8,9)] ($\alpha = 90^\circ$). Los ejes locales (10',11',12',7',8',9') no coinciden con los ejes globales de la estructura (10,11,12,7,8,9) por tanto, el campo de desplazamientos dado tiene que rotarse,

$$u_L^{(4)} = R^T u^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; u_L^{(3)} = R^T u^{(3)} = \begin{bmatrix} -0,0024 \text{ mm} \\ 0,0001 \text{ mm} \\ 0 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

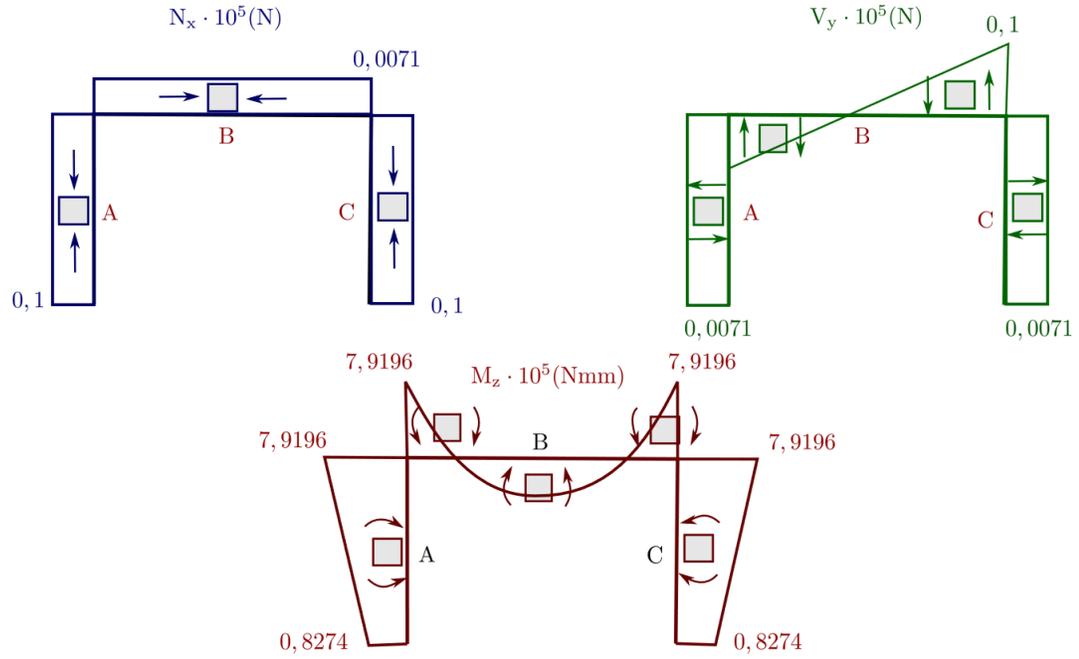
El vector de fuerzas de empotramiento en ejes locales es,

$$P_{emp} = Ku$$

siendo,

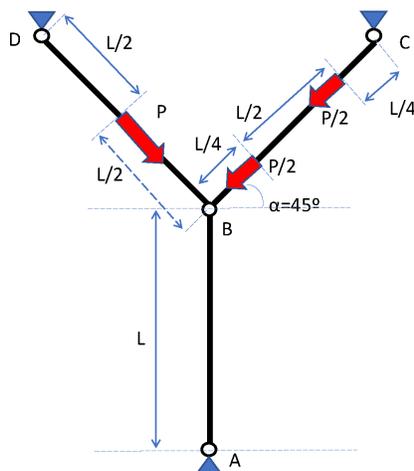
$$P_{emp_L}^{(4)} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,1000 \text{ N} \\ 0,0071 \text{ N} \\ -0,8274 \text{ Nmm} \end{bmatrix}; P_{emp_L}^{(3)} = 10^5 \begin{bmatrix} -0,1000 \text{ N} \\ -0,0071 \text{ N} \\ 7,9196 \text{ Nmm} \end{bmatrix}$$

En el diagrama de esfuerzos de la estructura se observa la simetría de los esfuerzos al ser una estructura simétrica,



8. En la figura se presenta una estructura de barras con varias fuerzas. cada barra tiene una longitud $L=1$ m, un modulo de Young $E=1$ MPa y un Área $A=0.2$ cm². Las cargas vienen definidas por $P=5$ N.

Los grados de libertad de cada nodo son $A=(1,2)$, $B=(3,4)$, $C=(5,6)$, $D=(7,8)$.

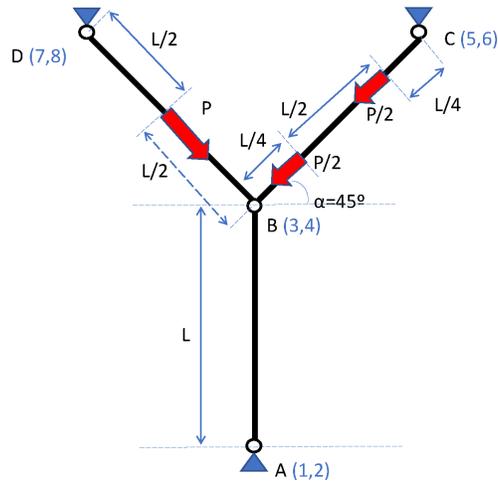


Se pide:

- La matriz de rigidez en ejes locales del elemento que va del nodo B al C (N/m).
- La matriz de rigidez en ejes globales de toda la estructura (N/m).
- Vector global de fuerzas externas (en GDL libres) (N).
- Vector global de desplazamientos (m).
- Fuerzas de reacción en el nodo A (N)

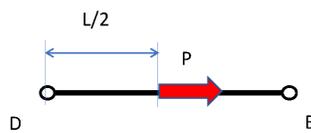
Solución

La estructura dada es



Que vemos solo tiene barras y 8 grados de libertad.

Primero vamos a pasar las fuerza a los nodos, para la barra entre los nodos B y D, tenemos



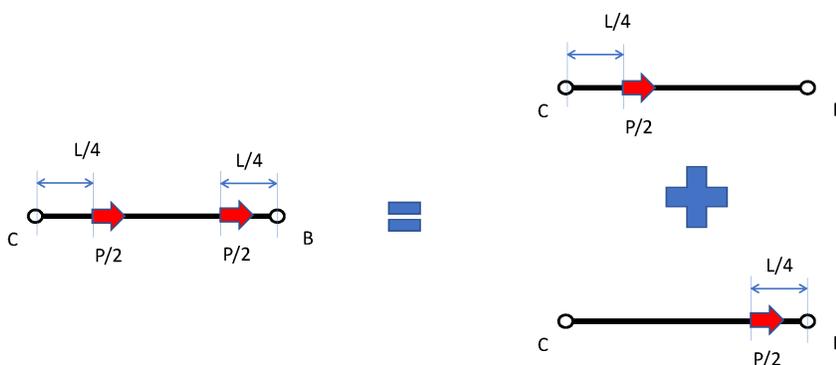
calculando las reacciones suponiéndola aislada e hiperestática, llegamos a

$$H_B = H_D = -\frac{P}{2}$$

Así

$$F_B = F_D = \frac{P}{2}$$

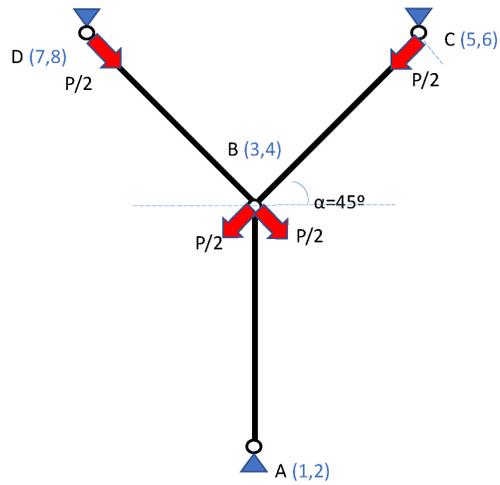
Para la barra entre los nodos B y D, podemos aplicar el principio de superposición y separar el estudio de las dos fuerzas en dos estudios con una fuerza, tal como se ve a continuación, sumándose las reacciones



calculando las reacciones suponiéndola aislada e hiperestática, para cada caso y sumando, llegamos a

$$H_B = H_C = -\frac{P}{2} \frac{1}{4} - \frac{P}{2} \frac{3}{4} = -\frac{P}{2}$$

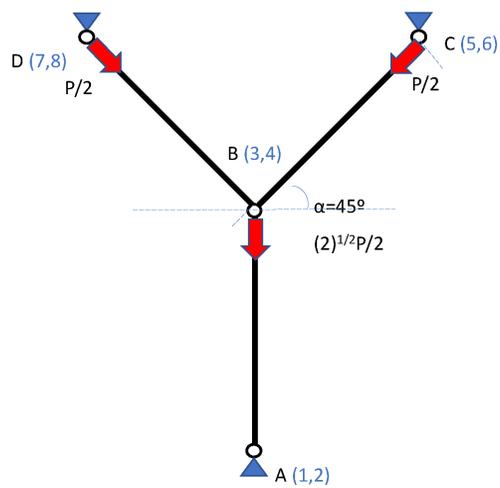
llegamos así al sistema de la figura siguiente donde la fuerzas se han trasladado a los nodos



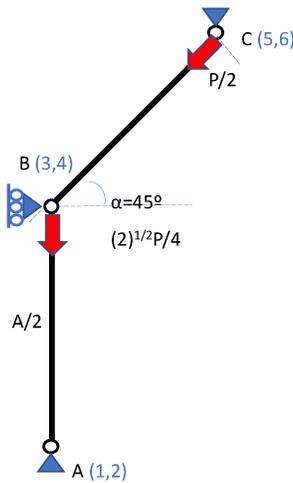
Sumando las fuerzas en el nodo B, obtenemos que la fuerza en B es:

$$F_B = - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} P$$

que nos da la estructura siguiente



y, por tanto, permite estudiar la estructura con simetría tal como se ve en la figura



A continuación haremos la resolución sin contar la simetría, si usáramos la simetría, tendríamos un sistema con 6 grados de libertad donde las contribuciones de los nodos A y B serían la mitad y la fuerza la mitad. Se reconstruiría la matriz entera doblando esas contribuciones y copiando las contribuciones de los GDL 5 y 6 a los GDL 7 y 8.

(1)

La matriz de rigidez en coordenadas locales del nodo B al C, que es la matriz local de una barra, es:

$$k_{BC}^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{EA}{L} = k_{BC}^l = 20 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N/m$$

$$K = 20 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} N/m$$

(2)

Para pasar a coordenadas globales usamos el giro de la matriz local, que es

$$k = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) & -\cos^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) & -\sin^2(\alpha) \\ -\cos^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) & \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha)\sin(\alpha) & -\sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \frac{EA}{L}$$

Para la barra que va del nodo A al B, tendríamos $\alpha = 90$, así su contribución es

$$k_{AB}^g = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la barra que va del nodo B al C, tendríamos $\alpha = 45$, así su contribución es

$$k_{BC}^g = \frac{EA}{2L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la barra que va del nodo B al D, tendríamos $\alpha = 135$, así su contribución es

$$k_{BD}^g = \frac{EA}{2L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz total del sistema se construye sumando todas las contribuciones anteriores en los grados de libertad correspondientes, por facilidad, es interesante recordar que es simétrica. El resultado es:

$$K = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$K = 20 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} N/m$$

(3)

El vector de fuerzas considerando todas las contribuciones (incluso las reacciones y consideradas en dirección positiva) es

$$F = \left(H_A \quad V_A \quad 0 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}P \quad H_C - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad V_C - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad H_D + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad V_D - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^T$$

$$F = (0 \ 0 \ 0 \ -3,54 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T N$$

Los grados de libertad del sistema, viendo las restricciones de la estructura, dan lugar al siguiente vector de desplazamientos

$$U = (0 \ 0 \ u_x^B \ u_y^B \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Así el vector de fuerzas en coordenadas globales en los GDL libres (que son los GDL 3 y 4), es

$$F = (0 \ 0 \ 0 \ -\frac{\sqrt{2}}{2}P \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

(4)

El sistema se resuelve usando la ecuación

$$F = kU$$

donde solo hay que considerar la contribución de los GDL 3 y 4 (por simetrías vemos que solo sería necesario resolver el 4).

$$0 = \frac{EA}{L} u_x^B$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}P = \frac{2EA}{L} u_y^B$$

Así obtenemos el siguiente vector de desplazamientos en coordenadas globales:

$$U = (0 \ 0 \ 0 \ -\frac{\sqrt{2}PL}{4EA} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T = (0 \ 0 \ 0 \ -0,088 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T m$$

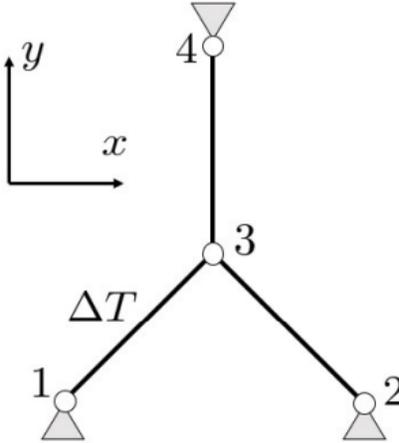
(5)

Finalmente se nos pide las reacciones en el nodo A, para ello usamos la primera y segunda filas de la matriz K por nuestro vector de desplazamiento y obtenemos:

$$H_A = 0$$

$$V_A = \frac{\sqrt{2}}{4}P = 1,77N$$

9. La estructura de la figura está formada por 3 barras articuladas, todas con la misma longitud L , rigidez E y área A . La barra 3-4 es vertical, y las barras 1-3 y 2-3 forman 45° con la horizontal. La barra 1-3 está sometida a un incremento térmico que solicita a toda la estructura.



Se pide:

- Orden de hiperestaticidad de la estructura.
- Número de grados libres.
- Matriz de rigidez reducida.
- Vector de fuerzas nodales reducido.
- Desplazamiento x e y del nudo 3.
- Axil de la barra 2-3, considerando las tracciones positivas y las compresiones negativas.
- Reacción vertical en el apoyo del nodo 4.
- Reacción horizontal total en el apoyo del nodo 1.

Datos: $L = 1$ m; $A = 50$ mm²; $E = 200$ GPa; $\Delta T = 200^\circ\text{C}$; $\alpha = 1,0 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

Solución

- a) Orden de hiperestaticidad de la estructura.**

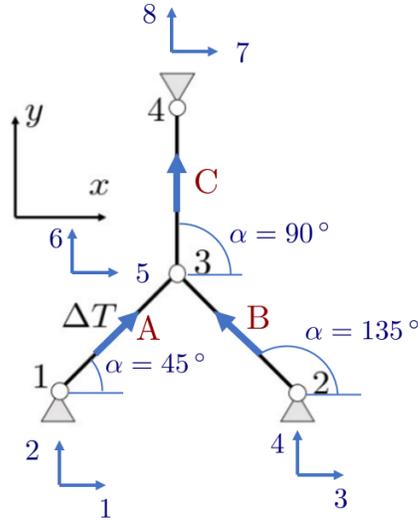
El orden de hiperestaticidad se calculará utilizando la siguiente fórmula para estructuras articuladas:

$$\text{o.h.} = \text{Barras} - 2 \cdot \text{Nudos} + \text{Reacciones} = 3 - 2 \cdot 4 + 6 = 1$$

La estructura es isostática al ser su o.h.=1.

- b) Número de grados libres.**

Los grados de libertad de la estructura son 8, g.d.l=(1,2,3,4,5,6,7,8), siendo libres 2 de ellos (5,6), como se observa en la figura



c) **Matriz de rigidez reducida.**

Previamente, se construye la matriz de la estructura,

$$[K]_g = \begin{bmatrix} k_{11}^A & 0 & k_{13}^A & 0 \\ 0 & k_{22}^B & k_{23}^B & 0 \\ k_{31}^A & k_{32}^B & k_{33}^A + k_{33}^B + k_{33}^C & k_{34}^C \\ 0 & 0 & k_{43}^C & k_{44}^C \end{bmatrix}$$

de dicha matriz, las matrices correspondientes a los grados de libertad libres (5,6), proporcionan la matriz reducida,

$$[K]_r = [k_{33}^A + k_{33}^B + k_{33}^C]$$

Posteriormente, se construyen las matrices elementales

Barra A: ① [Nodo Articulado (1,2)] → ③ [Nodo Articulado (5,6)] ($\alpha = 45^\circ$. Los ejes locales no coinciden con los ejes globales de la estructura)

$$K_L = \begin{bmatrix} k_{11}^A & k_{13}^A \\ k_{31}^A & k_{33}^A \end{bmatrix}$$

Seleccionando, la matriz necesaria para calcular la matriz reducida,

$$[K_{33}^A]_l = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para expresarla en coordenadas globales, se multiplica por la matriz de rotación,

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

quedando,

$$[K_{33}^A]_g = R [K_{33}^A]_l R^T = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Barra B: ② [Nodo Articulado (3,4)] → ③ [Nodo Articulado (5,6)] ($\alpha = 135^\circ$. Los ejes locales no coinciden con los ejes globales de la estructura). El razonamiento es el mismo que para la barra A (modificación del ángulo) quedando finalmente la siguiente matriz,

$$[K_{33}^B]_g = R [K_{33}^B]_l R^T = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Barra C: ③ [Nodo Articulado (5,6)] → ④ [Nodo Articulado (7,8)] ($\alpha = 90^\circ$. Los ejes locales no coinciden con los ejes globales de la estructura). El razonamiento es el mismo que para las barras anteriores, quedando,

$$[K_{33}^C]_g = R [K_{33}^C]_l R^T = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la **matriz reducida** queda al sustituir los datos,

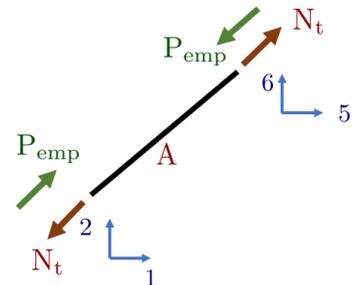
$$[K]_r = [k_{33}^A + k_{33}^B + k_{33}^C] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ (kN/mm)}$$

d) Vector de fuerzas nodales reducido.

La estructura está sometida a un incremento térmico en la barra A, siendo el vector de fuerzas nodales reducido el axial térmico del nudo ③,

$$N_{\text{térmico},l}^{③} = EA \alpha \Delta T$$

$$N_{\text{térmico},g}^{③} = \begin{bmatrix} EA \alpha \Delta T \cos(45^\circ) \\ EA \alpha \Delta T \sin(45^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,41 \\ 1,41 \end{bmatrix} \text{ (kN)}$$



e) Desplazamiento x e y del nudo 3.

El campo de desplazamientos se determina resolviendo el sistema,

$$F^{③} = [k_{33}^A + k_{33}^B + k_{33}^C] \mathbf{u}^{③}$$

Sustituyendo los valores anteriores,

$$\begin{bmatrix} 1,41 \\ 1,41 \end{bmatrix} \text{ (kN)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ (kN/mm)} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_5 \\ \mathbf{u}_6 \end{bmatrix} \text{ (mm)}$$

quedando el campo de desplazamientos,

$$\mathbf{u}_5 = 0,14(mm); \mathbf{u}_6 = 0,07(mm)$$

f) **Axil de la barra 2-3, considerando las tracciones positivas y las compresiones negativas.**

El axil se obtiene utilizando el campo de desplazamiento del apartado anterior. Para ello, tenemos que calcular las fuerzas de empotramiento en los nudos de la barra B y expresarlas en las componentes locales de la barra, sabiendo que el campo de desplazamiento en el nudo ② es nulo,

$$\begin{bmatrix} P^{(2)} \\ P^{(3)} \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} k_{22}^B & k_{23}^B \\ k_{32}^B & k_{33}^B \end{bmatrix}_g \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{u}^{(3)} \end{bmatrix}_g$$

tomando el nudo ③, expresado en locales,

$$[P^{(3)}]_l = R^T [P^{(3)}]_g$$

siendo, el axil la primera fila que sale al multiplicar las matrices

$$N_{23} = \frac{EA}{L} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{u}_5 + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{u}_6 \right) = -500 \text{ N}$$

Nota: Si se realizan los cálculos con el nudo ② se obtiene el mismo valor del axil.

g) **Reacción vertical en el apoyo del nudo 4.**

Se analiza las fuerzas de empotramiento de la barra C, que es donde está la reacción vertical del nudo ④, sabiendo que el campo de desplazamientos es nulo en el nudo ④),

$$\begin{bmatrix} P^{(3)} \\ P^{(4)} \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} k_{33}^C & k_{34}^C \\ k_{43}^C & k_{44}^C \end{bmatrix}_g \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(3)} \\ \mathbf{u}^{(4)} \end{bmatrix}_g$$

expresándolas en locales,

$$[P^{(4)}]_l = R^T [P^{(4)}]_g$$

siendo la reacción vertical la primera fila del sistema de ecuaciones planteado,

$$V_4 = \frac{EA}{L} \mathbf{u}_6 = -0,7 \text{ kN}$$

h) **Reacción horizontal total en el apoyo del nudo 1.**

En este apartado, se analizan las fuerzas de empotramiento de la barra A donde está situado el nudo ①, sabiendo que para esta barra, el campo de desplazamientos del nudo ① es cero. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} P^{(1)} \\ P^{(3)} \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} k_{11}^A & k_{13}^A \\ k_{31}^A & k_{33}^A \end{bmatrix}_g \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(3)} \end{bmatrix}_g$$

siendo la fuerza de empotramiento en la dirección horizontal debida al campo de desplazamientos (coordenadas globales),

$$P_1 = \frac{EA}{L} \left(\frac{-1}{2} \mathbf{u}_5 + \frac{-1}{2} \mathbf{u}_6 \right)$$

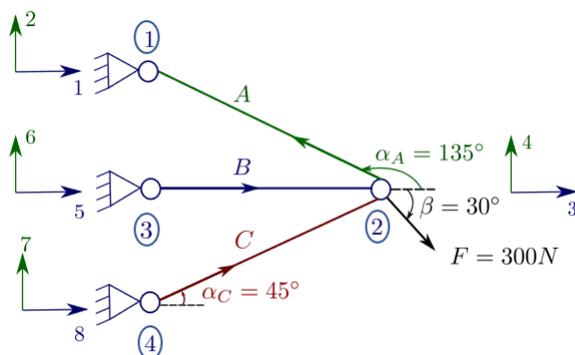
En esta barra, hay un incremento térmico que también se debe de sumar a la fuerza de empotramiento en la misma dirección horizontal y en coordenada globales,

$$N_{\text{térmico,g}} = EA \alpha \Delta T \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto, la reacción horizontal total será,

$$H_1 = \frac{EA \alpha \Delta T \sqrt{2}}{8} = 353,5 \text{ N}$$

10. Usando MATLAB, calcular el campo de desplazamientos de la estructura.



Datos: $L_A = L_C = 2\sqrt{2}\text{ m}$; $L_B = 2\text{m}$; $A_A = A_B = A_C = 200\text{ cm}^2$; $E = 200\text{ MPa}$; $F = 300\text{ N}$

Solución

El campo de desplazamientos de la estructura es,

$$u^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\text{mm}); \quad u^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,4098 \\ -0,6219 \end{bmatrix} (\text{mm}); \quad u^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\text{mm}); \quad u^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\text{mm})$$

```

% Propiedades geométricas de las barras.
La=2000*sqrt(2) %Unidades de mm
Lb=2000
Lc=2000*sqrt(2)
E=200 %Unidades de MPa=N/mm^2
A=(100)*(100) %Unidades de mm^2

%Valor de las cargas.
F=300 %Unidades de N (Carga puntual)

%Condiciones de contorno de los desplazamientos conocidos.
u1=[0,0]' %Nudo articulado sin desplazamiento 2 g.d.l.
u3=[0,0]' %Nudo articulado sin desplazamiento 2 g.d.l.
u4=[0,0]' %Nudo articulado sin desplazamiento 2 g.d.l.

%Construcción de la matriz elemental de la barra A.
k1a=(E*A/La)*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]
%El ángulo de la barra A es 135°
theta=135
Ld1=[cosd(theta) -sind(theta); cosd(theta) sind(theta)]
R1=[Ld1 zeros(2);zeros(2) Ld1]
kga=R1*k1a*R1'

%Construcción de la matriz elemental de la barra B.
k1b=(E*A/Lb)*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]
%El ángulo de la barra B es 0°
kgb=k1b

%Construcción de la matriz elemental de la barra C.
k1c=(E*A/Lc)*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]
%El ángulo de la barra C es 45°
theta=45
Ld2=[cosd(theta) -sind(theta); cosd(theta) sind(theta)]
R2=[Ld2 zeros(2);zeros(2) Ld2]
kgc=R2*k1c*R2'

%Construcción de la matriz general. Cuidado con los grados de libertad
K=zeros(8)
K([1,2],[1,2])=kga([3,4],[3,4])
K([1,2],[3,4])=kga([3,4],[1,2])
K([3,4],[1,2])=kga([1,2],[3,4])
K([3,4],[3,4])=kga([1,2],[1,2])+kgb([3,4],[3,4])+kgc([3,4],[3,4])
K([3,4],[5,6])=kgb([3,4],[1,2])
K([3,4],[7,8])=kgc([3,4],[1,2])
K([5,6],[3,4])=kgb([1,2],[3,4])
K([5,6],[5,6])=kgb([1,2],[1,2])
K([7,8],[3,4])=kgc([1,2],[3,4])
K([7,8],[7,8])=kgc([1,2],[1,2])

%Vector de cargas.
%Carga puntual.
Ft=[0 0 F*cosd(30) -F*sind(30) 0 0 0 0]'

```

```
%Calcular el campo de desplazamientos.
```

```
KLL=K([3,4],[3,4])
```

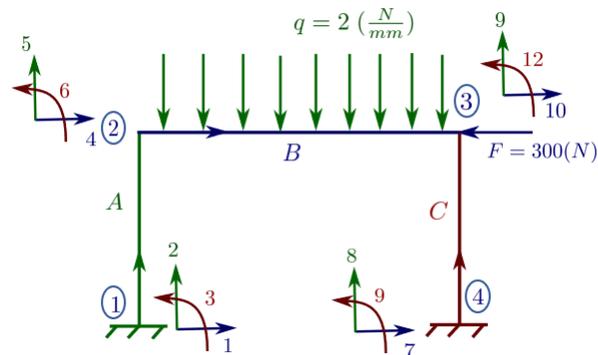
```
Kinv=inv(KLL)
```

```
Fp=[F*cosd(30) -F*sind(30)]'
```

```
u=Kinv*Fp
```

```
ufinal=[0; 0; u ;0;0;0;0]
```

11. Usando MATLAB, calcular el campo de desplazamientos de la estructura.



Datos: $L_A = L_C = 4 \text{ m}$; $L_B = 6 \text{ m}$; $A_A = A_B = A_C = 100 \text{ cm}^2$; $E = 200 \text{ GPa}$;
 $I_A = I_B = I_C = 1500 \text{ cm}^4$; $F = 300 \text{ N}$; $q = 2 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$

Solución

El campo de desplazamientos de la estructura es,

$$u^{①} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\text{mm,rad}); u^{②} = \begin{bmatrix} -0,4240 \\ -0,0122 \\ -0,0014 \end{bmatrix} (\text{mm,rad}); u^{③} = \begin{bmatrix} -0,4295 \\ -0,0118 \\ 0,0016 \end{bmatrix} (\text{mm,rad}); u^{④} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\text{mm,rad})$$

```

% Propiedades geométricas de las barras.
La=4000 %Unidades de mm
Lb=6000
Lc=4000
E=200000 %Unidades de MPa=N/mm^2
Aa=10000 %Unidades de mm^2
Ab=10000
Ac=10000
Ia=15000000 %Unidades de mm^4
Ic=15000000 %Unidades de mm^4
Ib=15000000 %Unidades de mm^4

%Valor de las cargas.
Fpunt=-300 %Unidades de N (Carga puntual)
q=2 %Unidades de N/mm (Carga distribuida)

%Condiciones de contorno de los desplazamientos conocidos.
u1=[0,0,0]' %Nudo rígido sin desplazamiento 3 g.d.l.
u4=[0,0,0]' %Nudo rígido sin desplazamiento 3 g.d.l.

%Construcción de la matriz elemental de la barra A(Nudo rígido 1--> Nudo
%rígido 2] (Coordenadas locales)
kla=[E*Aa/La 0 0 -E*Aa/La 0 0;
      0 12*E*Ia/(La^3) 6*E*Ia/(La^2) 0 -12*E*Ia/(La^3) 6*E*Ia/(La^2);
      0 6*E*Ia/(La^2) 4*E*Ia/(La) 0 -6*E*Ia/(La^2) 2*E*Ia/(La);
      -E*Aa/La 0 0 E*Aa/La 0 0;
      0 -12*E*Ia/(La^3) -6*E*Ia/(La^2) 0 12*E*Ia/(La^3) -6*E*Ia/(La^2);
      0 6*E*Ia/(La^2) 2*E*Ia/(La) 0 -6*E*Ia/(La^2) 4*E*Ia/(La)]

Lat=[cosd(90) -sind(90) 0;sind(90) cosd(90) 0; 0 0 1]
Ra=[Lat zeros(3);zeros(3) Lat] %Matriz de cambio respecto a los ejes globales

% Matriz global de la barra A (Coordenadas globales)
kga=Ra*kla*Ra'

%Construcción de la matriz elemental de la barra B (Nudo rígido 2--> Nudo
%rígido 3](Coordenadas locales=Coordenadas globales)
klb=[E*Ab/Lb 0 0 -E*Ab/Lb 0 0;
      0 12*E*Ib/(Lb^3) 6*E*Ib/(Lb^2) 0 -12*E*Ib/(Lb^3) 6*E*Ib/(Lb^2);
      0 6*E*Ib/(Lb^2) 4*E*Ib/(Lb) 0 -6*E*Ib/(Lb^2) 2*E*Ib/(Lb);
      -E*Ab/Lb 0 0 E*Ab/Lb 0 0;
      0 -12*E*Ib/(Lb^3) -6*E*Ib/(Lb^2) 0 12*E*Ib/(Lb^3) -6*E*Ib/(Lb^2);
      0 6*E*Ib/(Lb^2) 2*E*Ib/(Lb) 0 -6*E*Ib/(Lb^2) 4*E*Ib/(Lb)]

%El ángulo es 0, por tanto, los ejes locales coinciden con los ejes globales.
kgb=klb

%Construcción de la matriz elemental de la barra C(Nudo rígido 4--> Nudo
%rígido 3] (Coordenadas locales)
klc=[E*Ac/Lc 0 0 -E*Ac/Lc 0 0;
      0 12*E*Ic/(Lc^3) 6*E*Ic/(Lc^2) 0 -12*E*Ic/(Lc^3) 6*E*Ic/(Lc^2);
      0 6*E*Ic/(Lc^2) 4*E*Ic/(Lc) 0 -6*E*Ic/(Lc^2) 2*E*Ic/(Lc);

```

```

-E*Ac/Lc 0 0 E*Ac/Lc 0 0;
0 -12*E*Ic/(Lc^3) -6*E*Ic/(Lc^2) 0 12*E*Ic/(Lc^3) -6*E*Ic/(Lc^2);
0 6*E*Ic/(Lc^2) 2*E*Ic/(Lc) 0 -6*E*Ic/(Lc^2) 4*E*Ic/(Lc)]

```

```
Lct=[cosd(90) -sind(90) 0;sind(90) cosd(90) 0; 0 0 1]
```

```
Rc=[Lct zeros(3);zeros(3) Lct] %Matriz de cambio respecto a los ejes globales
```

```
% Matriz global de la barra C (Coordenadas globales)
```

```
kgc=Rc*k1c*Rc'
```

```
%Construcción de la matriz general. Cuidado con los grados de libertad
```

```
K=zeros(12)
```

```
K([1,2,3],[1,2,3])=kga([1,2,3],[1,2,3])
```

```
K([1,2,3],[4,5,6])=kga([1,2,3],[4,5,6]) %Lectura por filas y por columnas
```

```
K([1,2,3],[7,8,9])=zeros(3)
```

```
K([1,2,3],[10,11,12])=zeros(3)
```

```
K([4,5,6],[1,2,3])=kga([4,5,6],[1,2,3])
```

```
K([4,5,6],[4,5,6])=kga([4,5,6],[4,5,6])+kgb([1,2,3],[1,2,3])
```

```
K([4,5,6],[7,8,9])=kgb([1,2,3],[4,5,6])
```

```
K([4,5,6],[10,11,12])=zeros(3)
```

```
K([7,8,9],[1,2,3])=zeros(3)
```

```
K([7,8,9],[4,5,6])=kgb([4,5,6],[1,2,3])
```

```
K([7,8,9],[7,8,9])=kgb([4,5,6],[4,5,6])+kgc([4,5,6],[4,5,6])
```

```
K([7,8,9],[10,11,12])=kgc([4,5,6],[1,2,3])
```

```
K([10,11,12],[1,2,3])=zeros(3)
```

```
K([10,11,12],[4,5,6])=zeros(3)
```

```
K([10,11,12],[7,8,9])=kgc([1,2,3],[4,5,6])
```

```
K([10,11,12],[10,11,12])=kgc([1,2,3],[1,2,3])
```

```
%Vector de cargas.
```

```
%Carga Puntual
```

```
Fp3=[Fpunt 0 0]' %Carga puntual en el nudo 3
```

```
%Carga distribuida.
```

```
Rdist2=[0 (q*Lb)/2 q*(Lb)^2/12]' %Reacción en el nudo 2 (Barra B)
```

```
Rdist3=[0 (q*Lb)/2 (-q*Lb^2)/12]' %Reacción en el nudo 3 (Barra B)
```

```
%Calcular el campo de desplazamientos.Sólo he utilizado el campo de
```

```
%desplazamientos distinto de cero que serían los grados de libertad (4,5,6,7,8,9)
```

```
KLL=zeros(6)
```

```
KLL([1,2,3],[1,2,3])=K([4,5,6],[4,5,6])
```

```
KLL([1,2,3],[4,5,6])=K([4,5,6],[7,8,9])
```

```
KLL([4,5,6],[1,2,3])=K([7,8,9],[4,5,6])
```

```
KLL([4,5,6],[4,5,6])=K([7,8,9],[7,8,9])
```

```
Kinv=inv(KLL)
```

```
Fd2=-[Rdist2; 0;0;0]
```

```
Fd3=-[ 0;0;0; Rdist3]
```

```
Fpu3=[0;0;0;Fp3]
```

```
Fp=Fd2+Fd3+Fpu3
```

```
u=Kinv*Fp
```

```
ufinal=[0; 0; 0; u ;0;0;0]
```



