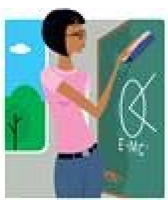
Repaso de GEOMETRIA ANALITICA PLANA y TRIGONOMETRIA

Primera Parte



La Geometría Analítica es un puente entre el Algebra y la Geometría que hace posible resolver algebraicamente (o analíticamente) problemas geométricos. También nos permite resolver geométricamente problemas algebraicos, pero el primer caso es mucho más importante, especialmente cuando se asignan números a conceptos esencialmente geométricos. Por ejemplo, pensemos en la longitud de un segmento de recta, o en el ángulo entre dos rectas. Aun cuando se conozcan exactamente las rectas y los puntos en cuestión, la cantidad que representa la longitud de un segmento, o el ángulo entre dos rectas, en la realidad sólo se puede medir en forma aproximada. Los métodos algebraicos nos permiten calcular de manera exacta esa cantidad.

En este Capítulo 01 daremos las definiciones básicas de la Geometría Analítica. En los siguientes abordaremos otros temas relacionados, que hacen uso de lo presentado en este. Se entiende que los temas acá presentados son un repaso de los temas vistos en el Curso de Nivelación o en la escuela media.

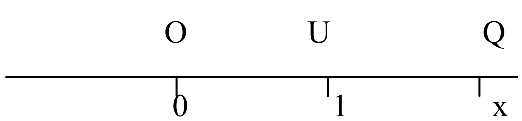
La relación entre el Algebra y la Geometría se forma asignando números a puntos. Por ejemplo, veamos esta asignación de números a los puntos de una recta.

1. Coordenadas en la recta

Primero que nada seleccionamos un par de puntos, 0 y U de la recta, como se muestra en la figura. Al punto **0**, que llamaremos el **origen**, se le asigna **el número cero** y al punto **U** se le asigna **el número uno**. Si definimos a **OU** como **la unidad de longitud** asignamos números a todos los demás puntos de la recta como sigue: a *Q,* en el lado del origen donde se encuentra U, se le asigna el número positivo x, si y sólo si su distancia al origen es x. A un punto *Q* del lado contrario del origen se le asigna el número negativo $-x$ si y sólo si su distancia al origen es x unidades.

Resulta que a cada punto de la recta se le asigna un número real y a cada número real le corresponde un punto en la recta.

De este modo se establece una **escala** en la recta, a la cual llamaremos en adelante un **eje coordenado.** Al número que representa un punto dado se le llama **coordenada** de ese punto, y al punto se le llama la **gráfica** del número.

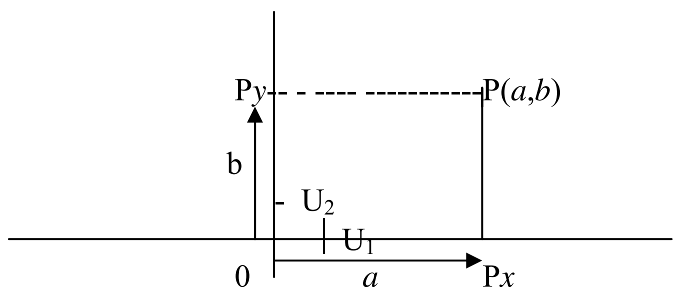


01.1.1 EJERCICIO
Representar en el eje coordenado los puntos cuyas coordenadas son:
-1, 5, 1/3 , -5/8 , 0 , 3/2, 4

2. Coordenadas en el plano

Del mismo modo que se representan los puntos en una recta (espacio unidimensional) mediante números, los puntos en un plano (que es un espacio bidimensional) se pueden representar por pares de números

Para representar **puntos en un plano** mediante **pares de números**, elegimos dos rectas que se



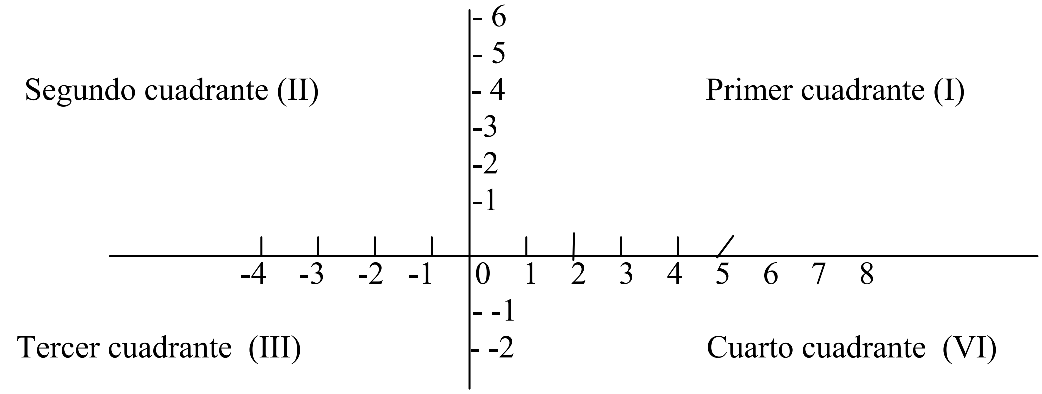
intersectan y establecemos una escala en cada una de ellas, como vemos en la figura. El punto de intersección es el origen, que llamaremos O. Estas dos rectas se llaman **ejes**, y se diferencian mediante símbolos, que normalmente son las letras *x* e *y*. Para un punto dado P en el plano, corresponde un punto P*x* en el eje *x*. Es el punto de intersección del eje *x* con la recta que contiene P y es paralela al eje *y*. (Si P está en el eje *y*, esta recta coincide con el eje *y*.) Igualmente, existe un punto P*y* en el eje *y*, que es el punto de intersección de ese eje y la recta que pasa por P que es paralela al (o que es el) eje *x*. Las coordenadas de esos dos puntos en los ejes son las **coordenadas** de P. Si *a* es la coordenada de P*x*, y *b* es la de P*y*, el punto **P queda representado por *(a, b)***.

a es la **abscisa** de P y ***b*** es la **ordenada** de P.

Se llama **plano Cartesiano** (como sinónimo de **plano coordenado**) al plano en el que se ha introducido un sistema de referencia que asigna a cada punto sus coordenadas.
En un plano coordenado se acostumbra utilizar las siguientes convenciones:
1. Los ejes son perpendiculares entre sí.
2. El eje *x* es una recta horizontal con sus coordenadas positivas hacia la derecha del origen, y el eje *y* es una recta vertical con sus coordenadas positivas arriba del origen.
3. Se usa la misma escala en ambos ejes.

Naturalmente, no es indispensable apegarse a estas convenciones cuando haya otras que sean más cómodas. Con frecuencia se viola la tercera, cuando se trabaja con figuras cuyo trazo podría ser muy difícil si insistiéramos en usar la misma escala en ambos ejes. En esos casos podremos usar libremente escalas distintas, sin olvidar que con ello distorsionamos la figura.

.



Observación: Nótese que todos los puntos en el eje *x* tienen ordenada cero, mientras que los que están en el eje *y* tienen abscisa cero. El *origen tiene sus dos coordenadas iguales a cero, porque está en ambos ejes.*

Los ejes dividen al plano en cuatro regiones, que se llaman **cuadrantes,** los cuales conviene identificar con los números que se muestran en la figura.

En el primer cuadrante abscisa y ordenada positivas. ($x > 0$; $y > 0$)

En el segundo cuadrante abscisa negativa y ordenada positiva. ($x < 0$; $y > 0$)

En el tercer cuadrante abscisa y ordenada negativas. ($x < 0$; $y < 0$)

En el cuarto cuadrante abscisa positiva y ordenada negativa. ($x > 0$; $y < 0$)

Los puntos que están en esos ejes no están en ningún cuadrante.

A las coordenadas de un punto determinadas de esta manera, con frecuencia se les llama coordenadas cartesianas, en honor del matemático y filósofo francés *René Descartes*. En el apéndice de un libro publicado en 1637, Descartes presentó la primera descripción de la Geometría Analítica. A partir de allí vinieron grandes avances en la Matemática que condujeron entre otras cosas, a la invención del cálculo infinitesimal. Sugerencia: buscar en internet quien fue Descartes….

01.2.1 EJERCICIO

a) Representar en el plano coordenado los siguientes puntos:

P(1, 2) ; Q(-2, 3) ; R(3. ½) ; T(3, -3) ; S(0, -4); V(-2, 0); W(-1/2, -4)

b) En el plano coordenado, representar los puntos de abscisa negativa y ordenada >3.

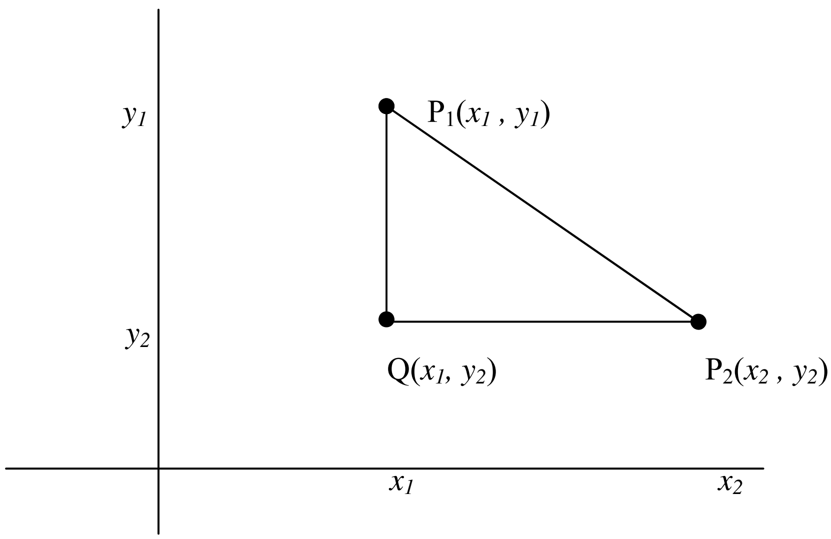
c) En el plano coordenado, representar los puntos de abscisa positiva y ordenada <-1.

d) En el plano coordenado, representar los puntos de abscisa ≥ -2 y ordenada <-1.

e) En el plano coordenado, representar los puntos de abscisa ≥ 1 y ordenada negativa.

3. Fórmula de la distancia entre dos puntos

Dirijamos ahora nuestra atención al problema de determinar la distancia entre dos puntos en el plano. Supongamos que nos interesa calcular la distancia entre los puntos $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ pensemos sobre la figura que sigue.
Para ello vamos a utilizar el Teorema de Pitágoras.



Se traza una recta vertical que pase por P_1 y una horizontal que pase por P_2, que se intersectan en un punto $Q(x_1, y_2)$. Suponiendo que P_1 y P_2 no se encuentren en la misma recta horizontal o vertical, con los segmentos P_1Q, QP_2 y $P_1\ P_2$ son tales que $P_1Q\ P_2$ forman un triángulo rectángulo que tiene su ángulo recto en Q. Podemos emplear ahora el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de P_1 a P_2 :

De acuerdo con lo anterior (interpretación de valor absoluto):
$d(Q, P_1)=|x_2- x_1|$ $\qquad$ $d(Q, P_2)=|y_2- y_1|$
(mantenemos en este caso los valores absolutos, porque deseamos que la fórmula obtenida sea válida para cualquier par de puntos P_1 y P_2 , no tan sólo para una situación como la que vemos en la figura)
Según el teorema de Pitágoras,

$$d(P_1 ,P_2)^2= d(P_1 ,Q)^2 +d(Q ,P_2)^2$$

$$d(P_1,P_2) = \left| \sqrt{d(P_1,Q)^2 + d(P_2,Q)^2} \right|$$

$$\boxed{d(P_1,P_2) = \left| \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \right|}$$

Para deducir esta fórmula supusimos que P_1 y P_2 no estaban en la misma recta horizontal o vertical; sin embargo, la formula es válida aun en esos casos. Verifíquelo!!!

01.1.1 EJEMPLO

a) Calcular la distancia entre $P_1(-2, 4)$ y $P_2(3, 2)$

Solución: Aplicamos directamente la fórmula obtenida antes en este caso es $x_1=-2$, $x_2=3$, $y_1=4$, $y_2=2$ por lo tanto se tiene:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(3-(-2))^2+(2-4)^2}=\sqrt{(3+2)^2+(-2)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$

b) Calcular la distancia entre $P_1(0, -3)$ y $P_2(-3, 5)$

Solución: Aplicamos directamente la fórmula obtenida antes en este caso es $x_1=0$, $x_2=-3$, $y_1=-3$, $y_2=5$ por lo tanto se tiene:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(-3-0))^2+(5-(-3))^2}=\sqrt{(-3)^2+(5+3)^2}=\sqrt{9+64}=\sqrt{73}$$

c) Calcular la distancia entre $P_1(0, 0)$ y $P_2(-3, 4)$

Solución: Aplicamos directamente la fórmula obtenida antes en este caso es $x_1=0$, $x_2=-3$, $y_1=0$, $y_2=4$ por lo tanto se tiene:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(-3-0))^2+(4-0)^2}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

01.3.2EJEMPLO: Determinar si *A(1, 7), B(0, 3) y C(-2, -5)* están en una recta (si son *colineales*).
Solución:

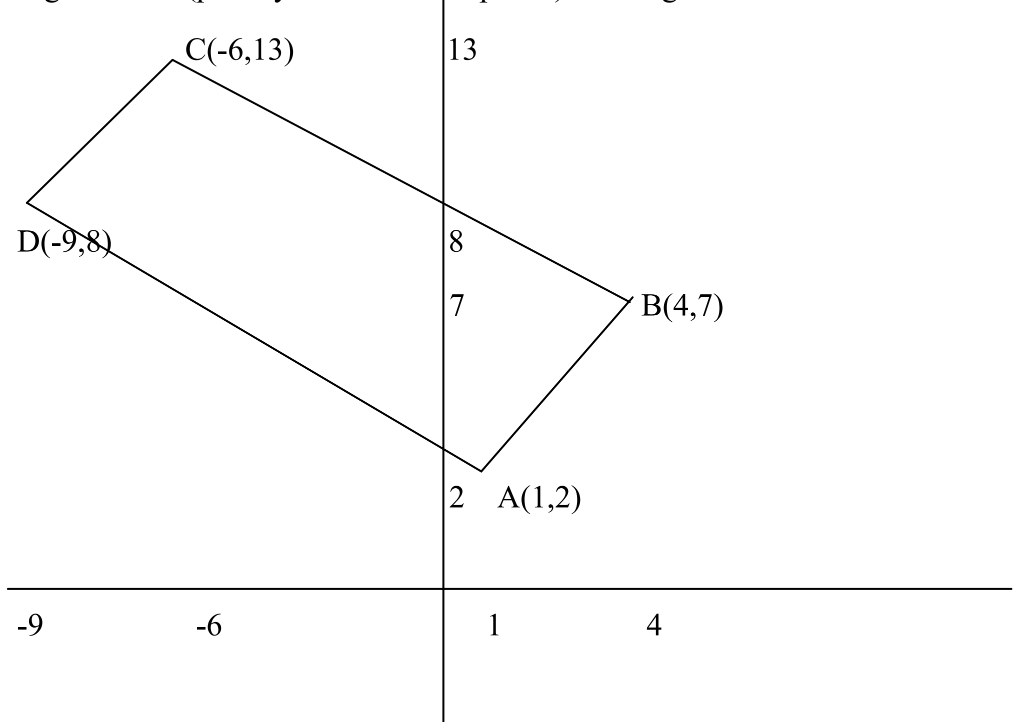
$$d(A,B)=\sqrt{(0-1)^2+(3-7)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$$
$$d(A,C)=\sqrt{(-2-1)^2+(-5-7)^2}=\sqrt{9+144}=\sqrt{153}$$
$$d(B,C)=\sqrt{(0+2)^2+(3+5)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}$$

- Los tres puntos deben ser *colineales,* pues sino formarían un triángulo, contradiciendo que la longitud del lado mayor debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros lados. Verifique!!!

01.3.3 EJEMPLO:

Demostrar que *A(1, 2), B(4, 7), C(-6, 13)* y *D(-9, 8)* son vértices de un rectángulo.

Solución*:* Los puntos están graficados (para ayudarnos a interpretar) en la figura.



Calculemos las longitudes de los lados:

$$d(A,B)=\sqrt{(4-1)^2+(7-2)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{36}=6$$

$$d(A,D)=\sqrt{(-9-1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{100+36}=\sqrt{136}$$

$$d(B,C)=\sqrt{(-6-4)^2+(13-7)^2}=\sqrt{100+36}=\sqrt{136}$$

$$d(D,C)=\sqrt{(-9+6)^2+(8-13)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{36}=6$$

Que las longitudes sean iguales dos a dos nos permite asegurar que es un paralelogramo. Veamos si es un rectángulo, si las diagonales de ese paralelogramo son iguales, entonces la figura es un rectángulo. Por consiguiente, determinaremos las longitudes de las diagonales:

$$d(A,C)=\sqrt{(-6-1)^2+(13-2)^2}=\sqrt{49+121}=\sqrt{170}$$

$$d(B,D)=\sqrt{(-9-4)^2+(8-7)^2}=\sqrt{169+1}=\sqrt{170}$$

**Como este paralelogramo tiene sus diagonales iguales, podemos concluir que es un rectángulo.

01.3.4 EJERCICIO

En cada caso **graficar** y calcular la distancia entre:

1. P(-1, 2) y Q(-3, 2)
2. P(2, 2) y Q(2,-1)
3. P(3, -4) y Q(0, 2)
4. P(-3, 1) y Q(1,0)

01.3.5 EJERCICIO
En cada caso representar y hallar el perímetro del triángulo de vértices:
a) A(-2, 1) ; B(2, 4) ; C(0, 0)

b) A(1, -3) ; B(-2, 1) ; C(-2, 4)

01.3.6 EJERCICIO
a) Determinar las coordenadas del punto medio M entre dos puntos P(a,b) y Q (c,d) cualesquiera
Observación: M es el punto que cumple: d(P,M) + d(M,Q) = d(P,Q) y d(P,M) = d(M,Q)
Grafique!! (idea: que pasa con $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) \ldots$)
b)Halle el punto medio del segmento AB, si A(2, 3) y B(4, 2). Grafique.

c) Halle el punto medio del segmento DE, si D(4,0) y E(0,-3). Grafique.

01.3.7 EJERCICIO
a) Hallar un punto del *eje x* que equidiste (estar a igual distancia) de (2, 3) y de (4, 0). Dibujar.
b) Hallar un punto del *eje y* que equidiste de (0, 0) y de (2, -4). Dibujar.

01.3.8 EJERCICIO
En cada caso representar y hallar el perímetro del triángulo de vértices:
a) A(-2, 1) ; B(2, 4) ; C(0, 0)

b) A(1, -3) ; B(-2, 1) ; C(-2, 4)

Segunda Parte

En lo que sigue se hará una aplicación de la Geometría Analítica: encontrar ecuaciones que representan distintos lugares geométricos del plano. Esto es, expresiones algebraicas que ligan las coordenadas de los puntos de esos lugares geométricos. **Todo punto que cumple esas ecuaciones está en el lugar geométrico y ninguno más.**

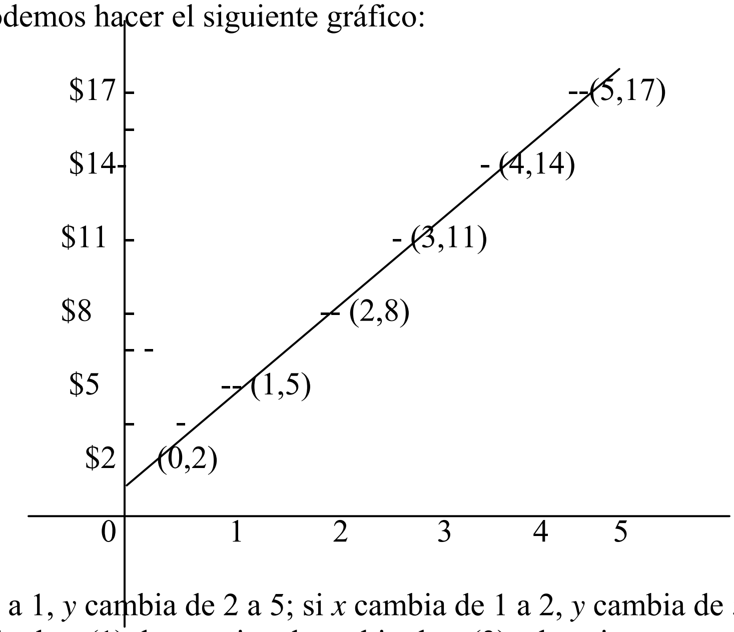
En este apartado del Capítulo 01 se recordarán distintas formas de ecuaciones de rectas para las distintas situaciones que las rectas pueden presentar en el plano coordenado. Para otros lugares geométricos lo haremos en otro Capítulo.

4 Ecuaciones de Rectas

Una empresa de computación ofrece un servicio de conexión telefónica que cuesta $2 mensuales más $3 por cada hora de tiempo de conexión efectiva. En la siguiente tabla vemos la tarifa:

(x)	*Horas*	*de*	*conexión*			
x	0	1	2	3	4	5
y	2	5	8	11	14	17
(y)			Costo			

Con los datos podemos hacer el siguiente gráfico:



Si x cambia de 0 a 1, y cambia de 2 a 5; si x cambia de 1 a 2, y cambia de 5 a 8, y así siguiendo. Para igual cambio de x (1), hay un igual cambio de y (3), el cociente entre el cambio en y sobre el cambio en x es constante he igual a 3.

$$\frac{cambio\ de\ y}{cambio\ de\ x}=\frac{5-2}{1-0}=\frac{8-5}{2-1}=\frac{11-8}{3-2}=\frac{14-11}{4-3}=\frac{17-14}{5-4}=3$$

Al graficar los puntos de la tabla vemos que ellos representan una recta del plano.

Nuestro objetivo es determinar en forma general una relación algebraica de las coordenadas (x , y) de los puntos que están sobre cualquier recta.

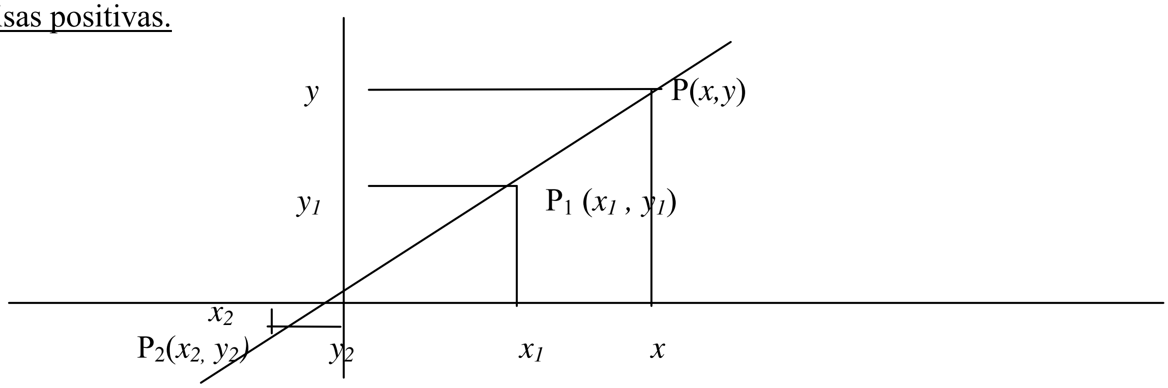
Consideremos dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ tales que satisfagan la relación:

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2} \quad \text{con } x_1 \neq 0 \ \text{ y } \ x_2 \neq 0$$

La razón entre la ordenada y la abscisa de esos dos puntos es constante y se designa por ***m.***

Todo punto $P(x,y)$ con la propiedad que $\frac{y}{x}=m$

estará sobre la misma recta que pasa por P_1 , P_2 como se puede ver en la figura y justificar por semejanza de triángulos. Además <u>***m*** es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas positivas.</u>

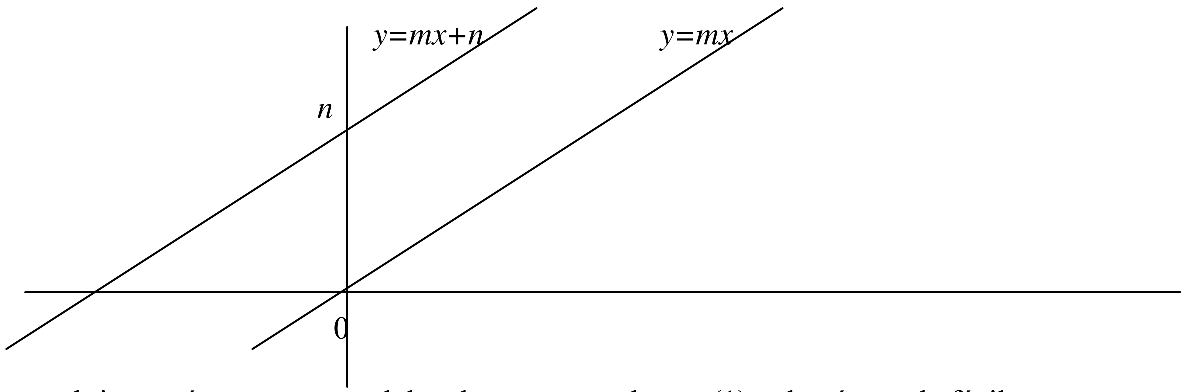


El conjunto de puntos $P(x,y)$ tales que

$$(1) \qquad y = m.x$$

es una recta que pasa por el origen O y llamaremos ***pendiente*** al valor ***m.***
Equivalentemente, la ecuación $y = m.\, x$ es de una recta que pasa por el origen O y tiene pendiente m.

Para comprobarlo basta con reemplazar las coordenadas de O(0,0) en la ecuación y ver que la satisface.
Consideremos la ecuación: (2) $y=m.x+n$
Los valores de y se han modificado en una misma cantidad ***n*** .



Luego se obtiene así una recta paralela a la representada por (1), además, es de fácil comprobación que el punto $R(0,n)$ satisface la ecuación (2).

Al valor ***n*** se lo llama ***ordenada al origen***.
Una ecuación como (2) se llama **forma explícita** de la ecuación de la recta, queda claro (*explícitas*) su pendiente y su ordenada al origen.

<u>Observación 1</u>: cualquiera sea el par de puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ distintos, que satisfaga la ecuación (2) (o la ecuación (1) en cuyo caso $n = 0$) se tiene que :

$y_1 = m.x_1+n$
$y_2 = m.x_2+n$, con lo cual

$$n = y_1 - m.x_1 = y_2 - m.x_2$$
$$y_1 - y_2 = m\,(x_1 - x_2)$$

en el caso que $x_1\text{-}x_2 \neq 0$, se tiene : $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m$

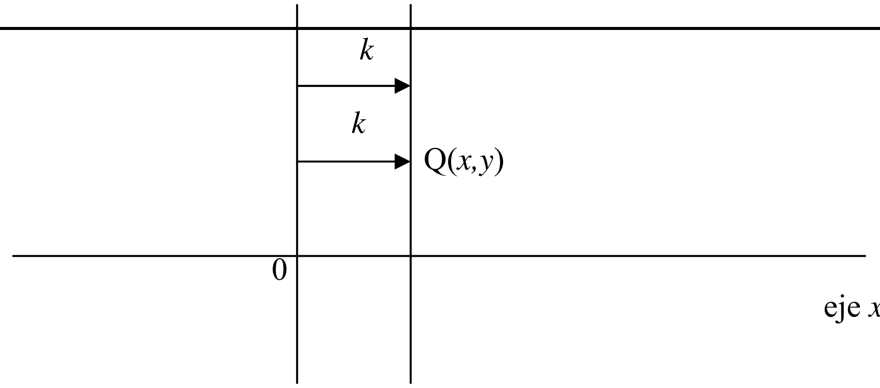
Es decir que el cambio en y sobre el cambio en x (entre dos puntos distintos que están sobre la recta) es constante e igual a la pendiente m.

01.4.1 EJEMPLO
Determinar la pendiente de la recta dada por la ecuación $y\text{-}3x=2$

Solución: Llevamos a la forma explícita: $y =3x+2$, por lo tanto $m =3$

Observemos que hemos obtenido dos formas de ecuaciones de recta, la (1) representa una recta que pasa por el origen y tiene pendiente m y la (2) que también representa una recta que tiene pendiente m y cuya ordenada al origen es n, es claro que (1) es un caso particular de (2). Por otra parte, por la observación anterior si la recta tiene pendiente m, dos puntos distintos que estén sobre ella deben tener distinta abscisa. Por lo tanto las **rectas que podemos representar con las ecuaciones del tipo a la (2) son rectas no paralelas al eje *y*.** Para determinar ecuaciones de las rectas que sean paralelas al eje y hagamos la siguiente especulación: imaginemos varios puntos distintos que estén sobre

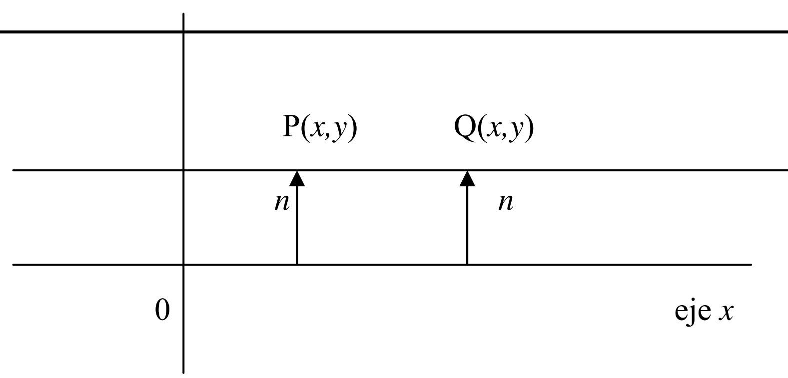
una recta paralela al eje *y*, qué tienen en común? Cualquiera sea su distancia al eje y, la abscisa de esos puntos es la misma, eso es lo que caracteriza a esos puntos.
Luego una ecuación de la recta es (3) $x=k$ si k es la abscisa de cualquiera de sus puntos.



Analicemos que significa que la pendiente *m* sea 0. Esto es que dos puntos distintos que están sobre la recta tienen igual ordenada, ya que el cambio de ordenadas en ese caso es 0, y eso pasa para cualquier par de puntos.

Luego, si la pendiente es 0 todos los puntos tienen igual ordenada, es decir ellos están sobre una **recta paralela al eje *x***. Una ecuación que representa esa situación es

(4) $y = n$, siendo n la ordenada de cualquiera de sus puntos.



Dada $y = m.x + n$ se puede llevar a la forma : $-m.x + y - n = 0$
de donde resulta que:

(5)	$a.x + b.y + c = 0$

Expresión que representa una recta para *a y b* números reales no simultáneamente nulos. Ella nos da todas las posibilidades analizadas previamente. Considere que pasa para los casos en que anule alguno de los parámetros *a, b* ó *c* (con la restricción que *a* y *b* no sean 0 simultáneamente) y observe que puede obtener las ecuaciones de tipo (1), (3) ó (4).

La expresión del tipo **(5)** se llama **ecuación general de la recta.**

Observación: Por lo anteriormente dicho **una misma recta puede tener más de una ecuación que la represente. Basta multiplicar una de esas ecuaciones por una constante no nula para obtener otra ecuación que representará la misma recta, por ello se debe decir *una ecuación de la recta* y no la ecuación de la recta**

01.4.2 EJEMPLO

Determinar la pendiente y la ordenada al origen de la recta determinada por la ecuación:

$3x-2y+4=0$

Solución: Para ello despejamos y, $2\ y = 3x + 4$,

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{4}{2} \text{ por lo tanto}$$

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

luego $m = \frac{3}{2}$ y $n = 2$.

01.4.3 EJEMPLO

Hallar una ecuación de la recta que pasa por el punto *P(3,-2)* y es paralela al eje *y*.

Solución: Haga el dibujo!! Todos los puntos de una recta paralela al eje *y* tienen igual abscisa. Si *P(3,-2)* es uno de sus puntos todos ellos tendrán abscisa *3*, por lo cual una ecuación será $x = 3$.

Se sabe que **dos puntos determinan una recta**. Además **única**. Por lo tanto si se conocen las coordenadas de dos puntos que estén en una recta se podrá determinar una ecuación de la misma.

En los ejercicios que siguen y siempre que deba tratar un ejemplo geométrico haga un dibujo, al menos un esquema para orientarse.

01.4.4 EJERCICIO
Hallar una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q del plano.
Idea para la solución: use la forma implícita, sabe que los dos puntos la satisfacen, y considere la Observación 1.

01.4.5 EJERCICIO
Hallar una ecuación de la recta que pasa por P(-3,1) y por Q(2,2)

01.4.6 EJERCICIO
Hallar una ecuación de la recta que es paralela a la determinada por $3-4y=2x$ y pasa por A(3,-7)

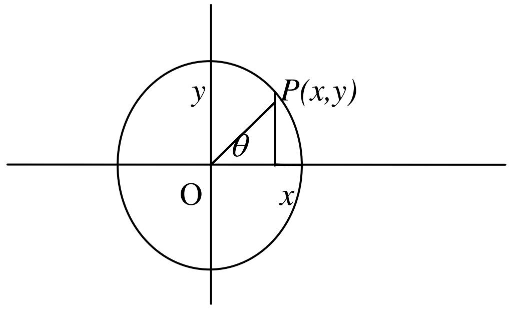
01.4.7 EJERCICIO
¿ Son los puntos P(-2,3) , R(0,5), S(1,-1) puntos de la recta de ecuación $3x-2y=0$?

01.4.8 EJERCICIO
Hallar ecuaciones para las rectas que contienen a los lados del triángulo de vértices R(2,3), S(1,0), Q(5,2).

5. Recuerdos de Trigonometría

Recordemos que hay definiciones básicas que son una herramienta importante que sirven para medir lados y ángulos de los triángulos. Las fórmulas que relacionan las medidas de los lados y ángulos de un triángulo rectángulo fueron el inicio de esta rama de la Matemática.
Surgieron así las relaciones trigonométricas de ***seno, coseno, tangente*** entre otras. Luego se extendieron estas relaciones a triángulos en general y luego siguieron definiciones para ángulos de medidas entre 0^0 y 360^0 (que medidos en radianes se corresponden a 0 y 2π , son ángulos cuyas representaciones están dentro de una circunferencia). Posteriormente se extendieron para valores de ángulos cuya medida es un número real cualquiera, dando origen a algunas funciones de dominio contenido en los números reales, que se conocen como funciones trigonométricas y que se estudian y aplican en Análisis Matemático y Física, por ejemplo.
En esta materia usaremos principalmente de las relaciones trigonométricas para ángulos entre 0^0 y 360^0. Se aplicaran en los temas: vectores y números complejos.

Consideremos inicialmente un ángulo $\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, inscripto en una circunferencia, el lado final del ángulo intersecta a la circunferencia en un punto P(x, y):



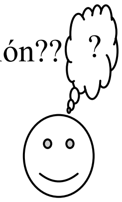
Se llaman $sen\ \theta = \dfrac{y}{d(O,P)}$

$$cos\ \theta = \frac{x}{d(O,P)}$$

Estas definiciones están dadas por las relaciones entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo (desde ya que se asume que el triángulo es no degenerado, es decir que existe efectivamente como tal, ninguno de los lados tiene longitud nula). Estas definiciones iniciales se pueden generalizar para cuando x ó y es 0. Si P(x, y) está sobre alguno de los ejes $x = 0$, ó $y = 0$. Estas relaciones permiten obtener:

$$\begin{cases} x = d(O,P).\cos\theta \\ y = d(O,P).sen\,\theta \end{cases}$$

También se define $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$. En qué caso NO está definida esta relación??



Sabe Ud. dividir por 0???

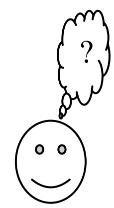
Dibuje un ángulo $\theta, 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ donde $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ no está definida?

Explique qué vinculo encuentra entre las tres relaciones definidas??

Si el ángulo $\theta, \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$ se definen de igual manera: $sen\ \theta = \dfrac{y}{d(O,P)}$

$cos\ \theta = \dfrac{x}{d(O,P)}$ y $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

Desde ya que para estos casos de medida de ángulos no permiten la interpretación de los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo.



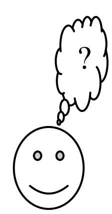
Dibuje un ángulo $\theta, \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$ donde $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ no está definida?

OBSERVACIONES IMPORTANTES:

❖ Cuando θ, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, por propiedades de los triángulos rectángulos es fácil darse cuenta que $x \le d(O,P)$ y que $y \le d(O,P)$, por lo cual

$cos\ \theta = \dfrac{x}{d(O,P)}$ y $sen\ \theta = \dfrac{y}{d(O,P)}$ son ***números reales menores que 1 y positivos.***

❖ Si el ángulo θ, $\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$, por estar el *P(x ,y)* sobre la circunferencia es fácil observar que $|x| \le d(O,P)$ y que $|y| \le d(O,P)$, por lo cual



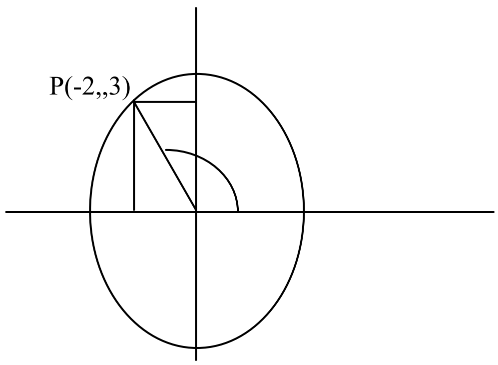
$cos\ \theta = \dfrac{x}{d(O,P)}$ y $sen\ \theta = \dfrac{y}{d(O,P)}$ son ***números reales***

y en valor absoluto son menores que 1

❖ Los valores de $\tan\theta = \frac{y}{x}$ en los ángulos que está definida, es un ***número real*** y que para esta relación puede tomar uno de todos los valores reales que existen.

01.5.1. EJEMPLO

a) Dibujar un ángulo θ del segundo cuadrante (es decir que θ, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$) con punto sobre la circunferencia de intersección, P (-2, 3) . Veamos cómo son las relaciones trigonométricas:



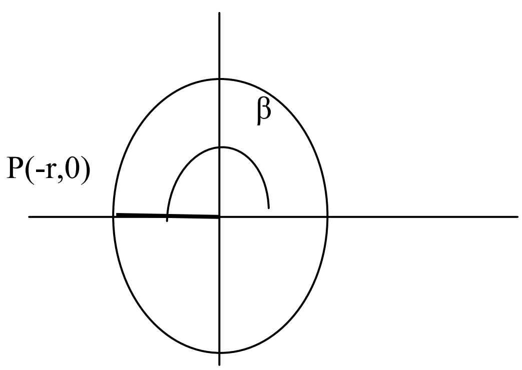
$$d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$cos\ \theta = \frac{x}{d(O,P)} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$sen\ \theta = \frac{y}{d(O,P)} = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{y}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

b)Dibujar un ángulo β de medida π radianes inscripto en una circunferencia de centro en O(0.0) y radio r. Y hallar los valores de seno, coseno, tangente.



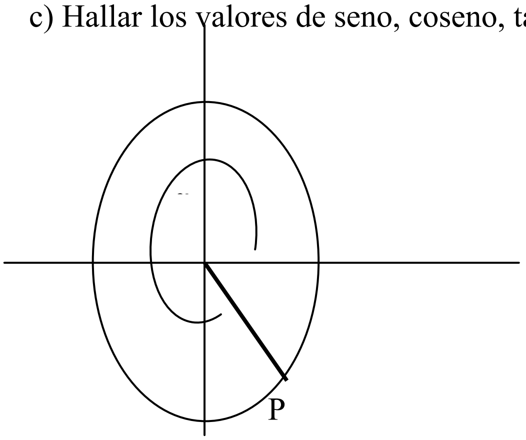
$$d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-r)^2 + 0^2} = \sqrt{r^2} = r$$

$$cos\ \beta = \frac{x}{d(O,P)} = \frac{-r}{r} = -1$$

$$sen\ \beta = \frac{y}{d(O,P)} = \frac{0}{r} = 0 \quad \text{y}$$

$$\tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-r} = 0$$

c) Hallar los valores de seno, coseno, tangente de $\alpha = 317^0$.



Dibujamos aproximadamente un ángulo de 317^0.
El punto en que se corta a la circunferencia es un punto.
P de abscisa positiva y ordenada negativa,
Como no tenemos esos valores, en este caso para el cálculo se utilizara una calculadora.

Para esta tarea se requiere una <u>calculadora científica</u>. Si no tiene una pero si tiene una computadora hay una dentro de las herramientas del Windows.
<u>Si no sabe usar la calculadora, es el momento de aprender!!!!!</u>

Si sabemos antes que nada que el coseno es positivo, el seno es negativo y también la tangente:
$\cos \alpha = 0{,}7313$, $\operatorname{sen} \alpha = -0{,}6819$ y $\tan \alpha = -0{,}9325$
Estos valores son aproximados y en general dependen del grado de aproximación que queramos es el número de cifras decimales a considerar. Por lo general son suficientes cuatro.

d) Hallar los valores (aproximados) de la abscisa y la ordenada del punto P del ítem c) si se sabe que la distancia del origen del sistema de coordenadas O a P es 5.

$$\begin{cases} x = d(O,P).\cos\alpha = 5.0{,}7313 \\ y = d(O,P).sen\,\alpha = 5.(-0{,}6819) \end{cases}$$ Por lo tanto: $x = 3{,}6567$ e $y = -3{,}4099$

01.5.2. EJERCICIO
a) Hallar las equivalencias entre las medidas de los siguientes ángulos (siempre dibuje!!!):
45^0 equivale a ……..radianes
π equivale a ....^{0}
60° equivale a ....radianes
210° equivale a ....radianes
$\frac{\pi}{3}$ equivale a ....^{0}
b) Hallar los valores de seno, coseno, tangente de los ángulos dados en a).

01.5.3. EJERCICIO
a) Determine el punto P(-3, -5) en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de origen O. Dibuje una circunferencia con centro en O. Marque el ángulo α que determina el eje positivo de las abscisas y el segmento OP.
b) En que cuadrante esta el ángulo α ?
c) Halle los valores de seno, coseno, tangente de α.

01.5.4. EJERCICIO
En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 134 cm y uno de los ángulos agudos mide 35^0.
Hallar la medida de los catetos y del otro ángulo.