

COMPRESION Y FLEXION BIAxIAL DE
COLUMNAS RECTANGULARES DE CONCRETO

JUAN CARLOS MOLANO TORO

Trabajo de Investigación presentado como requisito parcial para optar al título de Ingeniero Civil

Asesor: RENAN DARIO ZAPATA
Ing. Civil, U. de M.

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

1986

Dedico este trabajo a:

Francisco Antonio y María Gabriela, mis abuelos, para recuerdo de su memoria.

Aura Rosa Toro, mi madre, por ser quien me ha dado la fuerza y el ahínco para su realización.

Tatiana, por su delicadeza y finura.

PREFACIO

Este trabajo se originó con motivo de los pocos estudios sobre el tema, realizados a nivel de pregrado universitario en la ciudad de Medellín. Tiene como características las siguientes:

- Mostrar algunos de los métodos propuestos por los investigadores que tratan de dar una solución aproximada al problema de flexión biaxial y compresión combinadas.
- Mostrar las diferentes técnicas usadas en la solución de los ejemplos.
- Hacer un análisis comparativo entre métodos aproximados y métodos numéricos de gran alcance.
- Lograr que el ingeniero diseñador tome conciencia de la importancia del tema y escoja algún método que satisfaga sus necesidades.

Las dificultades encontradas en la elaboración del tema son las siguientes:

- Disponibilidad en el medio de un programa de computador que haga un análisis y diseño, satisfactorios, de secciones de concreto reforzado, sometidas a compresión y flexión biaxial combinadas.
- Análisis comparativo entre los diversos métodos encontrados en la bibliografía usual.
- La escasez de bibliografía con respecto al tema y en especial sobre métodos numéricos de gran alcance, que resuelvan en forma aproximada el problema.

Se hace la siguiente aclaración: Este trabajo no trata de dar una solución exacta al problema. Sólo expone algunos pocos métodos dados por investigadores de gran prestigio.

Este trabajo va dirigido, muy especialmente, al ingeniero diseñador de estructuras; pues, tiene que enfrentarse en su trabajo diario, a uno de los problemas más importantes en la aplicación de la Ingeniería Civil: El diseño de co-

lumnas.

El estudiante quiere expresar los más sinceros agradecimientos, por la inmensa colaboración brindada, a las siguientes personas:

- Renán Darío Zapata. Ingeniero Civil (U. de M.); por su brillante asesoría en el tema.
- Gabriel Ignacio Gutiérrez. Ingeniero Civil (U.N.); por la exposición de su método numérico y la solución de 50 ejemplos.
- Jaime Alonso Acevedo. Ingeniero Civil (U.N.); por la selección de tales ejemplos.
- Asesorías Estadísticas - Procesamiento de Datos; por la paciente transcripción del trabajo.
- Iván Darío Botero. Dibujante Técnico; por la elaboración de las figuras.

TABLA DE CONTENIDO

		pág.
	INTRODUCCION	viii
1.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	15
2.	METODOS QUE SE ACERCAN A LA SOLUCION DEL PROBLEMA	17
2.1.	METODOS DE SUPERPOSICION	17
2.2.	METODOS GRAFICOS	18
2.2.1.	Abacos adimensionales de interacción .	18
2.2.2.	Nomograma adimensional	19
2.3.	METODOS NUMERICOS	20
2.3.1.	Método del ingeniero Francisco Morán Cabré	20
2.3.2.	Método del ingeniero Gabriel Ignacio Gutiérrez	21
2.3.2.1.	Descripción general del problema	21
2.3.2.2.	Suposiciones sobre los materiales	22
2.3.2.3.	Solución del problema inverso	23
2.3.2.4.	Solución del problema directo	26
2.4.	METODOS BASADOS EN APROXIMACION DE LA SUPERFICIE DE INTERACCION O DE FALLA .	28
2.4.1.	Métodos de Bresler	30
2.4.1.1.	De la carga recíproca	30
2.4.1.2.	Del contorno de carga	31
2.4.1.2.1.	Variante uno	33
2.4.1.2.2.	Variante dos	33
2.4.2.	Métodos del contorno de carga de la PCA	34
2.4.2.1.	Método de las sub e hiperelipses	36
2.4.2.2.	Aproximación mediante líneas rectas ..	36
2.4.2.2.1.	Variante uno	37
2.4.2.2.2.	Variante dos	37
2.4.2.3.	Uso de las fórmulas del ingeniero Albert J. Gouwens	38
2.4.3.	Método de la elipse con factor de	

	pág.
	corrección 40
2.4.4.	Método del ingeniero Francisco Morán Cabré 41
2.4.5.	Métodos del ingeniero Jiménez Montoya 42
2.4.5.1.	Variante uno 42
2.4.5.2.	Variante dos 42
2.4.6.	Método de Pannell 43
2.5.	METODOS BASADOS EN LA REDUCCION A UNA FLEXION RECTA 43
2.5.1.	Métodos del ingeniero Jiménez Montoya 44
2.5.1.1.	Variante uno 44
2.5.1.2.	Variante dos 45
2.5.2.	Método del ingeniero Santiago Montejo Rozo 45
2.5.3.	Método del ingeniero Francisco Morán Cabré 46
3.	EJEMPLOS NUMERICOS 47
3.1.	SOLUCION PASO A PASO DE UN EJEMPLO POR LOS METODOS EXPUESTOS 47
3.1.1.	Método numérico del ingeniero Francis- co Morán Cabré 48
3.1.2.	Método numérico del ingeniero Gabriel Ignacio Gutiérrez 48
3.1.3.	Métodos basados en aproximación de la superficie de interacción o de falla . 49
3.1.3.1.	Métodos de Bresler 49
3.1.3.1.1.	De la carga recíproca 49
3.1.3.1.2.	Método del contorno de carga 51
3.1.3.1.2.1.	Variante uno 51
3.1.3.1.2.2.	Variante dos 53
3.1.3.2.	Métodos del contorno de carga de la PCA 55
3.1.3.2.1.	Método de las sub e hiperelipses 55
3.1.3.2.2.	Aproximación mediante líneas rectas .. 63
3.1.3.2.2.1.	Variante uno 63
3.1.3.2.2.2.	Variante dos 64
3.1.3.3.	Método de la elipse con factor de corrección 67
3.1.3.4.	Método del ingeniero Francisco Morán Cabré 68
3.1.3.5.	Métodos del ingeniero Jiménez Montoya 70
3.1.3.5.1.	Variante uno 70
3.1.3.5.2.	Variante dos 70
3.1.3.6.	Método de Pannell 71
3.1.4.	Métodos basados en la reducción a una flexión recta 73
3.1.4.1.	Métodos del ingeniero Jiménez Montoya 73

	pag.
3.1.4.1.1.	Variante uno 73
3.1.4.1.2.	Variante dos 75
3.1.4.2.	Método del ingeniero Santiago Montejo Rozo 76
3.1.4.3.	Método del ingeniero Francisco Morán Cabré 77
3.2.	TABULACION DE EJEMPLOS RESUELTOS 79
3.2.1.	Datos secciones 79
3.2.2.	Valores de la cuantía ($P\%$) 79
4.	ANALISIS DE RESULTADOS DE EJEMPLOS .. 85
5.	RECOMENDACIONES 89
5.1.	CRITERIO DEL ERROR RELATIVO 89
5.1.1.	Error relativo $\geq 30\%$ 89
5.1.2.	Error relativo $\leq -10\%$ 90
5.2.	CRITERIO DE MANEJABILIDAD DE CADA METODO 90
5.3.	CRITERIO DE LA DESVIACION ESTANDAR Y EL PROMEDIO DE LOS ERRORES RELATIVOS 91
6.	CONCLUSIONES 92
BIBLIOGRAFIA 94

LISTA DE FIGURAS

	pág.
FIGURA 1. Diagrama tensión-deformación para una sección de concreto con acero uniformemente distribuido	100
FIGURA 2. Superficie de falla S1	101
FIGURA 3. Superficie de falla S2	101
FIGURA 4. Representación gráfica del método de carga recíproca	102
FIGURA 5. Superficie de falla S3	102
FIGURA 6. Superficie biaxial de interacción	103
FIGURA 7. Eje neutro referenciado al eje mayor	103
FIGURA 8. Contorno de carga en plano de constante P_n sobre superficie de falla S3	104
FIGURA 9. Contorno de carga adimensional bajo constante P_n	104
FIGURA 10. Superficie de falla S4	105
FIGURA 11. Aproximación mediante líneas rectas	105
FIGURA 12. Línea de interacción bajo P_n constante ..	106
FIGURA 13. Líneas de interacción de Pannell	106
FIGURA 14. Discretización de una sección de concreto reforzado para el método numérico del ingeniero Francisco Morán Cabré	107

INTRODUCCION

La principal función de las columnas es llevar cargas compresivas. Sin embargo, cada vez que luces o cargas desiguales ocurren, el interior de las columnas está sujeto a momentos biaxiales. Mientras el análisis y diseño de tales columnas está basado sobre las familiares y simples hipótesis comunes a muchos cálculos de concreto reforzado, la inclinación del eje neutro, etc., se hace imposible derivar ecuaciones de las que ayudas simples de diseño podrían producirse.

Consecuentemente, a diferencia de las columnas rectangulares sujetas a momentos uniaxiales no hay, en el presente, ningún método simple y generalmente aceptado como diseño directo de columnas con momentos biaxiales.

Una solución posible a éste problema es usar una columna circular con un gran número suficiente de barras para justificar la hipótesis de que la resistencia de la columna

es la misma en todas las direcciones. La situación biaxial entonces retorna a la más simple condición uniaxial. Sin embargo, por razones arquitectónicas y simplificaciones de construcción, las columnas rectangulares continúan siendo populares de manera que la biaxialidad debe existir muy frecuentemente ya sea que el diseñador quiera o no reconocer su importancia.

En el pasado un tratamiento muy común de tales columnas en construcciones aporricadas era el de ignorar la biaxialidad y diseñar para dos casos de flexión uniaxial independientes. Además, si una excentricidad o momento era relativamente pequeño, entonces a menudo era permitido que el diseñador hiciera una simplificación e ignorara los efectos de excentricidad en esa dirección. Estos procedimientos fueron grandemente facilitados por las extremadamente útiles y populares ayudas de diseño tales como las publicadas por los comités 340 y 341 de la Sociedad Americana del Concreto (ACI). Sin embargo, tales publicaciones tratan principalmente flexión uniaxial con solamente unos pocos casos de flexión biaxial simétrica para columnas cuadradas.

Un tratamiento mas explícito de la biaxialidad debería ser

ventajoso por las siguientes razones, las primeras de las cuatro son técnicas; las dos últimas, económicas:

1. Muchos estudios admirables han hecho posible un tratamiento mucho más detallado de los efectos biaxiales producidos por el viento y acciones sísmicas, que en el pasado no era posible. Avances en el computador y el software mejorado han facilitado la modelación de estructuras tridimensionales. Estos modelos y programas producen valores tridimensionales de fuerzas y momentos sobre elementos y pueden también manipular muchos casos de carga. Así, el diseñador está ahora forzado a considerar múltiples casos de fuerzas y momentos biaxiales.

2. El reconocimiento de la biaxialidad introduce dos nuevos problemas que no se presentan cuando se considera solamente la flexión uniaxial:

- En la situación uniaxial es usualmente claro cuál de las diferentes combinaciones de fuerza P y momento M es la más crítica. En contraposición, en muchas situaciones biaxiales es difícil decir cuál de los diferentes casos de tripletas (P, M_x, M_y) , es la única

crítica para el diseño.

- El más eficiente valor de t/b no es inmediatamente claro.

3. Las dos últimas décadas han producido cambios sustanciales en los materiales usados en la construcción con concreto. Concretos de alta resistencia son ahora obtenibles en algunas áreas. Concretos ligeros alcanzan popularidad a medida que su resistencia incrementa y al mismo tiempo concretos reforzados con fibra alcanzan grandes campos de aplicación en los Estados Unidos. Las propiedades de todos los concretos pueden modificarse por confinamiento del refuerzo. Consecuentemente un rápido método de diseño con tratamiento explícito de biaxialidad y con la capacidad de considerar un rango amplio de materiales debería ser de gran beneficio en la profesión del ingeniero diseñador.
4. La flexión biaxial debería ser particularmente considerada en el diseño y análisis de columnas rectangulares que se usan en pórticos de concreto sometidos a carga lateral cíclica.

5. La economía es el objetivo fundamental del ingeniero diseñador. La predicción de muchos métodos matemáticos de optimización es probablemente más que una necesidad en muchos proyectos de ingeniería donde la economía implica muchas consideraciones que ha menudo no se incluyen en el procedimiento matemático común. En tales situaciones un diseñador puede tomar una decisión económica satisfactoria si dispone de un grupo de soluciones aceptables.

6. Cualquier método o ayuda de diseño que le ahorre tiempo al diseñador debería reducir los sobrecostos de un proyecto.

Expuestas las anteriores razones se tratará de cumplir los siguientes objetivos:

- Mostrar en qué forma los investigadores han prestado atención al tema creando métodos que se aproximen al diagrama de interacción de una columna sometida a flexión biaxial y compresión.

- Mostrar la facilidad, rapidez y convergencia de los dife-

rentes métodos aproximados con las ayudas de diseño disponibles.

- Verificar la afirmación dada por el ingeniero Joaquín Marín en la página 57 de la referencia [9] con relación a dispersiones del 300% con respecto al método "exacto" en la solución de un ejemplo por métodos aproximados.
- Verificar la validez de las fórmulas dadas por el ingeniero Albert Gouwens relativas al cálculo del coeficiente ϕ para uso de métodos aproximados que involucran dicho coeficiente.
- Verificar si los métodos expuestos son conservadores o están del lado de la inseguridad; se tomará para efectos de comparación un método numérico de gran alcance dado por el ingeniero Francisco Morán Cabré.

En este trabajo se exponen métodos gráficos, numéricos, de reducción a dos flexiones rectas o uniaxiales tratando de aproximar la superficie de interacción, de reducción a una flexión recta. Algunos de estos métodos están basados en pruebas experimentales; tratan de acercarse a la solución de uno de los problemas más frecuentes en la práctica del

ingeniero diseñador. Por tanto, se espera dar una fácil comprensión del tema.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La comprobación de una sección de hormigón armado solicitada en flexión biaxial es un problema encontrado con relativa frecuencia en la práctica, ya que a esta sollicitación están sometidas no sólo las secciones simétricas que soportan una fuerza actuando fuera del plano de simetría sino también todas aquellas que no son simétricas por su forma o por la disposición de sus armaduras o barras.

Si bien es cierto que hasta ahora la gran mayoría de las secciones se calculaban en flexión recta, también lo es que, mientras que para flexión recta existían fórmulas y ábacos de aplicación inmediata, universalmente aceptadas y difundidas, no era éste el caso de flexión biaxial en donde se debe determinar la posición del eje neutro, usando para ello las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio. Como estas ecuaciones no pueden expresarse analíticamente tomando como variables parámetros que fijen la posición del eje neutro, el problema no admite solución analítica

exacta debiendo recurrirse a métodos aproximados. Tales métodos si son numéricos, gráficos, de reducción a dos flexiones rectas, de reducción a una sola flexión, exigen el tanteo de distintas posiciones del eje neutro o de varias iteraciones, siendo de cálculo laborioso y por ello adecuados para su resolución mediante ordenador electrónico o manualmente con algunas ayudas de diseño disponibles.

(Ver Figura 7)

2. METODOS QUE SE ACERCAN A LA SOLUCION DEL PROBLEMA

2.1. METODOS DE SUPERPOSICION.

Se han sugerido algunos métodos de superposición que reducen la flexión biaxial a flexión alrededor de los ejes principales de la sección lo que permite utilizar procedimientos para flexión uniaxial. Morán [12] ha estudiado estos métodos para el caso de refuerzo simétrico.

Uno de los métodos es determinar el refuerzo requerido para cada uno de los casos de carga (P_n, M_{ny}) y (P_n, M_{nx}) por separado, acumulando el refuerzo resultante.

En forma alterna se puede tomar cualquier línea recta que pase por el punto en que actúa P_n e intercepte los dos ejes coordenados en los puntos $(c_x, 0)$ y $(0, c_y)$. El refuerzo requerido para cada uno de los casos de carga P_n en los respectivos puntos se determina por separado y se obtiene el refuerzo resultante por suma.

En otro método, se reemplaza P_n por dos fuerzas estáticamente equivalentes P_{nx} y P_{ny} localizadas en los puntos $(c_x, 0)$ y $(0, c_y)$ de los ejes. Se determinan por separado y luego se suman los refuerzos requeridos para cada uno de los casos de carga P_{nx} , tomando la resistencia del concreto como $(F'_c * P_{nx})/P_n$, y P_{ny} tomando la resistencia del concreto como $(F'_c * P_{ny})/P_n$.

Estos métodos no se incluirán en el análisis comparativo posterior debido a que carecen de bases teóricas, pueden producir errores del lado de la inseguridad o pueden llegar a ser excesivamente conservadores.

2.2. METODOS GRAFICOS.

2.2.1. Abacos adimensionales de interacción.

Una primera alternativa a la resolución iterativa rigurosa consiste en la preparación de ábacos adimensionales como los que se observan en la Figura 2 [13] y en el ábaco en roseta [8] que se anexan.

El principal inconveniente de los ábacos adimensionales radica en la necesidad de disponer de la serie correspondien-

te a la disposición de armaduras elegida. Fácilmente, se comprende que, para trabajar rigurosamente, sería necesario un número muy grande de dichas series, pues habría que respetar no sólo la distribución de las barras, sino también los recubrimientos. El trabajo que representa la preparación de cada serie, aún disponiendo de un ordenador electrónico, y la molestia que supone la utilización de un elevado número de ábacos, aconsejan en la práctica utilizar unas pocas disposiciones y reducir las otras a ellas, aún a costa de perder exactitud en la asimilación, siempre que sea del lado de la seguridad. Esto, por otra parte, hace necesaria la interpolación, tanto si se trata de un dimensionamiento como si se trata de una comprobación.

2.2.2. Nomograma adimensional.

El nomograma que se presenta en la Figura 4 [13] recoge en forma condensada todos los ábacos de una serie, a costa de una pérdida de aproximación (menor del 5%), error comparable al de lectura.

El empleo del nomograma es rápido y cómodo pues no requiere interpolaciones y se aplica indistintamente al dimensionamiento y a la comprobación. Tiene el inconveniente de

que se necesitan varias series y son escasas las publicaciones.

2.3. METODOS NUMERICOS.

2.3.1. Método del ingeniero Francisco Morán Cabré.

Consiste en encontrar una posición del eje neutro tal que con ella, la carga de agotamiento P de la sección tenga excentricidades e_x , e_y iguales a las de la sollicitación mayorada o de cálculo P_n . En la obtención de P se utilizan valores minorados o de cálculo de las resistencias de los materiales. Si se verifica $P_n \leq P$ la sección está del lado de la seguridad.

El método se caracteriza por:

- Descomposición de la sección en elementos caracterizados por su área S_i y por las coordenadas (X_i, Y_i) de su centro de gravedad.
- Cálculo de la proyección de su distancia al origen sobre la normal al eje neutro y se averigua cuál es la fibra

más comprimida y la armadura menos comprimida.

- Cálculo de la deformación en un punto cualquiera de la sección.

- Cálculo de tensiones a partir de la deformación.

- Se hallan las resultantes:

$$P = \sum S_i \sigma_i \quad , \quad M_x = \sum S_i \sigma_i Y_i \quad , \quad M_y = \sum S_i \sigma_i X_i$$

- Se obtienen las excentricidades $e'_x = M_y/P$, $e'_y = M_x/P$, si no son iguales a las dadas se procede a diversos tanteos. El procedimiento siempre es convergente.

Ver con más detalle la descripción del método y del programa en fortran en las referencias [8], [12].

2.3.2. Método del ingeniero Gabriel Ignacio Gutiérrez.

2.3.2.1. Descripción general del problema.

Dados P_n , M_{nx} , M_{ny} encontrar el área de acero A_s que debe

suministrarse a una columna de sección rectangular con refuerzo uniformemente repartido a lo largo del perímetro. Se conocen F_y , F'_c y la geometría. De la Figura 1 se puede observar que el perímetro del refuerzo está dado por la expresión: $P_m = 2*(L_x - 2*R) + 2*(L_y - 2*R)$

$$\alpha = A_s/P_m$$

No se hará aquí ninguna simplificación diferente de las que se plantean en la práctica común del diseño de columnas a flexo-compresión.

2.3.2.2. Suposiciones sobre los materiales.

Se tendrá en cuenta la sección C.10.2 del Código Colombiano de Construcciones Sismo-resistentes [1]:

- Deformaciones proporcionales a la distancia al eje neutro (C.10.2.2).
- Máxima deformación unitaria del concreto $\epsilon_{cu} = 0.003$ (C.10.2.3).

- Para el acero:

$$\text{Si } F_s < F_y : F_s = E_s * \epsilon_s \quad (C.10.2.4)$$

$$F_s \geq F_y : F_s = F_y$$

$$E_s = 2040000 \text{ Kg./cm}^2 \quad (C.8.5.2)$$

- Para el concreto: Sólo puede resistir compresión (C.10.2.5). 'Se supone un esfuerzo en el concreto de $0.85 * F'_c$..., etc.' (C.10.2.7).

2.3.2.3. Solución del problema inverso.

Supóngase conocido la profundidad del eje neutro 'c', la inclinación de dicho eje 'θ' y el área de acero por unidad de longitud 'A' (Ver Figura 1).

Con estas tres variables es posible entrar a calcular los valores de P, M_x, M_y a los que debe estar sometida la sección. Este cálculo debe hacerse separadamente para el acero y el concreto de la siguiente manera:

- Contribución del concreto. De acuerdo a las hipótesis dadas en el numeral 2.3.2.2. se tiene:

$$P_c = 0.85 * F'_c * A$$

$$M_{xc} = 0.85 * F'_c * U_x$$

$$M_{yc} = 0.85 * F'_c * U_y$$

Donde:

A = área de la región sombreada 1-2-3

U_x = primer momento de área con respecto al eje X de la región sombreada

U_y = primer momento de área con respecto al eje Y de la región sombreada

Debe notarse que estas tres cantidades son función de las variables ' θ ' y ' c '.

- Contribución del acero. Como se dijo en el numeral 2.3.2.1. se ha tenido en cuenta una distribución uniforme del acero en el perímetro, esto permite simplificar el cálculo de su contribución en la obtención de P, M_x , M_y usando integrales para tal fin.

Sea un pequeño elemento de refuerzo de longitud diferencial " ds " identificado por las coordenadas (X,Y) de su centro de gravedad. Como se conoce el estado de deforma-

ción de la sección es posible obtener tal estado para este elemento. Supóngase que es $\epsilon_s = \epsilon_s(X, Y)$, que obviamente depende de las coordenadas (X, Y) . Debe notarse que en el cálculo de ϵ aparecen involucradas de nuevo las variables (θ, c) .

Conocido el estado de deformación del elemento diferencial es posible determinar el estado de esfuerzos de la siguiente manera:

$$F_s = F_s(X, Y) = \begin{cases} E_s * \epsilon_s(X, Y) & \text{si } |\epsilon_s| < F_y / E_s \\ F_y & \text{si } |\epsilon_s| > F_y / E_s \end{cases}$$

Este análisis debe hacerse con todos y cada uno de los elementos posibles de la sección.

De acuerdo a lo anterior se tiene:

$$P_s = \int_{P_m} F_s(X, Y) * d * ds$$

$$M_{xs} = \int_{P_m} F_s(X, Y) * Y * d * ds$$

$$M_{ys} = \int_{P_m} F_s(X, Y) * X * d * ds$$

- Cálculo de P, Mx, My. Sumando contribuciones se obtiene

$$P_n = P_c + P_s = 0.85 * F'c * A + \alpha * \int_{P_m} F_s(X, Y) * ds$$

$$M_{nx} = M_{xc} + M_{xs} = 0.85 * F'c * U_x + \alpha * \int_{P_m} F_s(X, Y) * Y * ds$$

$$M_{ny} = M_{yc} + M_{ys} = 0.85 * F'c * U_y + \alpha * \int_{P_m} F_s(X, Y) * X * ds$$

2.3.2.4. Solución al problema directo.

El problema propuesto inicialmente exigía el cálculo de As conociendo Pn, Mnx, Mny y el problema resuelto en 2.3.2.3. hacía lo contrario. Por tanto, debe usarse algún método para resolver el sistema de ecuaciones:

$$P_n = P_n(\alpha, \theta, c)$$

$$M_{nx} = M_{nx}(\alpha, \theta, c)$$

$$M_{ny} = M_{ny}(\alpha, \theta, c)$$

Donde Pn, Mnx, Mny son dados y se pretende calcular (α, θ, c) .

Supóngase una solución inicial $(\alpha_0, \theta_0, c_0)$ donde:

$$P_0 = P(\alpha_0, \theta_0, c_0)$$

$$M_{0x} = M_x(\alpha_0, \theta_0, c_0)$$

$$M_{0y} = M_y(\alpha_0, \theta_0, c_0)$$

Del cálculo se sabe que:

$$dP = \partial P / \partial \alpha * d\alpha + \partial P / \partial \theta * d\theta + \partial P / \partial c * dc$$

$$dM_x = \partial M_x / \partial \alpha * d\alpha + \partial M_x / \partial \theta * d\theta + \partial M_x / \partial c * dc \quad (1)$$

$$dM_y = \partial M_y / \partial \alpha * d\alpha + \partial M_y / \partial \theta * d\theta + \partial M_y / \partial c * dc$$

Como en general (P_0, M_{0x}, M_{0y}) no coinciden con (P_n, M_{nx}, M_{ny}) , se puede considerar:

$$dP = P_n - P_0 \quad , \quad dM_x = M_{nx} - M_{0x} \quad , \quad dM_y = M_{ny} - M_{0y}$$

Para hacer uso de la ecuación (1) se hace necesario conocer las derivadas parciales involucradas, cuestión que no es posible en este caso. Este inconveniente puede salvarse haciendo un cálculo aproximado de tales derivadas de la siguiente manera:

$\partial F(X, Y, Z) / \partial X = (F(X + \Delta X, Y, Z) - F(X, Y, Z)) / \Delta X$ para ΔX pequeño.

Una vez conocidas las derivadas parciales la ecuación (1) se resuelve, en donde las incógnitas son $(d\alpha, d\theta, dc)$. Estos resultados son un nuevo punto de partida para una nueva iteración, ya que:

$$d\alpha = \alpha_1 - \alpha_0 \quad : \quad \alpha_1 = \alpha_0 + d\alpha$$

$$d\theta = \theta_1 - \theta_0 \quad : \quad \theta_1 = \theta_0 + d\theta$$

$$dc = c_1 - c_0 \quad : \quad c_1 = c_0 + dc$$

Con estos nuevos valores se repite el proceso hasta obtener la precisión deseada.

2.4. METODOS BASADOS EN LA APROXIMACION DE LA SUPERFICIE DE INTERACCION O DE FALLA.

El concepto de superficie de falla ha sido presentado por Bresler [3] y Pannell [14]. La resistencia última nominal de una sección bajo flexión biaxial y compresión es una función de tres variables, P_n , M_{nx} y M_{ny} que también pueden expresarse en términos de fuerza axial P_n actuando con

excentricidades $e_y = M_{nx}/P_n$ y $e_x = M_{ny}/P_n$ con respecto a los ejes coordenados 'X' y 'Y'.

Tres tipos de superficie de falla pueden definirse. En el primer tipo S1, las variables utilizadas a lo largo de los tres ejes ortogonales son P_n , e_x , y e_y como se muestra en la Figura 2; en el segundo tipo S2, las variables son $1/P_n$, e_x , y e_y como se muestra en la Figura 3; y en el tercer tipo S3, las variables son P_n , M_{nx} , y M_{ny} como se muestra en la Figura 5.

Bresler ha desarrollado un procedimiento de análisis muy útil [3] usando la superficie recíproca S2. El tercer tipo de superficie de falla S3 es una extensión tridimensional del diagrama de interacción para flexión uniaxial y compresión. Un número de investigadores han hecho aproximaciones a S3 para utilizar en el análisis y en el diseño. Bresler [3] y Parme, Nieves y Gouwens [16] han sugerido aproximaciones prácticas para el uso de la superficie S3.

(Ver Figura 6)

2.4.1. Métodos de Bresler.

2.4.1.1. De la carga recíproca.

Bresler, en un intento para desarrollar un procedimiento real para el análisis, sugirió [3] aproximar un punto $(1/P_{n1}, e_{xa}, e_{yb})$ sobre la superficie recíproca de falla S^2 por un punto $(1/P_i, e_{xa}, e_{yb})$ sobre un plano S'^2 pasando a través de los puntos A, B, y C (Figura 4). Cada punto sobre la superficie verdadera es aproximado por un plano diferente; esto es, la superficie completa de falla está definida por un infinito número de planos.

La ecuación de cada plano está dada por la expresión:

$$1/P_n = 1/P_i \geq 1/P_x + 1/P_y - 1/P_o \quad (2)$$

Donde:

P_x : carga última cuando sólo está presente la excentricidad uniaxial e_{yb}

P_y : carga última cuando sólo está presente la excentricidad uniaxial e_{xa}

P_o : carga última cuando no hay excentricidad

P_i : carga última bajo la flexión biaxial. Debe ser mayor o igual a P_n .

Resultados de pruebas experimentales muestran que la ecuación (2) es razonablemente exacta cuando la flexión no gobierna el diseño. La ecuación debería usarse solamente cuando $P_n \geq 0.10 * F'c * A_g$, siendo A_g el área de la sección de concreto.

En la solución de un ejemplo que se hará más adelante se mostrará la técnica que facilitará el manejo de éste y de todos los demás métodos.

2.4.1.2. Del contorno de carga.

Este método implica el corte de la superficie de falla S3 en un valor constante P_n para dar un diagrama de interacción llamado "contorno de carga" que relaciona M_{nx} y M_{ny} . En otras palabras, la superficie completa S3 puede considerarse encerrada por una familia de curvas (contornos de carga) correspondientes a valores constantes de P_n , que si se dibujan unas superpuestas sobre las otras en un plano

Único, se observarán como si fueran curvas de nivel de un plano topográfico (Figura 5).

La expresión general para estas curvas pueden aproximarse por una ecuación adimensional de interacción de la forma:

$$(M_{nx}/M_{nox})^{\uparrow\alpha_1} + (M_{ny}/M_{noy})^{\uparrow\alpha_2} \leq 1.0 \quad (3)$$

Donde:

M_{nx} y M_{ny} son los momentos biaxiales nominales en la dirección de los ejes 'X' y 'Y' respectivamente.

M_{nox} y M_{noy} son los momentos nominales uniaxiales con flexión considerada en la dirección de los ejes 'X' y 'Y' respectivamente.

α_1 , α_2 son exponentes que dependen de la cantidad, distribución y localización del refuerzo, de las dimensiones de la columna y de las propiedades de resistencia y elasticidad del acero y del concreto.

\uparrow indica exponenciación.

Bresler sugiere que es aceptable tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; y además, indica que típicamente α varía de 1.15 a 1.55. Y así,

la ecuación (3) queda:

$$(M_{nx}/M_{nox})^{\uparrow\alpha} + (M_{ny}/M_{noy})^{\uparrow\alpha} = < 1.0 \quad (4)$$

De ahí surgen dos variantes del método que se tendrán en cuenta.

2.4.1.2.1. Variante uno.

Toma como valor de $\alpha = 1.5$ y se tiene:

$$(M_{nx}/M_{nox})^{\uparrow 1.5} + (M_{ny}/M_{noy})^{\uparrow 1.5} = < 1.0 \quad (5)$$

2.4.1.2.2. Variante dos.

Se toma como valor de α el dado por la expresión:

$$\alpha = 1.48 + 0.824/100 * (15.2 * e_u - F_y - 4.85 * \rho)$$

Donde:

e_u : máxima deformación del concreto en $10^{\uparrow(-3)}$ pulg/pulg.

F_y : resistencia del acero en Ksi

ρ : cuantía de la sección en porcentaje

Se tiene por tanto:

$$(M_{nx}/M_{nox})^{\alpha} + (M_{ny}/M_{noy})^{\alpha} = 1.0 \quad (6)$$

2.4.2. Métodos del contorno de carga de la PCA.

La aproximación descrita aquí ha sido desarrollada por Parme [16] como una extensión del método del contorno de carga de Bresler. La ecuación (4) de interacción de Bresler se asume como criterio básico de resistencia para definir el contorno de carga típico y representa la intersección de la superficie de falla S3 con un plano horizontal a una altura P_n .

Tal contorno de carga típico se muestra en la Figura 8. En la aproximación de Parme, un punto B sobre el contorno de carga se define de tal modo que las capacidades de los momentos biaxiales M_{nx} y M_{ny} en este punto, están en la misma proporción que las capacidades de momentos uniaxiales M_{ox} y M_{oy} ; así, en el punto B:

$$M_{ny}/M_{nx} = M_{oy}/M_{ox} \quad (7)$$

$$\text{ó } M_{nx} = \beta * M_{ox} \quad , \quad M_{ny} = \beta * M_{oy} \quad (8)$$

Cuando el contorno de carga de la Figura 8 se ajusta para tomar la forma adimensional como se muestra en la Figura 9 el punto B tendrá el cociente β definido por la ecuación (8) con sus coordenadas 'X' y 'Y'. En el sentido físico, el cociente β es esa porción constante de las capacidades de momento uniaxial que permite actuar simultáneamente sobre la sección de la columna, es decir, los momentos relativos son iguales.

El valor actual de β depende de la relación de P_n a P_o , como también de los materiales y propiedades de la sección transversal; no obstante, el rango usual de β está entre 0.55 y 0.7 [16]. Valores más exactos de β han sido computados usando principios básicos de equilibrio y gráficos han sido presentados en la referencia [16]. Se anexa la Figura 7 [17].

La ventaja de expresar el comportamiento de las columnas en términos de los parámetros adimensionales P_u/P_o , M_y/M_{oy} y M_x/M_{ox} es que los contornos de la superficie (Figura 10) por ejemplo, la intersección formada por planos de constante P_u/P_o y la superficie, puede considerarse para pro-

propósitos de diseño, por ser simétrica alrededor del plano vertical bisecando los dos planos coordenados.

2.4.2.1. Método de las sub e hiperelipses.

Con el cambio de variables dado por la ecuación (8) en la ecuación (4) resulta [4] la siguiente expresión:

$$(M_{nx}/M_{ox})^n + (M_{ny}/M_{oy})^n = 1.0 \quad ; \quad n = \log 0.5 / \log \beta \quad (9)$$

Cuando $\beta = 0.5$, límite inferior, la ecuación (9) describe una línea recta que une los puntos en los cuales los momentos relativos son iguales a 1.0 en los planos coordenados. Cuando $\beta = 1.0$, límite superior, la ecuación (9) describe dos líneas cada una de las cuales es paralela a los planos coordenados. Para valores intermedios de β , la ecuación (9) describe curvas que han sido algunas veces llamadas "sub" e "hiperelipses".

2.4.2.2. Aproximación mediante líneas rectas.

Para propósitos de diseño, el contorno de carga adimensional de la Figura 9 puede aproximarse mediante dos líneas

rectas AB y BC como se muestra en la Figura 11 [10].

2.4.2.2.1. Variante uno.

Si $M_{ny}/M_{oy} \geq M_{nx}/M_{ox}$ se utiliza la expresión:

$$M_{ny}/M_{oy} + M_{nx}/M_{ox} * (1-\beta)/\beta \leq 1.0 \quad (10)$$

Si $M_{ny}/M_{oy} < M_{nx}/M_{ox}$ se utiliza la expresión:

$$M_{nx}/M_{ox} + M_{ny}/M_{oy} * (1-\beta)/\beta \leq 1.0 \quad (11)$$

2.4.2.2.2. Variante dos.

Cuando se usan secciones rectangulares con refuerzo uniformemente distribuido en todas las caras el cociente entre M_{oy} y M_{ox} será aproximadamente igual al cociente entre b y t ; así:

$$M_{oy}/M_{ox} = b/t$$

que al reemplazar en las ecuaciones (10) y (11) resulta:

Si $M_{ny}/M_{nx} \geq b/t$ se utiliza la expresión:

$$M_{ny}/M_{oy} + M_{nx}/M_{oy} * b/t * (1-\beta)/\beta \leq 1.0 \quad (12)$$

Si $M_{ny}/M_{nx} < b/t$ se utiliza la expresión:

$$M_{nx}/M_{ox} + M_{ny}/M_{oy} * t/b * (1-\beta)/\beta = < 1.0 \quad (13)$$

2.4.2.3. Uso de las fórmulas del ingeniero Albert J. Gouwens.

El valor de β descrito anteriormente se calcula mediante gráficos proporcionados por la PCA. El ingeniero Gouwens [7] ha presentado ecuaciones que pueden usarse en forma ventajosa.

Un estudio fué hecho usando el programa del computador de la PCA por J.M. Nieves. Se notó que el mínimo valor de β definido como β_{25} ocurre en o cerca de la carga de $0.25 * F'_c * b * t$ para todas las columnas a pesar de un gran rango de F'_c , b/t , g y $\rho * F_y / F'_c$.

Para cargas mayores que $0.25 * F'_c * b * t$ el valor de β se incrementa. Si las cargas son menores que dicho valor, β también disminuye. Ver con más detalle la referencia [7].

La ecuación para $P_n \geq 0.25 * C_c$ está dada por:

$$\beta = \beta_{25} + 0.20 * (P_n/C_c - 0.25) / (0.85 + C_s/C_c) \quad (14)$$

La ecuación para $P_n < 0.25 * C_c$ está dada por:

$$\beta = \beta_{25} + (0.25 - P_n/C_c)^2 * (0.85 - C_s/(2 * C_c)) \quad (15)$$

Donde:

$$C_c = F'_c * b * t$$

$$C_s = A_s * F_y = \rho * b * t * F_y$$

β_{25} : valor de β en $P_n = 0.25 * C_c$ y está dado por las siguientes expresiones:

$$\text{Si } C_s/C_c \geq 0.5 : \beta_{25} = 0.485 + 0.03 * C_c/C_s \quad (16)$$

$$\text{Si } C_s/C_c < 0.5 : \beta_{25} = 0.545 + 0.35 * (0.5 - C_s/C_c)^2 \quad (17)$$

Para columnas con cuatro barras restar 0.02 de las ecuaciones (16) y (17).

La relación entre el valor exacto de β y el valor aproximado de β para las 67 columnas estudiadas fue de 1.053 con una desviación estandar de 0.053. En este trabajo se incrementará en un 5% el valor calculado de β por tales fórmulas.

mulas. Se demostrará más adelante con un ejemplo la forma tan ventajosa de utilizar estas ecuaciones en el cálculo de ϕ para usarse en los métodos que lo involucran.

2.4.3. Método de la elipse con factor de corrección.

Se ha demostrado que al tomar una elipse como aproximación del perfil de interacción hay una disminución del momento resistente a lo largo del eje que está a 45 grados del eje 'X' o 'Y'. El profesor Phil M. Ferguson en la referencia [6] página 556, propone que se tome el contorno elíptico y una vez se determine el momento resistente se disminuya un 15% cuando éste coincida con la línea de los 45 grados, o también con un factor de corrección que se llamará C_r [11]. La expresión que representa tal superficie es:

$$C_r^2 * [(M_{nx}/M_{ox})^2 + (M_{ny}/M_{oy})^2] \leq 1.0 \quad (18)$$

Como expresión empírica el factor C_r se define así:

$$\theta = \tan^{-1} (M_{ny}/M_{nx})$$

$$\text{Si } \theta \leq 45 \text{ grados} : \phi = \theta$$

$$\text{Si } \theta > 45 \text{ grados} : \phi = 90 - \theta$$

$$\alpha = \tan (45 + \phi/5)$$

$$C_r = \alpha \uparrow (\alpha/2)$$

2.4.4. Método del ingeniero Francisco Morán Cabré.

Su deducción se basa en el método de reducción a una flexión recta o uniaxial que se discutirá más adelante:

$$M_{oB} = Z + [Z^2 - (2*\beta - 1)/\beta^2 * M_{nx} * M_{ny}]^{\uparrow(1/2)} \quad (19)$$

Donde:

$$Z = (M_{nx} + M_{ny})/2$$

La ecuación (19) es una curva de segundo grado [13]. La forma de la nueva expresión, al estilo de los métodos de la PCA es, después de dividir por M_o , elevar al cuadrado y reducir términos:

$$M_{ny}/M_{oy} + M_{nx}/M_{ox} - (2*\beta - 1)/\beta^2 * (M_{ny}/M_{oy}) * (M_{nx}/M_{ox}) = < 1.0 \quad (20)$$

Donde β tiene igual significado utilizado en tales métodos

2.4.5. Métodos del ingeniero Jiménez Montoya.

Aproximan mediante líneas rectas el contorno de carga. El procedimiento es casi idéntico a los de la PCA.

2.4.5.1. Variante uno.

Utiliza el factor β de la PCA. Ver referencia [13].

$$\text{Si } M_{ny} > M_{nx} : M_{ny}/M_{oy} + M_{nx}/M_{ox} * (1 - \beta) / \beta = < 1.0 \quad (21)$$

$$\text{Si } M_{ny} \leq M_{nx} : M_{nx}/M_{ox} + M_{ny}/M_{oy} * (1 - \beta) / \beta = < 1.0 \quad (22)$$

2.4.5.2. Variante dos.

Utiliza el factor β que es una constante cuyos valores, en función de $v = P_n / (b * t * F'c)$, se indican a continuación.

v	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	>= 1.2
β	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9	0.8	0.7	0.6	0.6	0.6	0.5	0.5	0.4

Ver con más detalle la referencia [8]. Las expresiones a utilizar son:

Si $M_{nx}/M_{ny} \geq t/b$:

$$M_{nx}/M_{ox} + t/b * M_{ny}/M_{oy} * \beta \leq 1.0 \quad (23)$$

Si $M_{nx}/M_{ny} < t/b$:

$$M_{ny}/M_{oy} + b/t * M_{nx}/M_{ox} * \beta \leq 1.0 \quad (24)$$

2.4.6. Método de Pannell.

Pannell dá una fórmula trigonométrica de interpolación que puede expresarse en términos de β :

$$M_{ny}/[\cos \theta * [1 + (2 \uparrow 0.5 * \beta - 1) * \operatorname{sen}^2 2 * \theta] * M_{oy}] \leq 1.0 \quad (25a)$$

$$\theta = \tan^{-1}(M_{oy}/M_{ox} * M_{nx}/M_{ny}) \quad (25b)$$

Siendo β el factor dado por los métodos de la PCA. La representación gráfica de la ecuación (25) está dada en la Figura 13; [7],[14].

2.4.6. Métodos basados en la reducción a una flexión recta.

En la Figura 12 se presenta la línea de interacción para una sección rectangular de columnas con pandeo biaxial ba-

jo una carga máxima constante. Las combinaciones posibles de excentricidad para una carga máxima constante P_n están dadas por la línea. Por tanto, la carga máxima para cualquier punto de aplicación (e_y, e_x) en la línea es igual a la carga máxima para un punto de aplicación con excentricidad uniaxial e_o . Esto ilustra un enfoque posible de diseño si la forma de la línea de interacción fuera conocida; sería posible hacer el diseño para la carga P_n que actúa a la excentricidad uniaxial equivalente a e_o , permitiendo de ésta manera, la consideración de pandeo en una sola dirección.

Se han propuesto diversidad de expresiones analíticas aproximadas para poder determinar tal excentricidad equivalente:

2.5.1. Métodos del ingeniero Jiménez Montoya.

2.5.1.1. Variante uno.

Utiliza el factor β de la PCA.

$$\text{Si } M_{ny} > M_{nx} \quad : \quad M_{o\theta} = M_{ny} + (1-\beta)/\beta * M_{nx} \quad (26)$$

$$\text{Si } M_{ny} \leq M_{nx} \quad : \quad M_{o\theta} = M_{nx} + (1-\beta)/\beta * M_{ny} \quad (27)$$

2.5.1.2. Variante dos.

Utiliza el factor β tabulado en el numeral 2.4.5.2.

$$\text{Si } M_{nx}/M_{ny} \geq t/b \quad : \quad M_{o\theta} = M_{nx} + M_{ny} * t/b * \beta \quad (28)$$

$$\text{Si } M_{nx}/M_{ny} < t/b \quad : \quad M_{o\theta} = M_{ny} + M_{nx} * b/t * \beta \quad (29)$$

2.5.2. Método del ingeniero Santiago Montejó Rozo.

Consiste en aproximar inicialmente mediante una elipse la superficie de interacción. Tal superficie se afecta por el factor de corrección C_r dado en el numeral 2.4.3.; luego, se chequea con el método de las sub e hiperelipses de la PCA. Es decir:

$$(M_{o\theta})_1 = C_r * (M_{nx}^2 + M_{ny}^2)^{0.5} \quad (30)$$

$$(M_{o\theta})_2 = (M_{nx}^n + M_{ny}^n)^{(1/n)} \quad (31)$$

Siendo $n = \log 0.5 / \log \beta$

Si $(M_{o\theta})_1 = (M_{o\theta})_2$ implica que la columna está bien diseñada; si no, se hace otra iteración con $(M_{o\theta})_2$ y se calcula

$(M_0)_3$ con la ecuación (31); luego, se comparan y así sucesivamente. Ver referencia [11].

2.5.3. Método del ingeniero Francisco Morán Cabré.

$$M_0 = Z + [Z^2 - (2\beta - 1)/\beta^2 * M_x * M_y]^{0.5} \quad (19)$$

Siendo β el factor dado por la PCA.

3. EJEMPLOS NUMERICOS

A continuación se presenta la solución numérica de un ejemplo por los diferentes métodos expuestos con anterioridad. No se incluyen los métodos del numeral 2.2. ya que éstos fueron modelados por el método numérico del ingeniero Francisco Morán Cabré en el numeral 2.3.1.

3.1. SOLUCION PASO A PASO DE UN EJEMPLO POR LOS METODOS EXPUESTOS.

DAIOS DEL PROBLEMA

$$b = 0.40 \text{ m.} \quad t = 0.50 \text{ m.} \quad r_x = 0.05 \text{ m.} \quad r_y = 0.05 \text{ m.}$$

$$P_n = P = 126 \text{ t.} \quad M_{nx} = M_x = 12 \text{ m*t} \quad M_{ny} = M_y = 29 \text{ m*t}$$

$$F'_c = 2100 \text{ t/m}^2 \quad F_y = 42000 \text{ t/m}^2$$

r_x, r_y : recubrimientos en las respectivas direcciones ortogonales

Se considerará refuerzo uniformemente distribuido en todas las caras de la sección de la columna, o al menos con igual cantidad de refuerzo en cada cara.

3.1.1. Método numérico del ingeniero Francisco Morán Cabré.

Para la solución de éste y los demás ejemplos se dividirá la sección en 25 elementos diferenciales; además, se colocarán 28 barras con 8 barras por cara, respetando los respectivos recubrimientos. Ver con más detalle la Figura 14.

El valor de la cuantía ρ se presentará tabulado en la sección # 13, más adelante.

La distribución del refuerzo se ha considerado en la forma descrita arriba, para tratar de simular que el refuerzo sea uniformemente distribuido o igual en las cuatro caras; todo, con el fin de poder hacer el análisis comparativo posterior.

3.1.2. Método numérico del ingeniero Gabriel Ignacio Gutiérrez.

La solución está tabulada en forma igual que el numeral

3.1.1.

3.1.3. Métodos basados en aproximación de la superficie de interacción o de falla.

Ayudas de diseño: Cartas número 10 y 11 de la referencia [5], Figura 7 [17], columnas 8.3, 7.3.3., y 7.3.4. [2]

Tales ayudas de diseño se anexan.

3.1.3.1. Métodos de Bresler.

3.1.3.1.1. De la carga recíproca.

$$g_y = 1 - 2 * 0.05 / 0.50 = 0.8 \qquad g_x = 1 - 2 * 0.05 / 0.40 = 0.75$$

$$\phi * P_i / A_g = 1 / [A_g / (\phi * P_x) + A_g / (\phi * P_y) - A_g / (\phi * P_o)]$$

$$(P_u / A_g) / (\phi * P_i / A_g) \leq 1.0$$

$$e_y = M_x / P_u = 12 / 126 = 0.095 \qquad e_x = M_y / P_u = 29 / 126 = 0.230$$

$$e_y / t = 0.095 / 0.50 = 0.190 \qquad e_x / b = 0.230 / 0.40 = 0.575$$

ITERACION # 1 ($\rho = 0.0300$)

$$R3-60.75 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_y / A_g = 1.870 \text{ col. 7.3.3.}$$

$$e_y / t = 0.190 : R3-60.90 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_y / A_g = 1.980 \text{ col. 7.3.4.}$$

$$R3-60.80 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_y / A_g = 1.907$$

$$e_x / b = 0.575 : R3-60.75 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_x / A_g = 0.920$$

$$R3-60 : \rho = 0.030 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_n / A_g = 2.393 \text{ columnas 8.3}$$

$$\phi * P_o / A_g = \phi * P_n / (0.80 * A_g) = 2.393 / 0.80 = 2.991$$

$$\phi * P_i / A_g = 1 / [A_g / (\phi * P_x) + A_g / (\phi * P_y) - A_g / (\phi * P_o)]$$

$$\phi * P_i / A_g = 1 / (1 / 1.907 + 1 / 0.920 - 1 / 2.991) = 0.783 \text{ Kip/in}^2$$

$$P_u / A_g = 126t * 2.205 \text{ Kip} / (1t) * (0.0254 \text{ m} / 1 \text{ in})^2 / (0.40 * 0.50 \text{ m}^2)$$

$$P_u / A_g = 0.896 \text{ Kip/in}^2$$

$$\phi * P_i / A_g < P_u / A_g \text{ ---} \rightarrow \rho = (0.896 / 0.783) * 0.0300$$

$$\rho = 0.0343 \doteq 0.0350$$

ITERACION # 2 ($\rho = 0.0350$)

$$R3-60.75 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_y / A_g = 1.990$$

$$e_y / t = 0.190 : R3-60.90 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_y / A_g = 2.100$$

$$R3-60.80 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_y / A_g = 2.027$$

$$e_x / b = 0.575 : R3-60.75 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_x / A_g = 0.980$$

$$\rho = 0.030 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_n / A_g = 2.393$$

$$R3-60 : \rho = 0.040 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_n / A_g = 2.715$$

$$\rho = 0.035 \text{ ---} \rightarrow \phi * P_n / A_g = 2.554$$

$$\phi * P_o / A_g = 2.554 / 0.80 = 3.193$$

$$\phi * P_i / A_g = 1 / (1/0.980 + 1/2.027 - 1/3.193) = 0.833 < 0.896$$

$$0.896 / 0.833 = 1.076 \neq 1.0$$

Se hará una interpolación lineal para ρ de tal modo que

$$\phi * P_i / P_u = 1 \quad :$$

$$\rho = 0.0350 + (0.0350 - 0.0300) / (1.076 - 1.144) * (1 - 1.076) = 0.0405$$

$$\rho = 0.0405 \doteq 0.0400$$

ITERACION # 3 ($\rho = 0.0400$)

$$R3-60.75 \text{ ----} \rightarrow \phi * P_y / A_g = 2.100$$

$$e_y / t = 0.190 \quad : \quad R3-60.90 \text{ ----} \rightarrow \phi * P_y / A_g = 2.210$$

$$R3-60.80 \text{ ----} \rightarrow \phi * P_y / A_g = 2.137$$

$$e_x / b = 0.575 \quad : \quad R3-60.75 \text{ ----} \rightarrow \phi * P_x / A_g = 1.050$$

$$R3-60 \quad : \quad \rho = 0.0400 \text{ ----} \rightarrow \phi * P_n / A_g = 2.715$$

$$\phi * P_o / A_g = 2.715 / 0.80 = 3.394$$

$$\phi * P_i / A_g = 1 / (1/2.137 + 1/1.050 - 1/3.394) = 0.888$$

$$0.896 / 0.888 = 1.009 \doteq 1.000$$

O.K.

$$* \rho = 0.0400 *$$

3.1.3.1.2. Método del contorno de carga.

3.1.3.1.2.1. Variante uno.

$$(M_x / M_{ox})^{\uparrow 1.5} + (M_y / M_{oy})^{\uparrow 1.5} \leq 1.0$$

(5)

ITERACION # 1 ($\beta = 0.0300$)

$$K = P/(F'c*b*t) = 126/(2100*0.40*0.50) = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_x = 0.183$$

$$M_{ox} = [K*(e/t)]_x * F'c*b*t^2 = [K*(e/t)]_x * 2100*0.40*0.50^2$$

$$M_{ox} = 210*[K*(e/t)]_x$$

$$M_{ox} = 210*0.183 = 38.430$$

$$g_x = 0.70 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.164$$

$$g_x = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.183$$

$$g_x = 0.75 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.174 \quad (\text{por interpolación})$$

$$M_{oy} = [K*(e/t)]_y * F'c*t*b^2 = [K*(e/t)]_y * 2100*0.50*0.40^2$$

$$M_{oy} = [K*(e/t)]_y * 168$$

$$M_{oy} = 168*0.174 = 29.232$$

$$(12/38.430)^{1.5} + (29/29.232)^{1.5} = 1.163 + 1.0$$

$$\beta = 0.0300 * 1.162 = 0.0348$$

ITERACION # 2 ($\beta = 0.0348$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_x = 0.201$$

$$M_{ox} = 210*0.201 = 42.210$$

$$g_x = 0.70 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.179$$

$$g_x = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.201$$

$$g_x = 0.75 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.190$$

$$Moy = 168 * 0.190 = 31.920$$

$$(12/42.210)^{1.5} + (29/31.920)^{1.5} = 1.018 \neq 1.0$$

$$\beta = 0.0348 + (0.0348 - 0.0300) / (1.018 - 1.163) * (1 - 1.018) = 0.0354$$

ITERACION # 3 ($\beta = 0.0354$)

$$K = 0.300$$

$$gy = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_x = 0.203$$

$$Max = 210 * 0.203 = 42.630$$

$$gx = 0.70 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.181$$

$$gx = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.203$$

$$gx = 0.75 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.192$$

$$Moy = 168 * 0.192 = 32.256$$

$$(12/42.630)^{1.5} + (29/32.256)^{1.5} = 1.002 \approx 1.0 \quad \text{O.K.}$$

$$* \beta = 0.0354 *$$

3.1.3.1.2.2. Variante dos.

$$(My/Moy)^{\alpha} + (Mx/Mox)^{\alpha} = 1.0$$

$$\alpha = 1.48 + 0.824/100 * (15.2 * e_u - F_y - 4.85 * \beta)$$

$$\alpha = 1.48 + 0.824/100 * (15.2 * 3 - 60) - 0.824/100 * 4.85 * \beta$$

$$\alpha = 1.361 - 4 * \beta$$

ITERACION # 1 ($\beta = 0.0300$)

$$\alpha = 1.361 - 4 * 0.0300 = 1.241$$

$$\text{Moy} = 29.232 \quad , \quad \text{Max} = 38.430$$

$$(12/38.430)^{\uparrow\alpha} + (29/29.232)^{\uparrow\alpha} = 1.226 \neq 1.0$$

$$\beta = 0.0300 * 1.226 = 0.0368$$

ITERACION # 2 ($\beta = 0.0368$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_x = 0.206$$

$$\text{Max} = 210 * 0.206 = 43.260$$

$$g_x = 0.70 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.185$$

$$g_x = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.206$$

$$g_x = 0.75 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.196$$

$$\text{Moy} = 168 * 0.196 = 32.928$$

$$\alpha = 1.361 - 4 * 0.0368 = 1.214$$

$$(12/43.260)^{\uparrow\alpha} + (29/32.928)^{\uparrow\alpha} = 1.068 \neq 1.0$$

$$\beta = 0.0368 + (0.0368 - 0.0300) / (1.068 - 1.226) * (1 - 1.068) = 0.0397$$

$$\beta = 0.0397 \doteq 0.0400$$

ITERACION # 3 ($\beta = 0.0400$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_x = 0.218$$

$$\text{Max} = 210 * 0.218 = 45.780$$

$$g_x = 0.70 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.194$$

$$g_x = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.218$$

$$g_x = 0.75 \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.206$$

$$Moy = 168*0.206 = 34.608$$

$$\alpha = 1.361 - 4*0.0400 = 1.201$$

$$(12/45.780)^{\alpha} + (29/34.608)^{\alpha} = 1.009 \approx 1.0 \quad \text{O.K.}$$

$$* \beta = 0.0400 *$$

3.1.3.2. Métodos del contorno de la carga de la PCA.

3.1.3.2.1. Método de las sub e hiperelipses.

$$(M_x/M_{ox})^n + (M_y/M_{oy})^n \leq 1.0 \quad : \quad n = \log 0.5 / \log \beta$$

ITERACION # 1 ($\beta = 0.0100$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \rightarrow [K*(e/t)]_x = 0.109$$

$$M_{ox} = 210*0.109 = 22.890$$

$$g_x = 0.70 \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.103$$

$$g_x = 0.80 \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.109$$

$$g_x = 0.75 \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.106$$

$$M_{oy} = 168*0.106 = 17.808$$

$$P_o = A_g*[0.85*F'_c + \beta*(F_y - 0.85*F'_c)]$$

$$P_o = 0.40*0.50*[0.85*2100 + \beta*(42000 - 0.85*2100)]$$

$$P_o = 0.20 * (1785 + 40215 * \rho)$$

$$P_o = 0.20 * (1785 + 40215 * 0.0100) = 437.430$$

$$P_u/P_o = 126/437.430 = 0.290$$

$$q = \rho * F_y / (0.85 * F'_c) = \rho * 42000 / (0.85 * 2100) = 23.529 * \rho$$

$$q = 23.529 * 0.0100 = 0.235$$

De la Figura 7 [17] con $P_u/P_o = 0.290$, $q = 0.235$ ---->

$$\beta = 0.600$$

$$n = \log 0.5 / \log \beta = 1.357$$

$$(12/22.890)^{\uparrow n} + (29/17.808)^{\uparrow n} = 2.354 \neq 1.0$$

$$\rho = 2.354 * 0.0100 = 0.0235$$

ITERACION # 2 ($\rho = 0.0235$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ----> } [K * (e/t)]_x = 0.160$$

$$M_{ox} = 210 * 0.160 = 33.600$$

$$g_x = 0.70 \text{ ----> } [K * (e/t)]_y = 0.146$$

$$g_x = 0.80 \text{ ----> } [K * (e/t)]_y = 0.160$$

$$g_x = 0.75 \text{ ----> } [K * (e/t)]_y = 0.153$$

$$M_{oy} = 168 * 0.153 = 25.704$$

$$P_o = 0.20 * (1785 + 40215 * 0.0235) = 546.010$$

$$P_u/P_o = 126/546.010 = 0.231$$

$$q = 23.529 * 0.0235 = 0.553$$

$$\beta = 0.562$$

$$n = \log 0.5 / \log \beta = 1.203$$

$$(12/33.600)^{\uparrow n} + (29/25.704)^{\uparrow n} = 1.446 \neq 1.0$$

$$\rho = 0.0235 + (0.0235 - 0.0100) / (1.446 - 2.354) * (1 - 1.446) = 0.0300$$

ITERACION # 3 ($\rho = 0.0300$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_x = 0.183$$

$$M_{ox} = 210 * 0.183 = 38.430$$

$$g_x = 0.70 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.164$$

$$g_x = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.183$$

$$g_x = 0.75 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.174$$

$$M_{oy} = 168 * 0.174 = 29.232$$

$$P_o = 0.20 * (1785 + 40215 * 0.0300) = 598.290$$

$$P_u / P_o = 126 / 598.290 = 0.211$$

$$q = 23.529 * 0.0300 = 0.706$$

$$\beta = 0.552$$

$$n = \log 0.5 / \log \beta = 1.167$$

$$(12/38.430)^{\uparrow n} + (29/29.232)^{\uparrow n} = 1.248 \neq 1.0$$

$$\rho = 0.0300 + (0.0300 - 0.0235) / (1.248 - 1.446) * (1 - 1.248) = 0.0381$$

ITERACION # 4 ($\rho = 0.0381$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_x = 0.210$$

$$M_{ox} = 210 * 0.210 = 44.100$$

$$g_x = 0.70 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.188$$

$$g_x = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.210$$

$$g_x = 0.75 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.199$$

$$M_{oy} = 168 * 0.199 = 33.432$$

$$P_o = 0.20 * (1785 + 40215 * 0.0381) = 663.438$$

$$P_u/P_o = 126/663.438 = 0.190$$

$$q = 23.529 * 0.0381 = 0.896$$

$$\beta = 0.534$$

$$n = \log 0.5 / \log \beta = 1.105$$

$$(12/44.100)^{\uparrow n} + (29/34.432)^{\uparrow n} = 1.065 \neq 1.0$$

$$\beta = 0.0381 + (0.0381 - 0.0300) / (1.065 - 1.248) * (1 - 1.065) = 0.0410$$

ITERACION # 5 ($\beta = 0.0410$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_x = 0.222$$

$$M_{ox} = 210 * 0.222 = 46.620$$

$$g_x = 0.70 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.199$$

$$g_x = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.222$$

$$g_x = 0.75 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.211$$

$$M_{oy} = 168 * 0.211 = 35.448$$

$$P_o = 0.20 * (1785 + 40215 * 0.0410) = 686.763$$

$$Pu/Po = 126/686.763 = 0.183$$

$$q = 23.529 * 0.0410 = 0.965$$

$$\beta = 0.535$$

$$n = \log 0.5 / \log \beta = 1.108$$

$$(12/46.620)^{\uparrow n} + (29/35.448)^{\uparrow n} = 1.023 \neq 1.0$$

$$\rho = 0.0410 + (0.0410 - 0.0381) / (1.023 - 1.065) * (1 - 1.023) = 0.0426$$

ITERACION # 6 ($\rho = 0.0426$)

$$K = 0.300$$

$$gy = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_x = 0.227$$

$$Mox = 210 * 0.227 = 47.670$$

$$gx = 0.70 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.204$$

$$gx = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.227$$

$$gx = 0.75 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.216$$

$$Moy = 168 * 0.216 = 36.288$$

$$Po = 0.20 * (1785 + 40215 * 0.0426) = 699.632$$

$$Pu/Po = 126/699.632 = 0.180$$

$$q = 23.529 * 0.0426 = 1.002$$

$$\beta = 0.534$$

$$n = \log 0.5 / \log \beta = 1.105$$

$$(12/47.670)^{\uparrow n} + (29/36.288)^{\uparrow n} = 0.998 \approx 1.0$$

O.K.

$$* \rho = 0.0426 *$$

Se hará, a continuación, el mismo ejemplo utilizando las fórmulas del ingeniero Albert J. Gouwens:

$$C_c = F'_c * b * t = 2100 * 0.40 * 0.50 = 420$$

$$P_u/C_c = 126/420 = 0.30 > 0.25 \text{ --->}$$

$$\beta = \beta_{25} + 0.20 * (P_u/C_c - 0.25) / (0.85 + C_s/C_c)$$

ITERACION # 1 ($\rho = 0.0100$)

$$C_s = A_s * F_y = \rho * b * t * F_y = \rho * 0.40 * 0.50 * 42000$$

$$C_s = 8400 * \rho$$

$$C_s = 8400 * 0.0100 = 84$$

$$C_s/C_c = 84/420 = 0.200 < 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.545 + 0.35 * (0.50 - C_s/C_c)^{1.2} = 0.545 + 0.35 * (0.50 - 0.200)^{1.2}$$

$$\beta_{25} = 0.577$$

$$\beta = 0.577 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.200) = 0.587$$

$$\beta = 1.05 * 0.587 = 0.616 \quad (\text{Criterio personal})$$

$$n = \log 0.5 / \log \beta = 1.431 > 1.402 \quad (\text{Obtenido de la gráfica})$$

$$(12/22.890)^{1.431} + (29/17.808)^{1.431} = 2.406 \neq 1.0$$

$$\rho = 2.406 * 0.0100 = 0.0241 \quad \text{pero se tomará } \rho = 0.0235$$

ITERACION # 2 ($\rho = 0.0235$)

$$C_s = 8400 * 0.0235 = 197.40$$

$$C_s/C_c = 197.40/420 = 0.470 < 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.545 + 0.35 * (0.50 - 0.470)^{\uparrow 2} = 0.545$$

$$\beta = 0.545 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.470) = 0.553$$

$$\beta = 1.05 * 0.553 = 0.581$$

$$n = \log 0.5 / \log \beta = 1.277$$

$$(12/33.600)^{\uparrow n} + (29/25.704)^{\uparrow n} = 1.435 \neq 1.0$$

$$\rho = 0.0235 + (0.0235 - 0.0100) / (1.435 - 2.406) * (1 - 1.435) = 0.0295$$

$$\rho = 0.0295 \doteq 0.0300$$

ITERACION # 3 ($\rho = 0.0300$)

$$C_s = 8400 * 0.0300 = 252$$

$$C_s / C_c = 252 / 420 = 0.600 > 0.5$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03 / 0.600 = 0.535$$

$$\beta = 0.535 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.600) = 0.542$$

$$\beta = 1.05 * 0.542 = 0.569$$

$$n = \log 0.5 / \log \beta = 1.229$$

$$(12/38.430)^{\uparrow n} + (29/29.232)^{\uparrow n} = 1.229 \neq 1.0$$

$$\rho = 0.0300 + (0.0300 - 0.0235) / (1.229 - 1.435) * (1 - 1.229) = 0.0372$$

$$\rho = 0.0372 \doteq 0.0381$$

ITERACION # 4 ($\rho = 0.0381$)

$$C_s = 8400 * 0.0381 = 320.04$$

$$C_s / C_c = 320.04 / 420 = 0.762 > 0.5$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03 / 0.762 = 0.524$$

$$\beta = 0.524 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.762) = 0.530$$

$$\beta = 1.05 * 0.530 = 0.557$$

$$n = \log 0.5 / \log \beta = 1.184$$

$$(12/44.100)^{\uparrow n} + (29/34.432)^{\uparrow n} = 1.030 \neq 1.0$$

$$\beta = 0.0381 + (0.0381 - 0.0300) / (1.030 - 1.229) * (1 - 1.030) = 0.0393$$

$$\beta = 0.0393 \doteq 0.0410$$

ITERACION # 5 ($\beta = 0.0410$)

$$C_s = 8400 * 0.0410 = 344.44$$

$$C_s / C_c = 344.44 / 420 = 0.820 > 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03 / 0.820 = 0.522$$

$$\beta = 0.522 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.820) = 0.528$$

$$\beta = 1.05 * 0.528 = 0.554$$

$$n = \log 0.5 / \log \beta = 1.174$$

$$(12/46.620)^{\uparrow n} + (29/35.448)^{\uparrow n} = 0.993 \doteq 1.0$$

O.K.

$$\text{Error relativo} = 1 - 0.0410 / 0.0426 = 3.76\%$$

Se observa pues, que el error relativo es despreciable y así, se ha demostrado el uso ventajoso de estas fórmulas con respecto a las gráficas de la PCA, en donde los valores de 'q', no están tabulados a incrementos de 0.10.

$$* \beta = 0.0410 *$$

3.1.3.2.2. Aproximación mediante líneas rectas.

3.1.3.2.2.1. Variante uno.

$$\text{Si } My/Moy \geq Mx/Mox : My/Moy + Mx/Mox * (1-\beta) / \beta = < 1.0$$

$$\text{Si } My/Moy < Mx/Mox : Mx/Mox + My/Moy * (1-\beta) / \beta = < 1.0$$

ITERACION # 1 ($\beta = 0.0300$)

$$\beta = 0.569 , My=29 , Mx=12 , Moy=29.232 , Mox=38.430$$

$$My/Moy = 29/29.232 = 0.992 , Mx/Mox = 12/38.430 = 0.312$$

$$My/Moy > Mx/Mox : My/Moy + Mx/Mox * (1-\beta) / \beta = < 1.0$$

$$0.992 + 0.312 * (1-0.569) / 0.569 = 1.228 \neq 1.0$$

$$\beta = 1.228 * 0.0300 = 0.0368 , \text{ pero se tomará } \beta = 0.0381$$

ITERACION # 2 ($\beta = 0.0381$)

$$\beta = 0.557 , Moy=34.432 , Mox=44.100$$

$$My/Moy = 29/34.432 = 0.842 , Mx/Mox = 12/44.100 = 0.272$$

$$My/Moy > Mx/Mox :$$

$$0.842 + 0.272 * (1-0.557) / 0.557 = 1.058 \neq 1.0$$

$$\beta = 0.0381 + (0.0381 - 0.0300) / (1.058 - 1.228) * (1 - 1.058) = 0.0408$$

$$\beta = 0.0408 \approx 0.0410$$

ITERACION # 3 ($\beta = 0.0410$)

$$\beta = 0.554 , Moy=35.448 , Mox=46.620$$

$$My/Moy = 29/35.448 = 0.818, \quad Mx/Mox = 12/46.620 = 0.257$$

$My/Moy > Mx/Mox$:

$$0.818 + 0.257 * (1-0.554)/0.554 = 1.025 \neq 1.0$$

$$\beta = 0.0410 + (0.0410 - 0.0381) / (1.025 - 1.058) * (1 - 1.025) = 0.0432$$

ITERACION # 4 ($\beta = 0.0432$)

$$K = 0.300$$

$$gy = 0.80 \text{ ----} \rightarrow [K*(e/t)]x = 0.230$$

$$Mox = 210 * 0.230 = 48.300$$

$$gx = 0.70 \text{ ----} \rightarrow [K*(e/t)]y = 0.206$$

$$gx = 0.80 \text{ ----} \rightarrow [K*(e/t)]y = 0.230$$

$$gx = 0.75 \text{ ----} \rightarrow [K*(e/t)]y = 0.218$$

$$Moy = 168 * 0.218 = 36.624$$

$$My/Moy = 29/36.624 = 0.792, \quad Mx/Mox = 12/48.300 = 0.248$$

$My/Moy > Mx/Mox$:

$$0.792 + 0.248 * (1-0.552)/0.552 = 0.993 \doteq 1.0 \quad \text{O.K.}$$

$$* \beta = 0.0432 *$$

3.1.3.2.2.2. Variante dos.

$$\text{Si } My/Mx \geq b/t \quad : \quad 1/Moy * [My + Mx * b/t * (1-\beta)] / \beta \leq 1.0$$

$$\text{Si } My/Mx < b/t \quad : \quad 1/Mox * [Mx + My * t/b * (1-\beta)] / \beta \leq 1.0$$

$$b/t = 0.40/0.50 = 0.80, \quad M_y/M_x = 29/12 = 2.416$$

$$M_y/M_x > b/t \quad : \quad 1/M_y * [M_y + M_x * b/t * (1 - \rho)] \leq 1.0$$

ITERACION # 1 ($\rho = 0.0300$)

$$\rho = 0.569, \quad M_y = 29.232$$

$$1/29.232 * [29 + 12 * 0.80 * (1 - 0.569) / 0.569] = 1.241 > 1.0$$

$$\rho = 1.241 * 0.0300 = 0.0372 \approx 0.0381$$

ITERACION # 2 ($\rho = 0.0381$)

$$\rho = 0.557, \quad M_y = 34.432$$

$$1/34.432 * [29 + 12 * 0.80 * (1 - 0.557) / 0.557] = 1.064 > 1.0$$

$$\rho = 0.0381 + (0.0381 - 0.0300) / (1.064 - 1.241) * (1 - 1.064) = 0.0410$$

ITERACION # 3 ($\rho = 0.0410$)

$$\rho = 0.554, \quad M_y = 35.448$$

$$1/35.448 * [29 + 12 * 0.80 * (1 - 0.554) / 0.554] = 1.036 > 1.0$$

$$\rho = 0.0410 + (0.0410 - 0.0381) / (1.036 - 1.064) * (1 - 1.036) = 0.0447$$

ITERACION # 4 ($\rho = 0.0447$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \quad \text{--->} \quad [K * (e/t)]_x = 0.236$$

$$M_{ox} = 210 * 0.236 = 49.560$$

$$g_x = 0.70 \quad \text{--->} \quad [K * (e/t)]_y = 0.210$$

$$g_x = 0.80 \quad \text{--->} \quad [K * (e/t)]_y = 0.236$$

$$g_x = 0.75 \quad \text{--->} \quad [K * (e/t)]_y = 0.223$$

$$\text{Moy} = 168 * 0.223 = 37.464$$

$$C_s = 8400 * 0.0447 = 375.480$$

$$C_s/C_c = 375.480/420 = 0.894 > 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03/0.894 = 0.519$$

$$\beta = 0.519 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.894) = 0.525$$

$$\beta = 1.05 * 0.525 = 0.551$$

$$1/37.464 * [29 + 12 * 0.80 * (1 - 0.551) / 0.551] = 0.983 \ll 1.0$$

sobrediseño?

$$\rho = 0.0447 + (0.0447 - 0.0410) / (0.983 - 1.036) * (1 - 0.983) = 0.0435$$

ITERACION # 5 ($\rho = 0.0435$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ----} \rightarrow [K * (e/t)]_x = 0.233$$

$$\text{Max} = 210 * 0.233 = 48.930$$

$$g_x = 0.70 \text{ ----} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.207$$

$$g_x = 0.80 \text{ ----} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.233$$

$$g_x = 0.75 \text{ ----} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.220$$

$$\text{Moy} = 168 * 0.220 = 36.960$$

$$C_s = 8400 * 0.0435 = 365.40$$

$$C_s/C_c = 365.40/420 = 0.870 > 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03/0.870 = 0.519$$

$$\beta = 0.519 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.870) = 0.525$$

$$\beta = 1.05 * 0.525 = 0.551$$

$$1/36.960 * [29 + 12 * 0.80 * (1 - 0.551) / 0.551] = 0.996 \doteq 1.0 \quad \text{O.K.}$$

$$* \rho = 0.0435 *$$

3.1.3.3. Método de la elipse con factor de corrección.

$$Cr \uparrow 2 * [(Mx/Mox) \uparrow 2 + (My/Moy) \uparrow 2] = < 1.0$$

$$\theta = \tan^{-1} (My/Mx)$$

$$\text{Si } \theta < 45 \text{ grados } \longrightarrow \gamma' = \theta$$

$$\text{Si } \theta \geq 45 \text{ grados } \longrightarrow \gamma' = 90 - \theta$$

$$\alpha = \tan (45 + \gamma'/5)$$

$$Cr = \alpha \uparrow (\alpha/2)$$

$$\theta = \tan^{-1} (29/12) = 67^\circ 31' 14'' > 45^\circ \longrightarrow$$

$$\gamma' = 90 - \theta = 22^\circ 28' 45.9''$$

$$\alpha = \tan (45 + \gamma'/5) = 1.171$$

$$Cr = \alpha \uparrow (\alpha/2) = 1.097$$

ITERACION # 1 ($\rho = 0.0300$)

$$Moy = 29.232, \quad Mox = 38.430$$

$$1.097 \uparrow 2 * [(29/29.232) \uparrow 2 + (12/38.430) \uparrow 2] = 1.302 \neq 1.0$$

$$\rho = 1.302 * 0.0300 = 0.0391 \quad \text{pero se tomará } \rho = 0.0381$$

ITERACION # 2 ($\rho = 0.0381$)

$$Moy = 34.432, \quad Mox = 44.100$$

$$1.09712 * [(29/34.432)^2 + (12/44.100)^2] = 0.943 \ll 1.0$$

sobrediseño?

$$\rho = 0.0381 + (0.0381 - 0.0300) / (0.943 - 1.302) * (1 - 0.943) = 0.0368$$

$$\rho = 0.0368 \doteq 0.0370$$

ITERACION # 3 ($\rho = 0.0370$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_x = 0.207$$

$$M_{ox} = 210 * 0.207 = 43.470$$

$$g_x = 0.70 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.186$$

$$g_x = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.207$$

$$g_x = 0.75 \text{ ---} \rightarrow [K * (e/t)]_y = 0.197$$

$$M_{oy} = 168 * 0.197 = 33.096$$

$$1.09712 * [(29/33.096)^2 + (12/43.470)^2] = 1.016 \neq 1.0$$

$$\rho = 0.0370 + (0.0370 - 0.0381) / (1.016 - 0.943) * (1 - 1.016) = 0.0372$$

$$\rho = 0.0372 \doteq 0.0370$$

O.K.

$$* \rho = 0.0372 *$$

3.1.3.4. Método del ingeniero Francisco Morán Cabré.

$$M_y/M_{oy} + M_x/M_{ox} - (2 * \rho - 1) / \rho^2 * (M_y/M_{oy}) * (M_x/M_{ox}) \leq 1.0$$

ITERACION # 1 ($\rho = 0.0300$)

Moy = 29.232 , Max = 38.430 , $\beta = 0.569$

$$\frac{29}{29.232} + \frac{12}{38.430} - \frac{(2 * 0.569 - 1)}{0.569^2} * \left(\frac{29}{29.232}\right) * \left(\frac{12}{38.430}\right) = 1.172 \neq 1.0$$

$$\rho = 0.0300 * 1.172 = 0.0352 \text{ pero se tomará } \rho = 0.0381$$

ITERACION # 2 ($\rho = 0.0381$)

Moy = 34.432 , Max = 44.100 , $\beta = 0.557$

$$\frac{29}{34.432} + \frac{12}{44.100} - \frac{(2 * 0.557 - 1)}{0.557^2} * \left(\frac{29}{34.432}\right) * \left(\frac{12}{44.100}\right) = 1.030 \neq 1.0$$

$$\rho = 0.0381 + \frac{(0.0381 - 0.0300)}{(1.030 - 1.172)} * (1 - 1.030) = 0.0398$$

$$\rho = 0.0398 \doteq 0.0410$$

ITERACION # 3 ($\rho = 0.0410$)

Moy = 35.448 , Max = 46.620 , $\beta = 0.554$

$$\frac{29}{35.448} + \frac{12}{46.620} - \frac{(2 * 0.554 - 1)}{0.554^2} * \left(\frac{29}{35.448}\right) * \left(\frac{12}{46.620}\right) = 1.001 \doteq 1.0 \quad \text{O.K.}$$

$$* \rho = 0.0410 *$$

3.1.3.5. Métodos del ingeniero Jiménez Montoya.

3.1.3.5.1. Variante uno.

$$\text{Si } M_y \geq M_x : M_y/M_{oy} + M_x/M_{ox} * (1-\beta)/\beta \leq 1.0$$

$$\text{Si } M_y < M_x : M_x/M_{ox} + M_y/M_{oy} * (1-\beta)/\beta \leq 1.0$$

Igual que en el método 3.1.3.2.2.1.

$$* \beta = 0.0432 *$$

3.1.3.5.2. Variante dos.

$$\text{Si } M_x/M_y \geq t/b : M_x/M_{ox} + t/b * M_y/M_{oy} * \beta \leq 1.0$$

$$\text{Si } M_x/M_y < t/b : M_y/M_{oy} + b/t * M_x/M_{ox} * \beta \leq 1.0$$

$$v = P_u / (b * t * F'c) = 126 / (0.40 * 0.50 * 2100) = 0.30$$

De la tabla del numeral 2.4.5.2. $\beta = 0.900$

$$M_x/M_y = 12/29 = 0.414 \quad , \quad t/b = 0.50/0.40 = 1.25$$

$$M_x/M_y < t/b : M_y/M_{oy} + b/t * M_x/M_{ox} * \beta \leq 1.0$$

$$b/t = 0.80$$

ITERACION # 1 ($\beta = 0.0300$)

$$M_{oy} = 29.232 \quad , \quad M_{ox} = 38.430 \quad , \quad \beta = 0.900$$

$$29/29.232 + 0.80 * 12/38.430 * 0.900 = 1.223 > 1.0$$

$$\beta = 1.223 * 0.0300 = 0.0367 \text{ pero se tomará } \beta = 0.0381$$

ITERACION # 2 ($\beta = 0.0381$)

$$Moy = 34.432, \quad Mox = 44.100, \quad \beta = 0.900$$

$$29/34.432 + 0.80 * 12/44.100 * 0.900 = 1.038 \neq 1.0$$

$$\beta = 0.0381 + (0.0381 - 0.0300) / (1.038 - 1.223) * (1 - 1.038) = 0.0398$$

$$\beta = 0.0398 \doteq 0.0410$$

ITERACION # 3 ($\beta = 0.0410$)

$$Moy = 35.448, \quad Mox = 46.620, \quad \beta = 0.900$$

$$29/35.448 + 0.80 * 12/46.620 * 0.900 = 1.003 \doteq 1.0 \quad \text{O.K.}$$

$$* \beta = 0.0410 *$$

3.1.3.6. Método de Pannell.

$$(My/Moy) / [\cos \theta * [1 + (2 \uparrow 0.5 * \beta - 1) * (\sin 2 * \theta) \uparrow 2]] \leq 1.0$$

$$\theta = \tan^{-1} (Mx/Mox * Moy/My)$$

ITERACION # 1 ($\beta = 0.0300$)

$$Moy = 29.932, \quad Mox = 38.430, \quad \theta = 0.569$$

$$\theta = \tan^{-1} (12/38.430 * 29.232/29) = 17^{\circ} 28' 17.7''$$

$$0.992/0.893 = 1.111 \neq 1.0$$

$$\beta = 1.111 * 0.0300 = 0.0333$$

ITERACION # 2 ($\beta = 0.0333$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_x = 0.196$$

$$M_{ox} = 210 * 0.196 = 41.160$$

$$g_x = 0.70 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.174$$

$$g_x = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.196$$

$$g_x = 0.75 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.185$$

$$M_{oy} = 168 * 0.185 = 31.080$$

$$C_s = 8400 * 0.0333 = 279.72$$

$$C_s/C_c = 279.72/420 = 0.666 > 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03/0.666 = 0.530$$

$$\beta = 0.530 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.666) = 0.537$$

$$\beta = 1.05 * 0.537 = 0.564$$

$$\theta = \tan^{-1} (12/41.160 * 31.080/29) = 17^\circ 21' 6.22''$$

$$0.933/0.892 = 1.046 \neq 1.0$$

$$\beta = 0.0333 + (0.0333 - 0.0300) / (1.046 - 1.111) * (1 - 1.046) = 0.0356$$

$$\beta = 0.0356 \doteq 0.0360$$

ITERACION # 3 ($\beta = 0.0360$)

$$K = 0.300$$

$$g_y = 0.80 \text{ ---} \rightarrow [K*(e/t)]_x = 0.205$$

$$M_{ox} = 210 * 0.205 = 43.050$$

$$g_x = 0.70 \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.183$$

$$g_x = 0.80 \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.205$$

$$g_x = 0.75 \rightarrow [K*(e/t)]_y = 0.194$$

$$M_{oy} = 168 * 0.194 = 32.592$$

$$C_s = 8400 * 0.0360 = 302.400$$

$$C_s/C_c = 302.400/420 = 0.720 > 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03/0.720 = 0.527$$

$$\beta = 0.527 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.720) = 0.533$$

$$\beta = 1.05 * 0.533 = 0.560$$

$$\theta = \tan^{-1}(12/43.050 * 32.592/29) = 17^\circ 23' 39.4''$$

$$0.890/0.890 = 1.0$$

O.K.

$$* \rho = 0.0360 *$$

3.1.4. Métodos basados en la reducción a una flexión recta.

3.1.4.1. Métodos del ingeniero Jiménez Montoya.

3.1.4.1.1. Variante uno.

$$\text{Si } M_y \geq M_x : M_{o\theta} = M_y + M_x * (1-\beta)/\beta$$

$$\text{Si } M_y < M_x : M_{o\theta} = M_x + M_y * (1-\beta)/\beta$$

$$M_y = 29, \quad M_x = 12$$

$$M_y > M_x : M_oB = M_y + M_x * (1-\beta)/\beta$$

ITERACION # 1 ($\beta = 0.0300$)

$$g = g_x = 0.75 \quad (\text{siempre el menor } g)$$

$$\beta = 0.569$$

$$(M_oB)_1 = 29 + 12 * (1-0.569)/0.569 = 38.090$$

$$[K*(e/t)] = M_oB/(t*b^2*F'c) = M_oB/(0.50*0.40^2*2100)$$

$$[K*(e/t)]_1 = (M_oB)_1/168 = 38.090/168 = 0.227$$

$$K = 0.300, \quad [K*(e/t)]_1 = 0.227 :$$

$$g_x = 0.80 \quad \text{--->} \quad \beta = 0.0425$$

$$g_x = 0.70 \quad \text{--->} \quad \beta = 0.0500$$

$$g_x = 0.75 \quad \text{--->} \quad \beta = 0.0463 + 0.0300$$

ITERACION # 2 ($\beta = 0.0463$)

$$C_s = 8400 * 0.0463 = 388.92$$

$$C_s/C_c = 388.92/420 = 0.926 > 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03/0.926 = 0.517$$

$$\beta = 0.517 + 0.20 * (0.30-0.25)/(0.85+0.926) = 0.523$$

$$\beta = 1.05 * 0.523 = 0.549$$

$$(M_oB)_2 = 29 + 12 * (1-0.549)/0.549 = 38.858$$

$$[K*(e/t)]_2 = 38.858/168 = 0.231$$

$$[K*(e/t)]_2/[K*(e/t)]_1 = 1.018 + 1.0$$

$$K = 0.300, \quad [K*(e/t)]_2 :$$

$$g_x = 0.80 \quad \text{--->} \quad \beta = 0.0430$$

$$g_x = 0.70 \quad \text{--->} \quad \beta = 0.0500$$

$$g_x = 0.75 \rightarrow \rho = 0.0465 \pm 0.0463$$

O.K.

pero se hará la tercera iteración.

ITERACION # 3 ($\rho = 0.0465$)

$$C_s = 8400 * 0.0465 = 390.60$$

$$C_s/C_c = 390.60/420 = 0.930 > 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03/0.930 = 0.517$$

$$\beta = 0.517 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.930) = 0.523$$

$$\beta = 1.05 * 0.523 = 0.549$$

$$(M_oB)_3 = (M_oB)_2$$

O.K.

$$* \rho = 0.0465 *$$

3.1.4.1.2. Variante dos.

$$\text{Si } M_x/M_y \geq t/b : M_oB = M_x + M_y * t/b * \beta$$

$$\text{Si } M_x/M_y < t/b : M_oB = M_y + M_x * b/t * \beta$$

$$\beta = 0.900$$

$$M_x/M_y < t/b : M_oB = M_x + M_y * b/t * \beta$$

$$M_oB = 29 + 12 * 0.80 * 0.900 = 37.640$$

$$g = g_x = 0.75 \quad (\text{siempre el menor } g)$$

$$K = 0.300, \quad [K * (e/t)]_x = 37.640/168 = 0.224 :$$

$$g_x = 0.80 \rightarrow \rho = 0.0415$$

$$g_x = 0.70 \rightarrow \rho = 0.0491$$

$$g_x = 0.75 \rightarrow \rho = 0.0453$$

$$*\rho = 0.0453 *$$

3.1.4.2. Método del ingeniero Santiago Montejó Rozo.

$$(Mo\theta)_1 = Cr * (My^{\uparrow 2} + Mx^{\uparrow 2})^{\uparrow 0.5}$$

$$(Mo\theta)_2 = (My^{\uparrow n} + Mx^{\uparrow n})^{\uparrow (1/n)} \quad : \quad n = \log 0.5 / \log \beta$$

$$\text{Si } (Mo\theta)_1 = (Mo\theta)_2 \quad \text{O.K.}$$

Del ejemplo del numeral 3.1.3.3. $Cr = 1.097$

ITERACION # 1

$$g = g_x = 0.75 \quad (\text{siempre el menor } g)$$

$$(Mo\theta)_1 = 1.097 * (12^{\uparrow 2} + 29^{\uparrow 2})^{\uparrow 0.5} = 34.429$$

$$K = 0.300, \quad [K * (e/t)]_1 = 34.429 / 168 = 0.205 \quad :$$

$$g_x = 0.70 \rightarrow \rho = 0.0425$$

$$g_x = 0.80 \rightarrow \rho = 0.0360$$

$$g_x = 0.75 \rightarrow \rho = 0.0393$$

$$Cs = 8400 * 0.0393 = 330.12$$

$$Cs/Cc = 330.12 / 420 = 0.786 > 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03 / 0.786 = 0.523$$

$$\beta = 0.523 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.786) = 0.529$$

$$\beta = 1.05 * 0.529 = 0.555 \quad : \quad n = \log 0.5 / \log \beta = 1.177$$

$$(Mo\theta)_2 = (12^{\uparrow n} + 29^{\uparrow n})^{\uparrow (1/n)} = 37.516$$

$$[K*(e/t)]_2 = 37.516/168 = 0.223$$

$$[K*(e/t)]_2/[K*(e/t)]_1 = 0.223/0.205 = 1.087 \neq 1.0$$

ITERACION # 2

$$K = 0.300, \quad [K*(e/t)]_2 = 0.223 \quad :$$

$$g_x = 0.70 \quad \text{---} \rightarrow \rho = 0.0490$$

$$g_x = 0.80 \quad \text{---} \rightarrow \rho = 0.0415$$

$$g_x = 0.75 \quad \text{---} \rightarrow \rho = 0.0453$$

$$C_s = 8400 * 0.0453 = 380.52$$

$$C_s/C_c = 380.52/420 = 0.906 > 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03/0.906 = 0.518$$

$$\beta = 0.518 + 0.20 * (0.30 - 0.25)/(0.85 + 0.906) = 0.524$$

$$\beta = 1.05 * 0.524 = 0.550 \quad : \quad n = \log 0.5 / \log \beta = 1.159$$

$$(MoB)_3 = (12 \uparrow n + 29 \uparrow n) \uparrow (1/n) = 37.802$$

$$[K*(e/t)]_3 = 37.802/168 = 0.225$$

$$[K*(e/t)]_3/[K*(e/t)]_2 = 0.225/0.223 = 1.009 \approx 1.0 \quad \text{O.K.}$$

$$* \rho = 0.0453 *$$

3.1.4.3. Método del ingeniero Francisco Morán Cabré.

$$MoB = (M_y + M_x)/2 + [(M_y + M_x) \uparrow 2/4 - M_y * M_x * (2 * \beta - 1) / \beta \uparrow 2] \uparrow 0.5$$

$$(M_x + M_y)/2 = (12 + 29)/2 = 20.50$$

$$MoB = 20.50 + [420.25 - 348 * (2 * \beta - 1) / \beta \uparrow 2] \uparrow 0.5$$

ITERACION # 1 ($\rho = 0.0300$)

$$\beta = 0.569$$

$$(Mo\theta)_1 = 20.50 + [420.25 - 348 * (2 * 0.569 - 1) / 0.569^2] \uparrow 0.5 = 36.990$$

$$g = g_x = 0.75 \text{ (siempre el menor } g)$$

$$K = 0.300, \quad [K * (e/t)]_1 = 36.990 / 168 = 0.220$$

$$g_x = 0.70 \text{ ---} \rightarrow \rho = 0.0482$$

$$g_x = 0.80 \text{ ---} \rightarrow \rho = 0.0405$$

$$g_x = 0.75 \text{ ---} \rightarrow \rho = 0.0444 \neq 0.0300$$

ITERACION # 2 ($\rho = 0.0444$)

$$C_s = 8400 * 0.0444 = 372.96$$

$$C_s / C_c = 372.96 / 420 = 0.888 > 0.50$$

$$\beta_{25} = 0.485 + 0.03 / 0.888 = 0.519$$

$$\beta = 0.519 + 0.20 * (0.30 - 0.25) / (0.85 + 0.888) = 0.535$$

$$\beta = 1.05 * 0.535 = 0.562$$

$$(Mo\theta)_2 = 20.50 + [420.25 - 348 * (2 * 0.562 - 1) / 0.562^2] \uparrow 0.5 = 37.341$$

$$[K * (e/t)]_2 = 37.341 / 168 = 0.222$$

$$[K * (e/t)]_2 / [K * (e/t)]_1 = 0.222 / 0.220 = 1.009 \approx 1.0 \quad \text{O.K.}$$

$$* \rho = 0.0444 *$$

3.2. TABULACION DE EJEMPLOS RESUELTOS

3.2.1. Datos secciones.

Se anexa a continuación.

3.2.2. Valores de la cuantía (β %).

También se anexa a continuación, donde cada columna representa un método:

Método 1 (Numeral 2.4.1.1.)

$$\phi * P_i / A_g = 1 / [A_g / (\phi * P_x) + A_g / (\phi * P_y) - A_g / (\phi * P_o)]$$

$$(P_u / A_g) / (\phi * P_i / A_g) \leq 1.0$$

Método 2 (Numeral 2.4.1.2.1.)

$$(M_y / M_{oy})^{\uparrow 1.5} + (M_x / M_{ox})^{\uparrow 1.5} \leq 1.0$$

Método 3 (Numeral 2.4.1.2.2.)

$$(M_y / M_{oy})^{\uparrow \phi} + (M_x / M_{ox})^{\uparrow \phi} \leq 1.0$$

Método 4 (Numeral 2.4.3.)

$$(C_r)^{\uparrow 2} * [(M_y / M_{oy})^{\uparrow 2} + (M_x / M_{ox})^{\uparrow 2}] \leq 1.0$$

Método 5 (Numeral 2.4.2.2.2.)

$$\text{Si } M_y/M_x \geq b/t : (M_y/Moy) + (M_x/Moy) * b/t * (1-\beta) / \beta = < 1.0$$

$$\text{Si } M_y/M_x < b/t : (M_x/Mox) + (M_y/Mox) * t/b * (1-\beta) / \beta = < 1.0$$

Método 6 (Numeral 2.4.2.1.)

$$(M_x/Mox)^n + (M_y/Moy)^n = < 1.0 : n = \log 0.5 / \log \beta$$

Método 7 (Numeral 2.4.2.2.1.)

$$\text{Si } M_y/Moy \geq M_x/Mox : M_y/Moy + M_x/Mox * (1-\beta) / \beta = < 1.0$$

$$\text{Si } M_y/Moy < M_x/Mox : M_x/Mox + M_y/Moy * (1-\beta) / \beta = < 1.0$$

Método 8 (Numeral 2.4.5.1.)

$$\text{Si } M_y \geq M_x : M_y/Moy + M_x/Mox * (1-\beta) / \beta = < 1.0$$

$$\text{Si } M_y < M_x : M_x/Mox + M_y/Moy * (1-\beta) / \beta = < 1.0$$

Método 9 (Numeral 2.4.4.)

$$M_y/Moy + M_x/Mox - (2*\beta - 1) / \beta^2 * (M_y/Moy) * (M_x/Mox) = < 1.0$$

Método 10 (Numeral 2.4.5.2.)

$$\text{Si } M_x/M_y \geq t/b : M_x/Mox + t/b * M_y/Moy * \beta = < 1.0$$

$$\text{Si } M_x/M_y < t/b \quad : \quad M_y/Moy + b/t * M_x/Mox^{*\beta} = < 1.0$$

Método 11 (Numeral 2.4.6.)

$$M_y / [\cos \theta * [1 + (2^{1-\beta} - 1) * (\sin 2\theta)^2] * Moy] = < 1.0$$

Método 12 (Numeral 2.5.1.2.)

$$\text{Si } M_x/M_y \geq t/b \quad : \quad Mo\theta = M_x + M_y * t/b^{*\beta}$$

$$\text{Si } M_x/M_y < t/b \quad : \quad Mo\theta = M_y + M_x * b/t^{*\beta}$$

Método 13 (Numeral 2.5.2.)

$$(Mo\theta)_1 = Cr * (M_x^2 + M_y^2)^{0.5}$$

$$(Mo\theta)_2 = (M_y^n + M_x^n)^{1/n} \quad : \quad n = \log 0.5 / \log \beta$$

$$\text{Si } (Mo\theta)_1 = (Mo\theta)_2$$

O.K.

Método 14 (Numeral 2.5.3.)

$$Mo\theta = (M_x + M_y) / 2 + [(M_x + M_y)^2 / 4 - (2^{*\beta} - 1) / \beta^{*\beta} * M_x * M_y]^{0.5}$$

Método 15 (Numeral 2.5.1.1.)

$$\text{Si } M_y \geq M_x \quad : \quad Mo\theta = M_y + M_x * (1-\beta) / \beta$$

$$\text{Si } M_y < M_x \quad : \quad Mo\theta = M_x + M_y * (1-\beta) / \beta$$

Método 16 (Numeral 2.3.2.)

Método 17 (Numeral 2.3.1.)

DATOS SECCIONES

SEC #	b (m)	h (m)	rx (m)	ry (m)	F'c (t/m ²)	Fy (t/m ²)	P (t)	Mx (m.t)	My (m.t)	No. barr
1	0.25	0.25	0.05	0.05	2109	42185	79	1	2	28
2	0.25	0.25	0.05	0.05	2109	42185	92	8	2	28
3	0.25	0.30	0.05	0.05	2109	42185	126	2	3	28
4	0.25	0.40	0.05	0.05	2109	42185	189	4	7	28
5	0.25	0.50	0.05	0.05	2109	42185	263	5	8	28
6	0.30	0.30	0.05	0.05	2109	42185	57	5	5	28
7	0.30	0.30	0.05	0.05	2109	42185	76	3	7	28
8	0.30	0.40	0.05	0.05	2109	42185	126	3	11	28
9	0.30	0.50	0.05	0.05	2109	42185	189	14	14	28
10	0.30	0.60	0.05	0.05	2109	42185	265	16	16	28
11	0.40	0.40	0.05	0.05	2109	42185	269	6	7	28
12	0.40	0.40	0.05	0.05	2109	42185	302	7	8	28
13	0.40	0.50	0.05	0.05	2109	42185	126	12	29	28
14	0.40	0.60	0.05	0.05	2109	42185	353	4	21	28
15	0.40	0.60	0.05	0.05	2109	42185	202	21	22	28
16	0.50	0.50	0.05	0.05	2109	42185	158	24	28	28
17	0.50	0.50	0.05	0.05	2109	42185	368	9	13	28
18	0.50	0.60	0.05	0.05	2109	42185	252	16	42	28
19	0.50	0.70	0.05	0.05	2109	42185	368	40	40	28
20	0.50	0.80	0.05	0.05	2109	42185	504	39	46	28
21	0.50	0.80	0.05	0.05	2109	42185	252	50	72	28
22	0.25	0.25	0.05	0.05	2812	42185	105	1	2	28
23	0.25	0.25	0.05	0.05	2812	42185	123	2	2	28
24	0.25	0.30	0.05	0.05	2812	42185	168	3	4	28
25	0.25	0.40	0.05	0.05	2812	42185	252	5	9	28
26	0.25	0.50	0.05	0.05	2812	42185	350	7	10	28
27	0.30	0.30	0.05	0.05	2812	42185	76	6	7	28
28	0.30	0.30	0.05	0.05	2812	42185	101	4	10	28
29	0.30	0.40	0.05	0.05	2812	42185	168	4	14	28
30	0.30	0.50	0.05	0.05	2812	42185	252	19	19	28
31	0.30	0.60	0.05	0.05	2812	42185	353	21	22	28
32	0.40	0.40	0.05	0.05	2812	42185	358	9	9	28
33	0.40	0.40	0.05	0.05	2812	42185	403	9	11	28
34	0.40	0.50	0.05	0.05	2812	42185	168	16	39	28
35	0.40	0.60	0.05	0.05	2812	42185	470	5	28	28
36	0.40	0.60	0.05	0.05	2812	42185	269	28	29	28
37	0.50	0.50	0.05	0.05	2812	42185	210	32	38	28
38	0.50	0.50	0.05	0.05	2812	42185	490	12	17	28
39	0.50	0.60	0.05	0.05	2812	42185	336	22	56	28
40	0.50	0.70	0.05	0.05	2812	42185	490	53	53	28
41	0.50	0.80	0.05	0.05	2812	42185	672	52	62	28
42	0.50	0.80	0.05	0.05	2812	42185	336	67	95	28
43	0.50	0.70	0.05	0.05	2812	28123	368	40	40	28
44	0.50	0.80	0.05	0.05	2812	28123	504	39	46	28
45	0.50	0.80	0.05	0.05	2812	28123	252	50	72	28
46	0.30	0.50	0.05	0.05	2812	28123	252	19	19	28
47	0.30	0.60	0.05	0.05	2812	28123	353	21	22	28
48	0.40	0.40	0.05	0.05	2812	28123	358	9	9	28
49	0.50	0.80	0.05	0.05	2812	28123	672	52	62	28
50	1.00	0.50	0.10	0.05	2812	28123	475	60	80	28

CUANTIA (%) POR EL METODO

SEC#	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)
1	3.78	3.04	3.22	3.08	3.21	3.07	3.21	3.21	3.02	3.22	3.04	3.17	2.93	2.97	3.12	2.27	1.80
2	12.11	10.33	13.37	10.41	11.51	11.05	11.51	11.51	11.27	11.06	10.35	11.60	11.78	11.93	12.31	10.93	7.23
3	5.48	4.85	5.21	5.00	5.10	4.96	5.10	5.10	4.93	4.92	4.88	4.75	4.55	4.57	4.71	4.31	3.32
4	7.54	6.90	7.60	7.29	7.61	7.09	7.38	7.38	7.25	6.96	6.95	7.09	6.22	6.29	6.52	6.47	5.16
5	7.28	6.97	7.47	7.45	7.48	7.07	7.31	7.31	7.20	6.94	6.95	6.91	5.93	5.99	6.15	6.64	5.36
6	3.93	2.62	3.16	3.19	3.18	3.19	3.18	3.18	3.18	3.59	3.18	4.33	4.10	4.10	4.10	2.84	2.05
7	4.46	3.34	3.76	3.43	3.86	3.70	3.86	3.86	3.66	4.15	3.43	4.44	4.18	4.24	4.47	3.27	2.47
8	4.72	4.03	4.29	4.15	4.50	4.19	4.42	4.42	4.26	4.28	3.89	4.85	3.98	4.04	4.23	3.69	3.08
9	6.28	5.54	6.46	6.38	6.64	6.12	6.28	5.63	6.08	5.45	5.78	6.05	5.21	5.24	5.51	5.37	4.14
10	5.89	5.48	6.32	6.36	6.41	5.88	6.10	5.19	5.87	5.27	5.54	5.61	4.71	4.75	5.03	5.11	4.22
11	3.79	3.54	3.74	3.66	3.57	3.55	3.57	3.57	3.51	3.58	3.55	3.28	3.22	3.22	3.26	3.20	2.73
12	4.72	4.52	4.81	4.67	4.56	4.56	4.56	4.56	4.57	4.53	4.50	4.15	4.14	4.14	4.18	4.18	3.46
13	4.63	3.63	4.01	3.81	4.38	4.08	4.29	4.29	4.13	4.14	3.68	5.00	4.33	4.39	4.59	3.74	2.83
14	3.45	3.36	3.42	3.39	3.50	3.36	3.48	3.48	3.44	3.41	3.33	3.43	3.01	3.05	3.12	3.21	2.87
15	2.98	2.52	2.90	2.98	3.09	2.79	2.96	2.96	2.79	2.75	2.69	3.17	2.46	2.48	2.69	2.43	2.04
16	3.05	2.40	2.79	2.71	2.88	2.83	2.88	2.88	2.81	3.22	2.81	3.39	3.10	3.10	3.08	2.59	1.99
17	2.52	2.33	2.44	2.42	2.37	2.30	2.37	2.37	2.32	2.41	2.32	2.23	2.08	2.08	2.14	2.08	2.00
18	2.87	2.51	2.79	2.59	2.96	2.72	2.93	2.93	2.77	2.97	2.48	3.07	2.54	2.59	2.80	2.43	2.08
19	3.22	2.96	3.37	3.42	3.42	3.19	3.33	2.98	3.20	3.09	3.13	3.29	2.77	2.78	2.94	2.81	2.41
20	3.25	3.15	3.48	3.54	3.55	3.31	3.48	3.48	3.32	3.15	3.18	3.23	2.73	2.76	2.97	2.89	2.65
21	4.24	3.47	3.92	3.90	4.28	3.94	4.13	4.13	3.97	3.73	3.60	4.87	3.90	3.93	4.12	3.55	2.77
22	4.22	3.37	3.55	3.42	3.50	3.38	3.50	3.50	3.42	3.56	3.35	3.32	3.09	3.09	3.24	2.72	1.86
23	5.88	4.99	5.39	5.27	5.01	5.06	5.01	5.01	5.02	4.93	5.01	4.62	4.72	4.72	4.72	4.47	3.03
24	7.40	6.58	7.20	6.86	6.98	6.68	6.86	6.86	6.71	6.57	6.60	6.22	6.21	6.24	6.44	5.75	4.51
25	9.67	8.98	10.38	9.46	9.84	9.27	9.58	9.58	9.28	9.04	8.94	9.18	8.04	8.13	8.42	8.42	6.70
26	9.34	9.02	10.08	9.63	9.75	9.20	9.49	9.49	9.26	8.94	8.98	8.92	7.69	7.76	7.97	8.55	6.92
27	5.00	3.36	4.12	3.93	4.12	4.02	4.12	4.12	4.05	4.65	4.00	5.43	5.16	5.16	5.25	3.58	2.64
28	6.38	4.79	5.70	4.85	5.72	5.43	5.72	5.72	5.50	6.02	5.00	6.17	6.07	6.15	6.54	4.81	3.56
29	5.92	5.08	5.59	5.27	5.73	5.30	5.64	5.64	5.45	5.48	5.00	5.87	4.98	5.08	5.32	4.62	3.91
30	8.52	7.57	9.58	8.69	9.17	8.32	8.64	7.74	8.36	7.47	7.93	8.24	7.12	7.16	7.51	7.32	5.63
31	7.96	7.58	9.04	8.58	8.73	8.02	8.33	8.33	8.06	7.32	7.65	7.75	6.41	6.48	6.84	6.95	5.74
32	5.08	4.79	5.12	5.00	4.79	4.80	4.79	4.79	4.78	4.80	4.79	4.34	4.33	4.33	4.33	4.25	3.68
33	6.24	6.01	6.47	6.21	6.09	6.05	6.09	6.09	6.06	6.08	6.05	5.35	5.52	5.53	5.60	5.60	4.63
34	6.24	4.92	5.70	5.21	5.94	5.60	5.84	5.84	5.66	5.65	5.00	6.63	5.83	5.91	6.24	5.03	3.81
35	4.54	4.47	4.60	4.51	4.63	4.48	4.61	4.61	4.53	4.53	4.42	4.51	4.00	4.05	4.14	4.27	3.81
36	3.90	3.28	3.92	3.98	4.04	3.66	3.84	3.84	3.62	3.62	3.50	4.16	3.23	3.26	3.54	3.19	2.69
37	4.11	3.22	3.92	3.70	3.84	3.83	3.84	3.84	3.77	4.36	3.80	4.60	4.10	4.10	4.17	3.51	2.69
38	3.30	3.09	3.29	3.18	3.12	3.05	3.12	3.12	3.06	3.17	3.04	2.91	2.74	2.75	2.82	2.74	2.64
39	3.83	3.41	3.84	3.56	3.94	3.65	3.90	3.90	3.65	3.96	3.37	4.12	3.42	3.49	3.77	3.27	2.80
40	4.22	3.95	4.61	4.59	4.52	4.21	4.41	3.89	4.23	4.07	4.11	4.32	3.64	3.65	3.86	3.70	3.20
41	4.35	4.28	4.88	4.80	4.85	4.42	4.77	4.77	4.48	4.26	4.28	4.37	3.67	3.72	4.00	3.90	3.56
42	5.56	4.58	5.40	5.18	5.71	5.30	5.54	5.54	5.34	5.00	4.78	6.19	5.17	5.21	5.44	4.69	3.66
43	2.33	2.41	2.54	3.06	2.84	2.54	2.76	2.16	2.52	2.81	2.47	3.05	1.95	1.97	2.22	1.98	2.26
44	2.32	2.60	2.75	3.15	3.01	2.62	2.94	2.94	2.65	2.81	2.54	2.75	1.76	1.82	2.14	2.03	2.52
45	3.44	3.97	4.26	4.58	5.00	4.57	4.94	4.94	4.63	4.25	4.11	3.24	2.07	2.10	2.26	3.61	3.29
46	10.34	10.46	12.87	12.04	12.45	11.35	11.83	10.52	11.36	10.31	10.88	11.26	9.49	9.56	10.19	9.11	7.75
47	9.30	10.60	12.31	12.01	12.12	11.15	11.76	11.76	11.24	10.29	10.70	10.27	8.15	8.26	8.78	9.03	8.13
48	5.51	6.85	7.21	7.19	6.78	6.84	6.78	6.78	6.85	6.81	6.78	5.12	5.31	5.31	5.31	5.72	5.40
49	4.91	6.06	6.65	6.81	6.79	6.26	6.58	6.58	6.28	6.05	6.05	5.32	4.55	4.62	4.97	5.21	5.08
50	2.26	2.30	2.41	2.62	2.71	2.42	2.71	2.05	2.45	2.12	2.40	3.09	2.09	2.12	1.50	2.13	2.23

4. ANALISIS DE RESULTADOS DE LOS EJEMPLOS

Se tomará como criterio de comparación el error relativo dado por la siguiente expresión:

$$\text{Error relativo} = |X - X'| / X'$$

Donde

X : es una aproximación de X'

Para visualizar si un método está por el lado de la seguridad (+) o de la inseguridad (-) se ha transformado la anterior expresión en:

$$\text{Error relativo (\%)} = (X/X' - 1) * 100$$

A continuación se anexa la tabulación de los errores relativos de cada método. Debe anotarse, que se ha escogido como método de comparación el método numérico dado por el ingeniero Francisco Morán Cabré.

Se ha escogido como otro criterio de análisis, el dado por la desviación estandar:

$$Sd = \left[\frac{\sum (X_i - X)^2}{(n-1)} \right]^{0.5}$$

Donde

X_i : es el error relativo para la sección # i

X : es el promedio de los errores relativos.

También se anexa la tabulación del error relativo promedio y la desviación estandar para cada método.

Los métodos # 7 y # 8, son aparentemente idénticos, pero a continuación se muestran soluciones para algunas secciones.

Sección #	Error relativo (%)	
	Método # 7	Método # 8
9	51.7	36.1
10	44.4	23.0
19	38.0	23.6
30	53.6	37.6
40	37.9	21.6
43	22.1	-4.3
46	52.6	35.7
50	21.4	-7.8

ERROR RELATIVO (%) DEL METODO

Sec#	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
1	109.8	68.8	78.8	71.1	78.2	70.8	78.2	78.2	68.1	79.2	68.6	75.9	62.9	64.9	73.2	26.1
2	67.4	42.8	84.8	43.9	59.0	52.7	59.0	59.0	55.7	52.9	43.1	60.4	62.9	64.9	70.1	51.0
3	65.3	46.4	57.0	50.7	53.7	49.5	53.8	53.8	48.6	48.4	47.2	43.3	37.1	37.8	42.1	30.1
4	46.1	33.7	47.2	41.2	47.3	37.4	43.0	43.0	40.5	34.7	34.6	37.3	20.5	21.8	26.3	25.2
5	35.8	30.1	39.4	39.0	39.6	31.9	36.3	36.3	34.3	29.6	29.8	29.0	10.7	11.8	14.9	23.9
6	91.8	27.9	54.5	55.6	55.6	55.8	55.6	55.6	55.2	75.5	55.6	111.7	100.3	100.3	100.3	38.6
7	80.7	35.1	52.2	38.8	56.3	49.7	56.3	56.3	48.1	68.2	38.9	79.8	69.5	71.5	81.0	32.3
8	53.1	30.7	39.2	34.8	46.0	36.1	43.5	43.5	38.3	38.9	26.3	57.4	29.3	31.1	37.3	19.9
9	51.8	34.0	56.1	54.1	60.5	47.8	51.7	36.1	46.9	31.7	39.5	46.2	25.9	26.6	33.1	29.6
10	39.3	29.8	49.6	50.6	51.7	39.2	44.4	23.0	39.0	24.8	31.1	32.9	11.4	12.5	19.0	20.9
11	39.0	29.7	36.9	34.0	31.0	30.1	31.0	31.0	28.6	31.1	30.0	20.2	17.9	17.9	19.3	17.2
12	36.3	30.5	38.8	34.9	31.7	31.7	31.7	31.7	32.1	30.7	30.1	20.0	19.5	19.5	20.6	20.7
13	64.0	28.5	41.9	34.9	55.0	44.5	51.9	51.9	46.3	46.4	30.2	76.9	53.1	55.2	62.4	32.2
14	20.4	17.2	19.3	18.1	21.9	17.3	21.4	21.4	19.9	19.1	16.0	19.7	4.9	6.4	8.9	12.0
15	46.0	23.7	42.2	46.1	51.8	36.9	45.2	45.2	37.0	35.2	31.9	55.4	20.8	21.8	32.2	19.1
16	53.5	20.8	40.6	36.3	44.9	42.4	44.9	44.9	41.4	62.2	41.3	70.5	55.8	55.8	55.3	30.2
17	25.9	16.8	22.3	21.0	18.8	15.0	18.8	18.8	16.0	20.7	15.9	11.7	3.9	4.3	7.3	3.9
18	37.5	20.5	34.0	24.4	42.0	30.6	40.6	40.6	32.7	42.7	19.0	47.3	21.9	24.5	34.3	16.4
19	33.2	22.8	39.5	41.6	41.5	32.0	38.0	23.6	32.5	28.0	29.6	36.1	14.8	15.3	21.8	16.3
20	22.7	18.9	31.2	33.6	34.0	24.7	31.3	31.3	25.2	18.9	19.9	21.8	3.0	4.3	12.2	9.2
21	53.2	25.3	41.7	40.7	54.6	42.2	49.2	49.2	43.5	34.7	30.0	75.8	40.9	42.1	49.0	28.2
22	127.1	81.3	90.7	83.7	88.3	81.5	88.3	88.3	83.9	91.5	80.3	78.4	66.0	66.0	74.2	46.0
23	93.9	64.4	77.9	73.7	65.4	66.7	65.4	65.4	65.4	62.7	65.4	52.5	55.6	55.6	55.6	47.5
24	64.2	46.0	59.7	52.1	54.8	48.2	52.2	52.2	48.8	45.8	46.5	37.9	37.8	38.3	42.9	27.6
25	44.3	34.0	54.9	41.1	46.8	38.4	42.9	42.9	38.4	34.9	33.4	37.0	20.0	21.3	25.6	25.6
26	35.0	30.4	45.7	39.2	41.0	33.0	37.1	37.1	33.8	29.2	29.9	29.0	11.2	12.2	15.2	23.6
27	89.2	27.3	56.1	48.6	55.9	52.1	55.9	55.9	53.1	75.9	51.3	105.3	95.3	95.4	98.6	35.6
28	79.3	34.7	60.1	36.3	60.6	52.6	60.6	60.6	54.4	69.1	40.5	73.4	70.6	72.9	83.6	35.1
29	51.6	30.0	43.2	34.9	46.8	35.5	44.4	44.4	39.6	40.4	28.0	50.4	27.4	29.9	36.2	18.3
30	51.4	34.5	70.3	54.4	63.1	47.8	53.6	37.6	48.6	32.8	40.9	46.4	26.6	27.3	33.4	30.1
31	38.8	32.1	57.6	49.6	52.3	39.8	45.2	45.2	40.6	27.7	33.3	35.2	11.8	13.0	19.3	21.1
32	37.9	30.0	39.1	35.7	30.1	30.2	30.1	30.1	29.7	30.3	30.1	17.8	17.6	17.6	17.6	15.3
33	34.7	29.7	39.6	34.1	31.4	30.7	31.4	31.4	30.8	31.2	30.5	15.5	19.2	19.3	20.8	20.8
34	63.6	29.1	49.5	36.7	55.9	46.8	53.3	53.3	48.4	48.3	31.2	73.8	53.1	55.1	63.6	32.1
35	19.0	17.1	20.7	18.3	21.4	17.4	20.9	20.9	18.7	18.8	16.0	18.2	4.8	6.2	8.5	12.1
36	45.2	22.1	45.9	48.3	50.3	36.3	42.9	42.9	34.9	34.6	30.4	54.9	20.3	21.2	31.7	18.6
37	52.9	19.7	45.8	37.8	42.8	42.6	42.8	42.8	40.2	62.1	41.5	71.3	52.4	52.4	55.2	30.7
38	24.7	17.0	24.5	20.3	18.0	15.5	18.0	18.0	15.8	19.9	14.9	10.3	3.6	3.9	6.9	3.5
39	36.9	22.1	37.3	27.3	41.0	30.6	39.4	39.4	30.7	41.8	20.6	47.3	22.4	24.8	34.7	16.8
40	32.0	23.6	44.0	43.6	41.5	31.8	37.9	21.6	32.2	27.2	28.6	35.1	13.9	14.2	20.9	15.8
41	22.2	20.4	37.0	34.8	36.3	24.2	34.0	34.0	26.0	19.6	20.3	22.9	3.1	4.5	12.5	9.5
42	51.8	25.0	47.5	41.4	56.0	44.7	51.2	51.2	45.9	36.6	30.6	69.0	41.1	42.4	48.5	28.0
43	3.2	6.8	12.5	35.7	25.7	12.5	22.1	-4.3	11.5	24.6	9.5	35.0	-13.8	-12.9	-1.8	-12.2
44	-7.9	2.9	8.9	24.9	19.3	3.8	16.7	16.7	5.2	11.3	0.5	9.1	-30.3	-28.0	-15.2	-19.7
45	4.7	20.9	29.7	39.2	52.1	39.1	50.3	50.3	40.9	29.3	25.1	-1.4	-37.2	-36.2	-31.2	9.7
46	33.3	34.9	66.0	55.3	60.6	46.4	52.6	35.7	46.6	33.1	40.3	45.2	22.4	23.3	31.4	17.5
47	14.4	30.4	51.4	47.7	49.1	37.2	44.6	44.6	38.3	26.5	31.6	26.3	0.3	1.7	8.0	11.1
48	2.2	27.0	33.5	33.2	25.5	26.6	25.5	25.5	26.8	26.1	25.5	-5.1	-1.6	-1.6	-1.6	5.9
49	-3.3	19.4	31.1	34.1	33.8	23.3	29.6	29.6	23.7	19.1	19.2	4.8	-10.4	-9.0	-2.2	2.6
50	1.5	3.2	7.9	17.6	21.4	8.5	21.4	-7.8	9.9	-4.8	7.5	38.6	-6.2	-4.7	-32.6	-4.4

ERROR RELATIVO PROMEDIO (%) DEL METODO

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
44.8	29.0	44.7	40.5	45.2	37.3	42.7	40.1	37.9	38.2	32.2	43.5	29.7	30.4	35.0	22.0

DESVIACION STANDARD (%) DEL METODO

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
28.5	14.1	17.8	13.5	15.3	15.2	14.9	17.7	15.0	19.2	14.9	26.4	28.9	28.8	29.8	13.9

5. RECOMENDACIONES

A continuación se presentan tres criterios de selección, para que el ingeniero diseñador pueda satisfacer sus necesidades.

5.1. CRITERIO DEL ERROR RELATIVO.

5.1.1. Error relativo $\geq 30\%$.

Se puede observar que en la sección # 22 los métodos del 1 al 11 presentan errores relativos mayores del 80%.

En la sección # 6 los métodos del 12 al 15 presentan errores relativos $> 100\%$.

En la sección # 2 el método 16 tiene un error relativo = 51%.

5.1.2. Error relativo =< -10% .

Método #	Sección #	Error relativo (%)
13	43	-13.8
13	44	-30.3
13	45	-37.2
14	43	-12.9
14	44	-28.0
14	45	-36.2
15	44	-15.2
15	45	-31.2
15	50	-32.6
16	43	-12.2
16	44	-19.7

5.2. CRITERIO DE MANEJABILIDAD DE CADA METODO.

Se presenta en orden descendente:

- Métodos 12 a 15, ya que sólo hay un diseño uniaxial, y por tanto la mejor facilidad de manejo.
- Métodos 5, 7, 8, 9, 10; ya que aproximan la superficie de interacción mediante dos líneas rectas; hay, por tanto, dos diseños a flexión uniaxial.
- Método 11, ya que se presenta una fórmula algo fácil de evaluar y hay diseño a dos flexiones uniaxiales.
- Métodos 2, 3, 4, 6; ya que son métodos exponenciales con diseño a dos flexiones uniaxiales.

- Método 1, ya que se presenta el diseño para tres cargas axiales.
- Métodos 16 y 17, ya que solamente se pueden realizar mediante ordenador electrónico.

5.3. CRITERIO DE LA DESVIACION ESTANDAR Y EL PROMEDIO DE LOS ERRORES RELATIVOS.

presentan
Se presentan en orden de menor valor:

Métodos 16, 4, 2, 11, 7, 9, 6, 5, 3, 8, 10, 12, 1, 14, 13,
15.

Según estas recomendaciones, ningún método aproximado se acerca a la solución del problema; pero dada la necesidad que el ingeniero diseñador tiene, queda a criterio de éste la selección de algún método que satisfaga sus necesidades.

6. CONCLUSIONES

- Los métodos de reducción a dos flexiones rectas o uniaxiales, dados en el numeral 2.4., dan una buena y rápida aproximación al problema de flexión biaxial; que los resultados son muy conservadores, queda a criterio del ingeniero diseñador.
- Los métodos de reducción a una sola flexión pueden conducir a errores del lado de la inseguridad y, por tanto, debe tenerse cuidado al usar cualesquiera de ellos.
- En los métodos de reducción a dos flexiones o a una flexión, cualquier solución del problema biaxial consiste en dos partes:
 - Determinar el valor de β
 - Determinar una ecuación que represente la forma de la curva de interacción M_{nx} v.s. M_{ny} .
- Se observan las ventajas de las fórmulas del ingeniero Albert J. Gouwens, sobre los gráficos de la PCA, en el cálculo del factor β .

- El método numérico propuesto por el ingeniero Gabriel Ignacio Gutiérrez, parece ser una buena aproximación del problema con respecto a los métodos de reducción a dos flexiones; pero, falla en pocos casos (4%) cuando se compara con el método numérico del ingeniero Francisco Morán Cabré.

- Puesto que la mayor parte de las investigaciones realizadas se han limitado a procedimientos analíticos, se requieren ensayos experimentales bajo carga cíclica, para verificar sus hipótesis, validez y sensibilidad.

BIBLIOGRAFIA

1. Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (AIS),
''Código Colombiano de Construcciones Sismo-resistentes. Decreto 1400'', Bogotá, jun., 1984.
2. American Concrete Institute Committee 340, ''Design Handbook In Accordance With Strength Design Method of ACI 318-83'', ACI Special Publication SP-17A (85), Detroit, 221 p.
3. Bresler, B., ''Design Criterial for Reinforced Columns under Biaxial Bending'', ACI Journal, Proceedings, Vol. 57, nov., 1960, pp 481-490, Disc., 1621-1638.
4. Chu, K.W., and Salmon, Ch.G., ''Reinforced Concrete Design'', Third Edition, Harper International, N.Y., 1979.
5. Everard, N.J., and Cohen E., ''Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete Columns'', ACI Committee 340, Special Publication SP-7.
6. Ferguson, P.M., ''Reinforced Concrete Fundamentals'', 3a. Ed., John Wiley, N.Y., 1973.
7. Gouwens, A.J., ''Biaxial Bending Simplified'', Reinforced Concrete Columns (SP-50), Detroit: American Concrete Institute, 1975, pp 233-261.
8. Jiménez, M.P., García, M.A., Morán, C.F., ''Hormigón

Armado.'', 8a. Ed., Gustavo Gili, Barcelona.

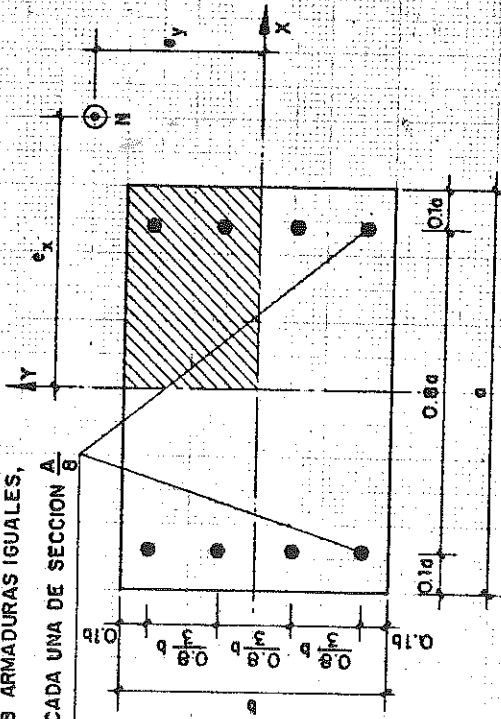
9. Marín, J., ''Abacos, Fórmulas y Criterios para Cálculo de Columnas en Edificios de Concreto Armado. Resumen de una Investigación UCV-BANAP.'', Instituto de Materiales y Modelos Estructurales (IMME). Boletín Técnico, Universidad Central de Venezuela Facultad de Ingeniería, Caracas, ene.-jun. 1978, pp 45-102.
10. Meek, J.L., ''Ultimate Strength of Columns with Biaxially Eccentric Loads'', ACI Journal, Proceedings, 60, aug., 1963, pp 1053-1064.
11. Montejo, R.S., ''Método Directo para el Predimensionamiento de Columnas sometidas a Flexión Biaxial Terceras Jornadas estructurales de la Ingeniería de Colombia'', Bogotá: Sociedad Colombiana de Ingenieros, oct. 1979, Documento 5.
12. Morán, F., ''Design of Reinforced Concrete Sections Under Normal Loads and Stresses in the Ultimate Limite State'', Bulletin d' Information No. 83, Comite European du Beton, Paris, apr., 1972.
13. Morán, F., and Verde, A., ''Flexión Esviada: Estado Actual del Tema'', Informes de la Construcción No. 217, Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento, Madrid, ene.-feb., 1970
14. Pannell, F.N., ''Failure Surface for Members in Compression and Biaxial Bending'', ACI Journal, Proceedings, 60, jan., 1963, pp 129-160.
15. Park, R., and Paulay, T.E., ''Reinforced Concrete Structures'', John Wiley, N.Y., 1975.
16. Parme, A.L., Nieves, J.M., and Gouwens, A., ''Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending'', ACI Journal, Proceedings, 63, sept., 1966, pp 911-923.

17. Portland Cement Association, "Capacity of Reinforced Rectangular Columns subject to Biaxial Bending" Advanced Engineering Bulletin 18, Illinois, 1966

18. Portland Cement Association, "Notes on ACI 318-83. Building Code Requirements of Reinforced Concrete with Design Applications", Illinois, 1984.

$n^* = 0.30$

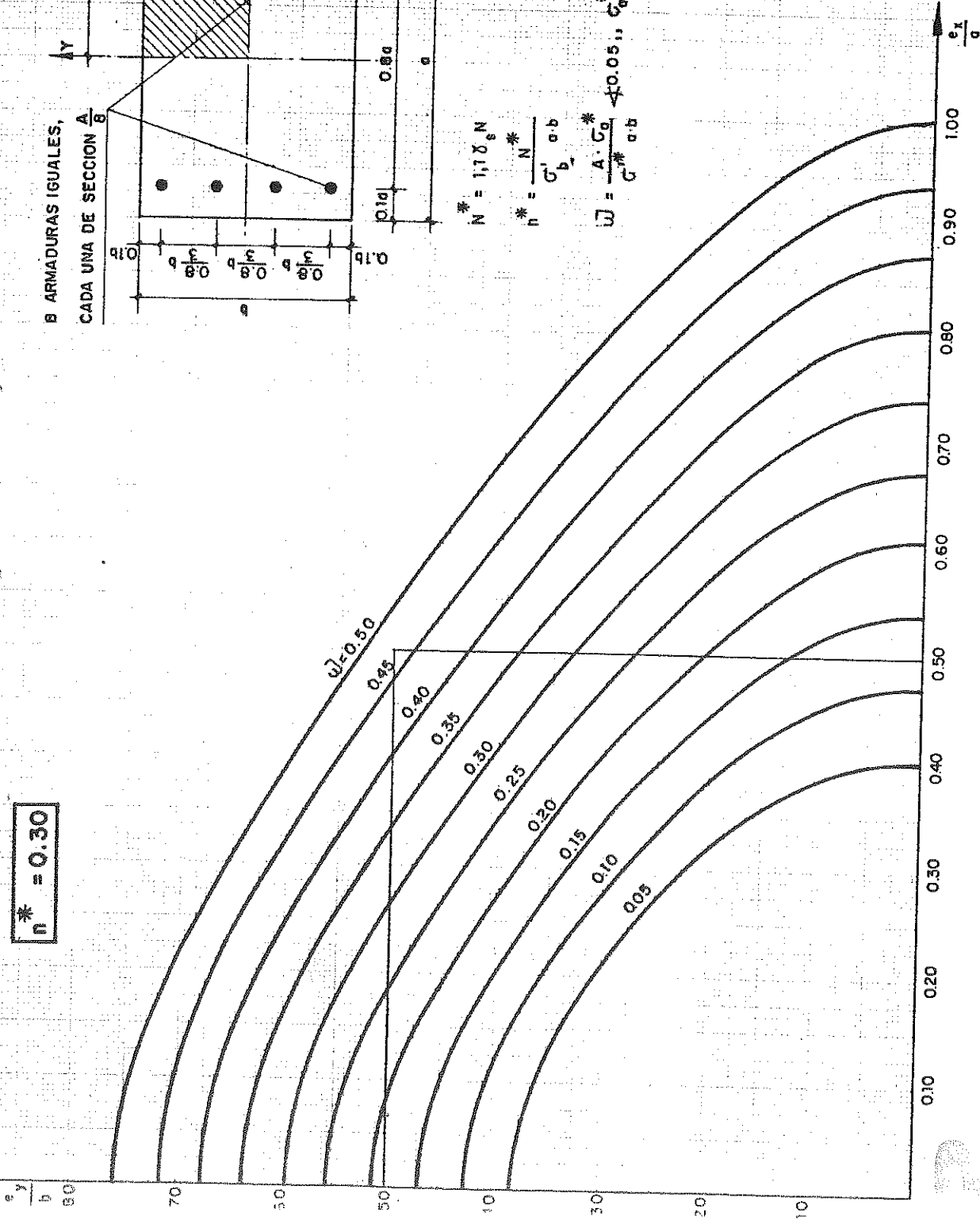
B ARMADURAS IGUALES,
CADA UNA DE SECCION $\frac{A}{8}$



$$N^* = 1,170 \frac{N}{b}$$

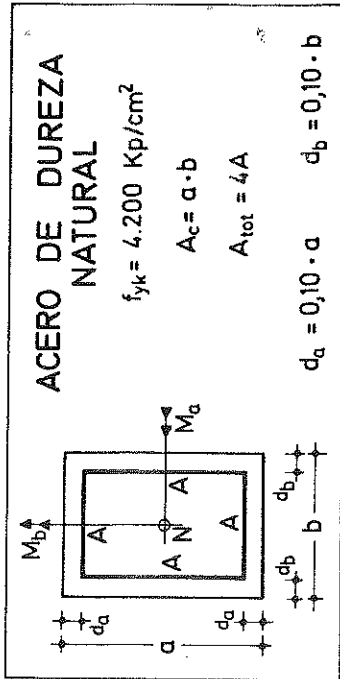
$$n^* = \frac{N^*}{C_b' \sigma_b}$$

$$W = \frac{A \cdot C_g}{C_b' \sigma_b} \leq 0.05; C_g^* = \frac{4200}{\gamma_e}$$



Abaco adimensional para dimensionamiento.

ABACO EN ROSETA PARA FLEXION ESVIADA



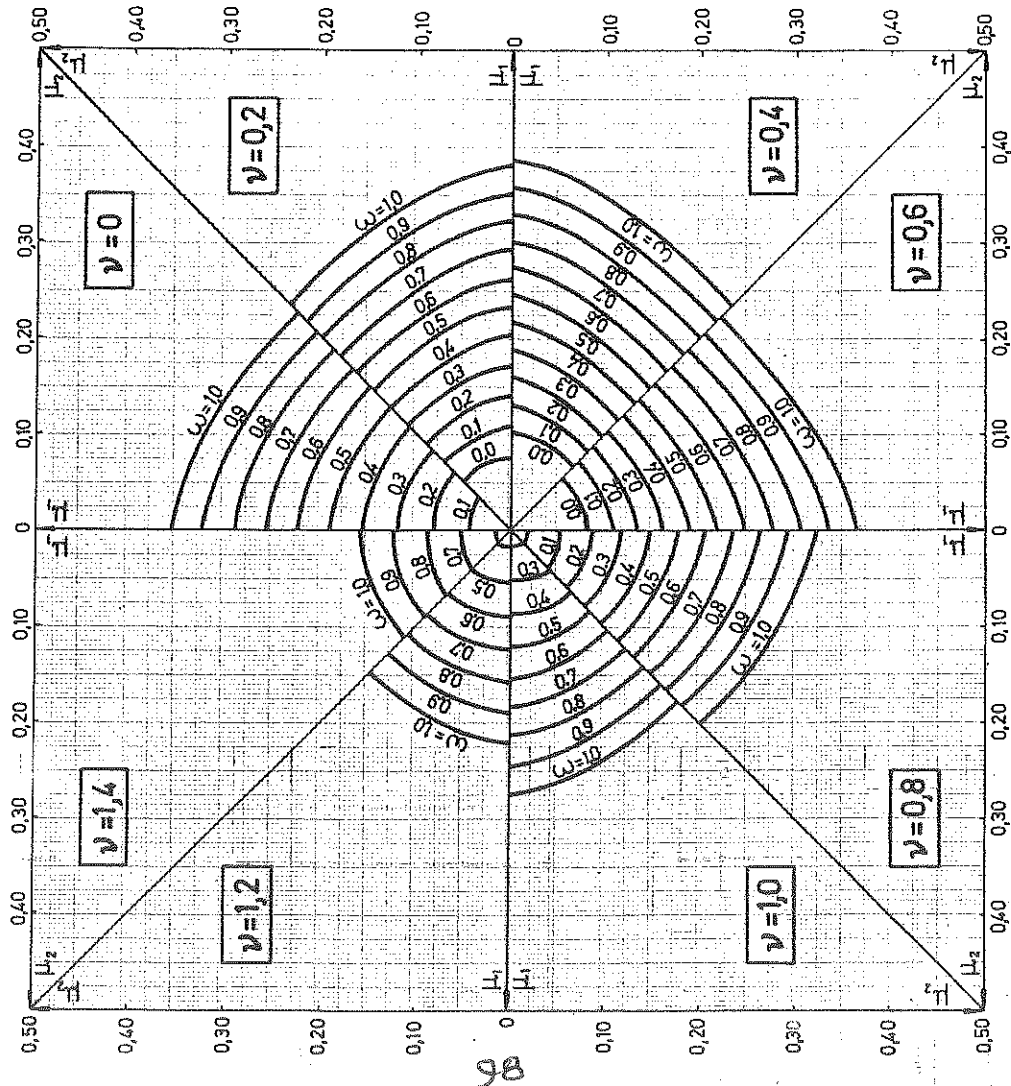
$$\mu_a = \frac{M_{ad}}{A_c \cdot a \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_b = \frac{M_{bd}}{A_c \cdot b \cdot f_{cd}}$$

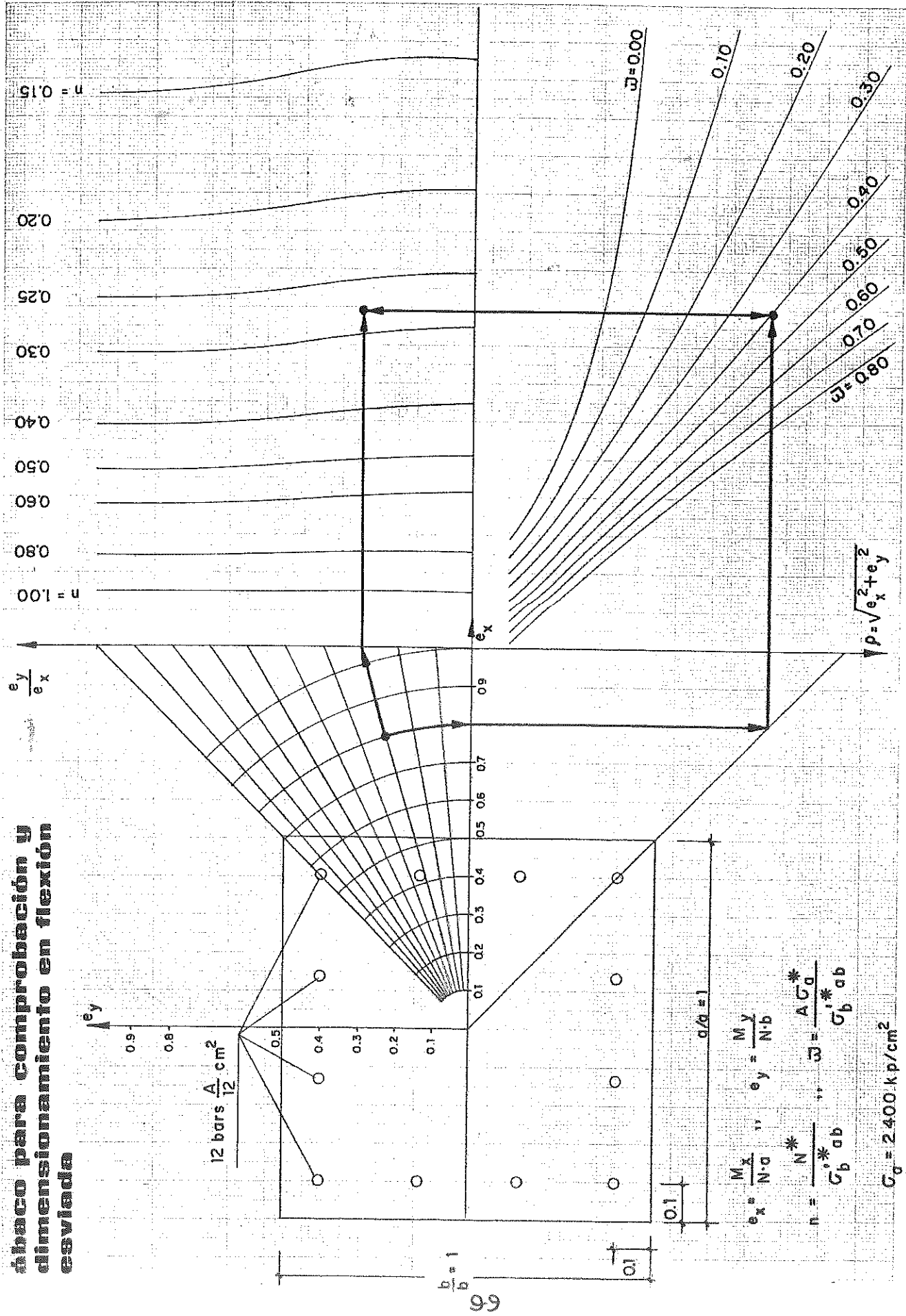
$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}}$$

$$\omega = \frac{A_{tot} \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}}$$

si $\mu_a > \mu_b$: $\mu_1 = \mu_a$, $\mu_2 = \mu_b$
 si $\mu_a < \mu_b$: $\mu_1 = \mu_b$, $\mu_2 = \mu_a$



Ábaco para comprobación y dimensionamiento en flexión esviada



Ábaco para comprobación y dimensionamiento en flexión esviada.

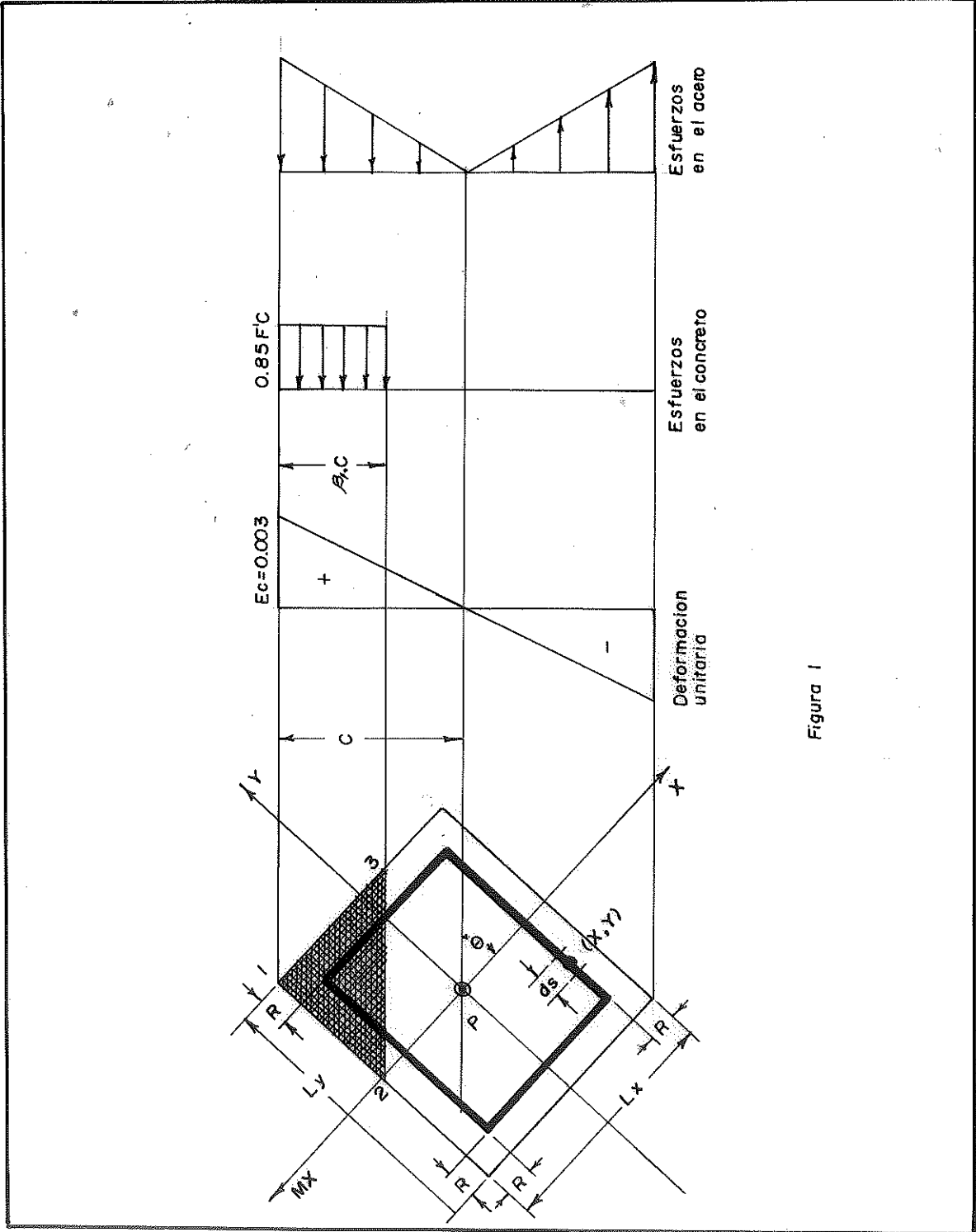


Figura 1

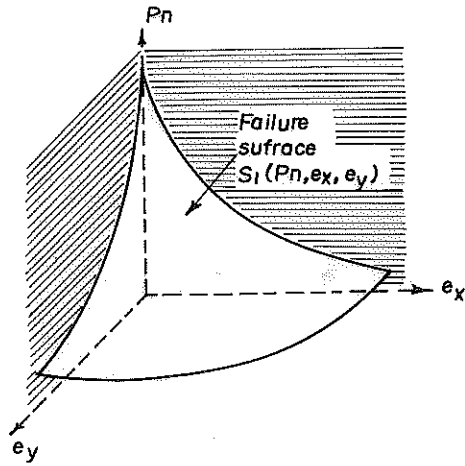


Figura 2

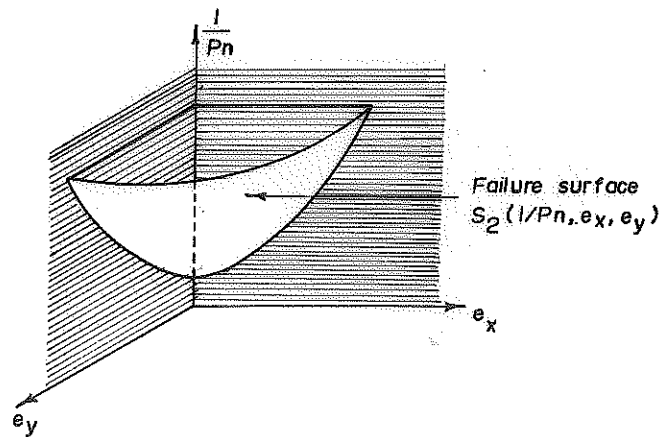


Figura 3

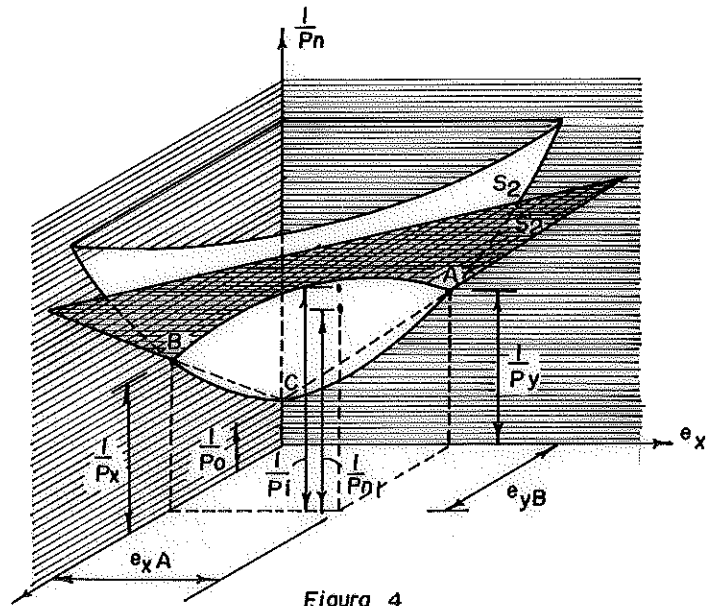


Figura 4

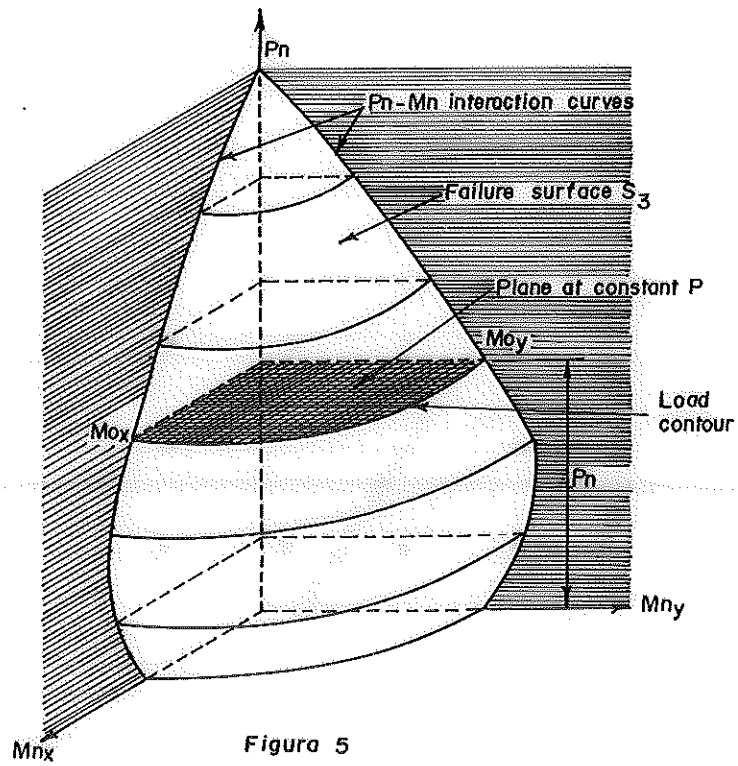


Figura 5

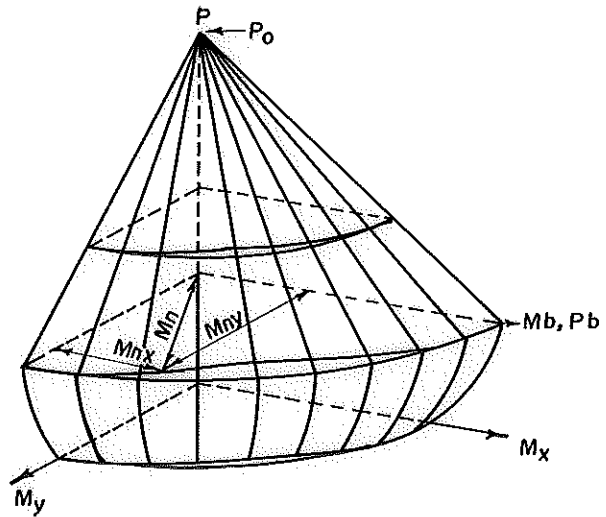


Figura 6

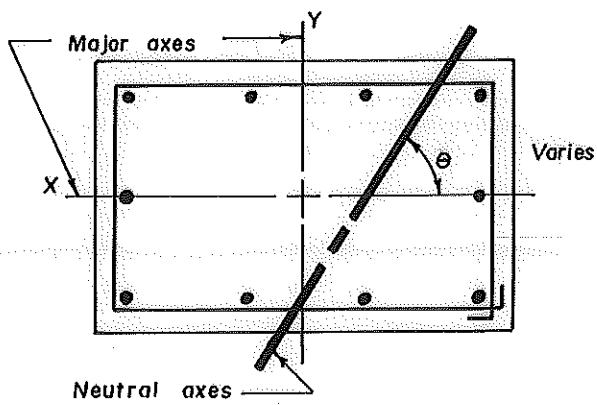


Figura 7

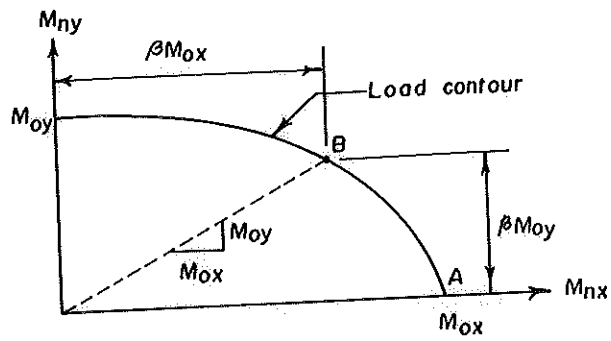


Figura 8

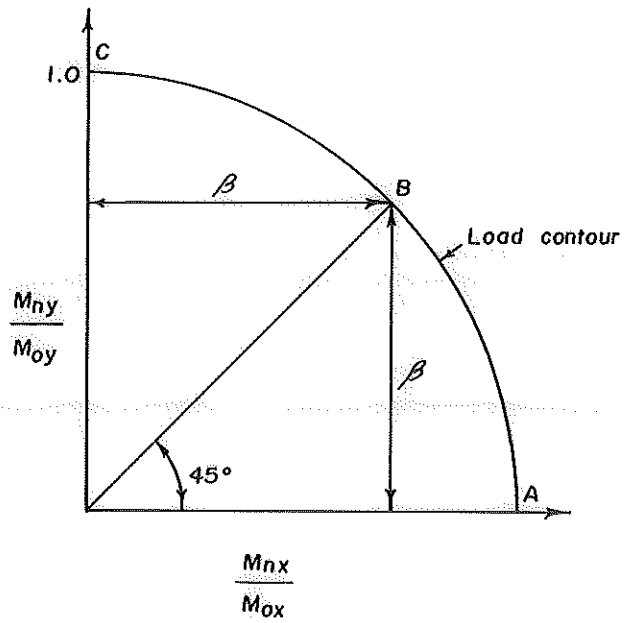


Figura 9

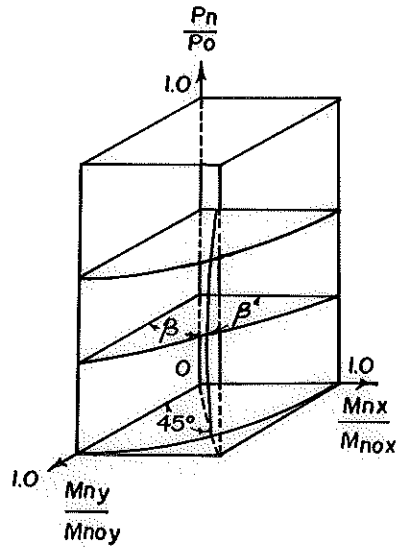


Figura 10

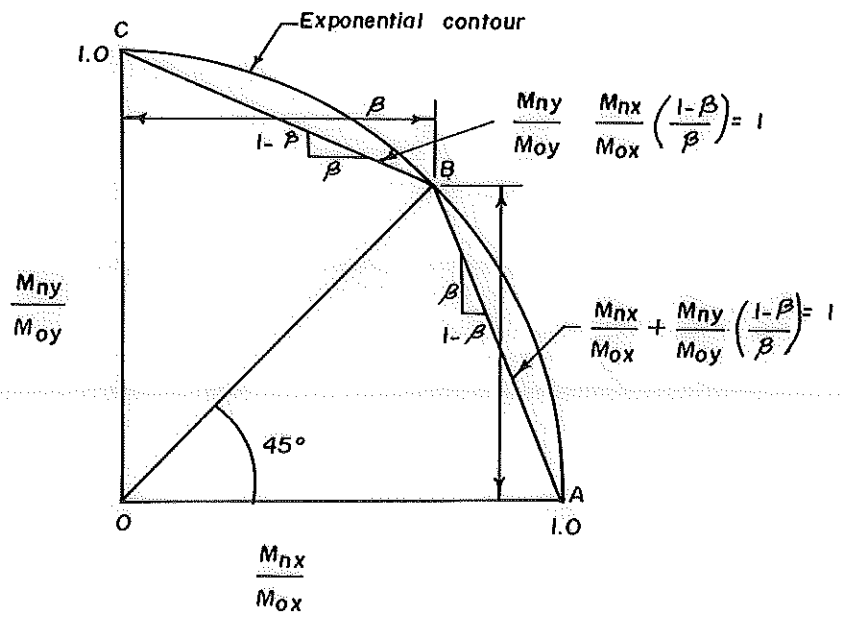


Figura 11

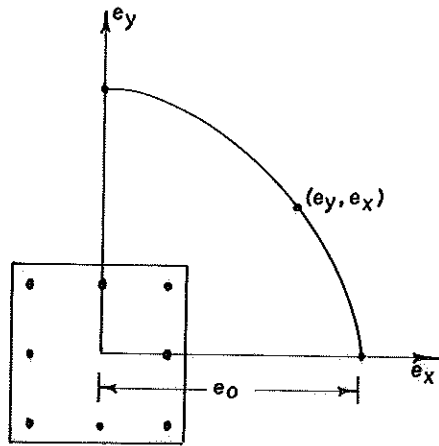


Figura 12

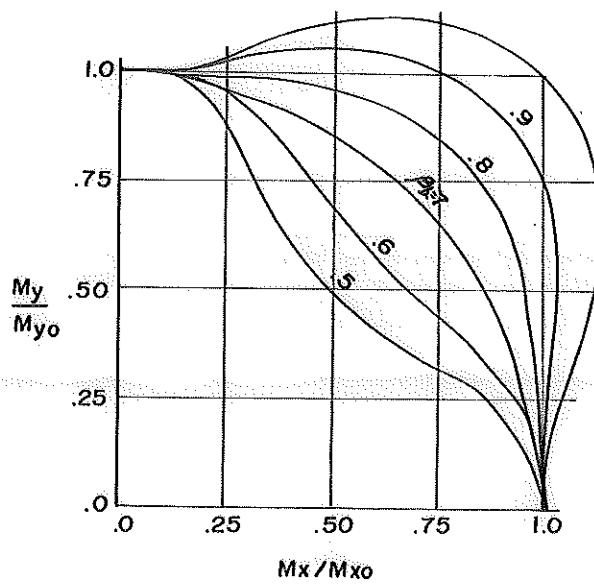


Figura 13

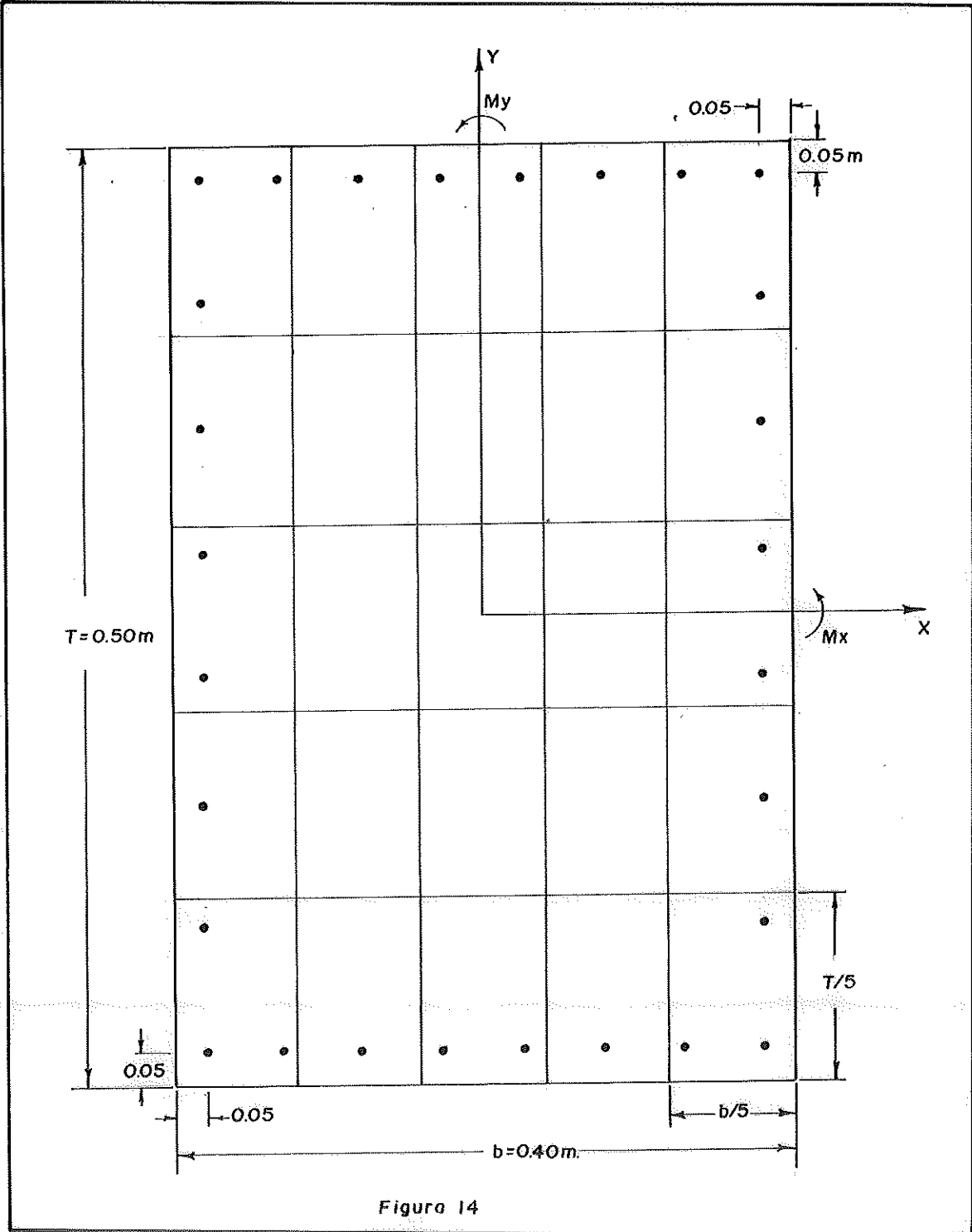
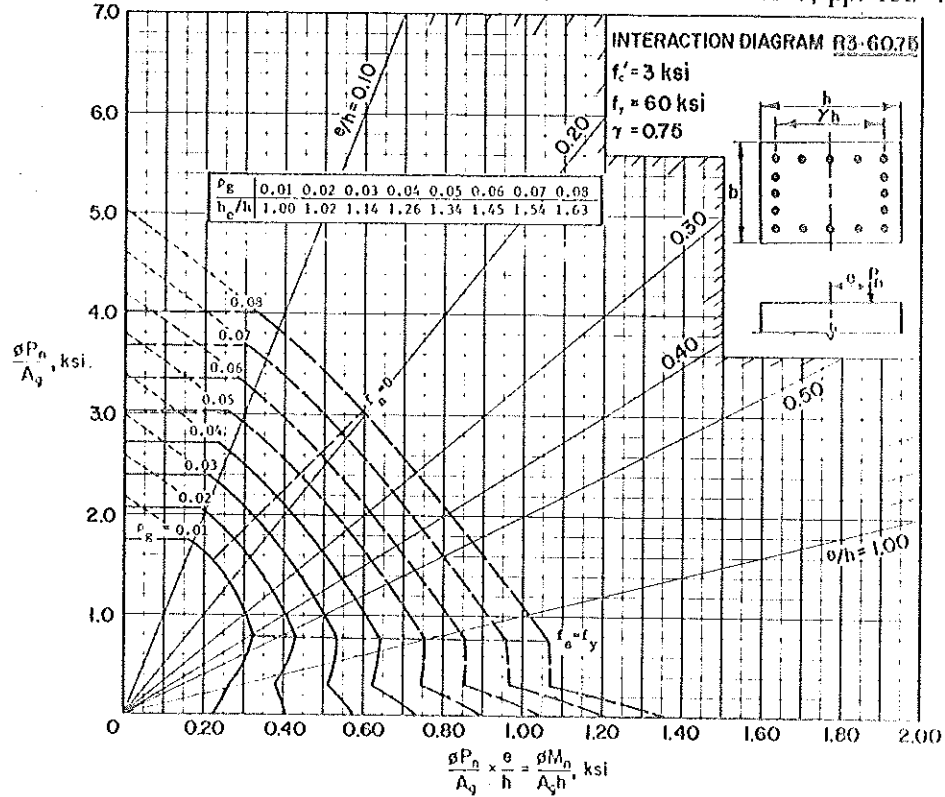


Figura 14

COLUMNS 7.3.3—Load-moment strength interaction diagram for R3-60.75 columns

References: ACI 318-83, Sections 9.3.2.2, 10.2, and 10.3; ACI Publication SP-7, pp. 152-182

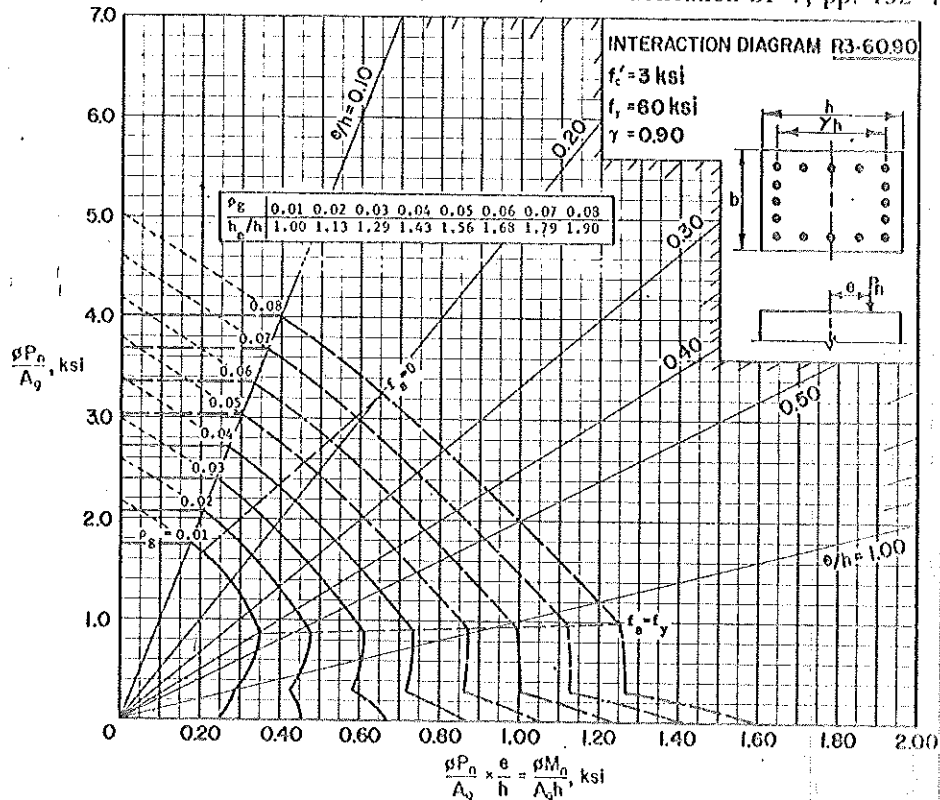
7.3.3



COLUMNS 7.3.4—Load-moment strength interaction diagram for R3-60.90 columns

References: ACI 318-83, Sections 9.3.2.2, 10.2, and 10.3; ACI Publication SP-7, pp. 152-182

7.3.4



For use of these Design Aids, see Columns Examples 1-8 and 11-16.

COLUMNS 8.3—Basic limits of factored axial load and factored moment for R3-60 columns (Design load and moment strengths)

References: ACI 318-83, Sections 9.3.2.2, 10.2, and 10.3; ACI Publication SP-7, pp. 152-182

Coordinates tabulated below provide more precise values for critical points on corresponding interaction diagrams (COLUMNS 7).

units: $\frac{\phi P_n}{A_g}$, ksf $\frac{\phi M_n}{A_g h}$, ksf

BASIC LIMITS TABLE R3-60

Rectangular column with bars on four faces

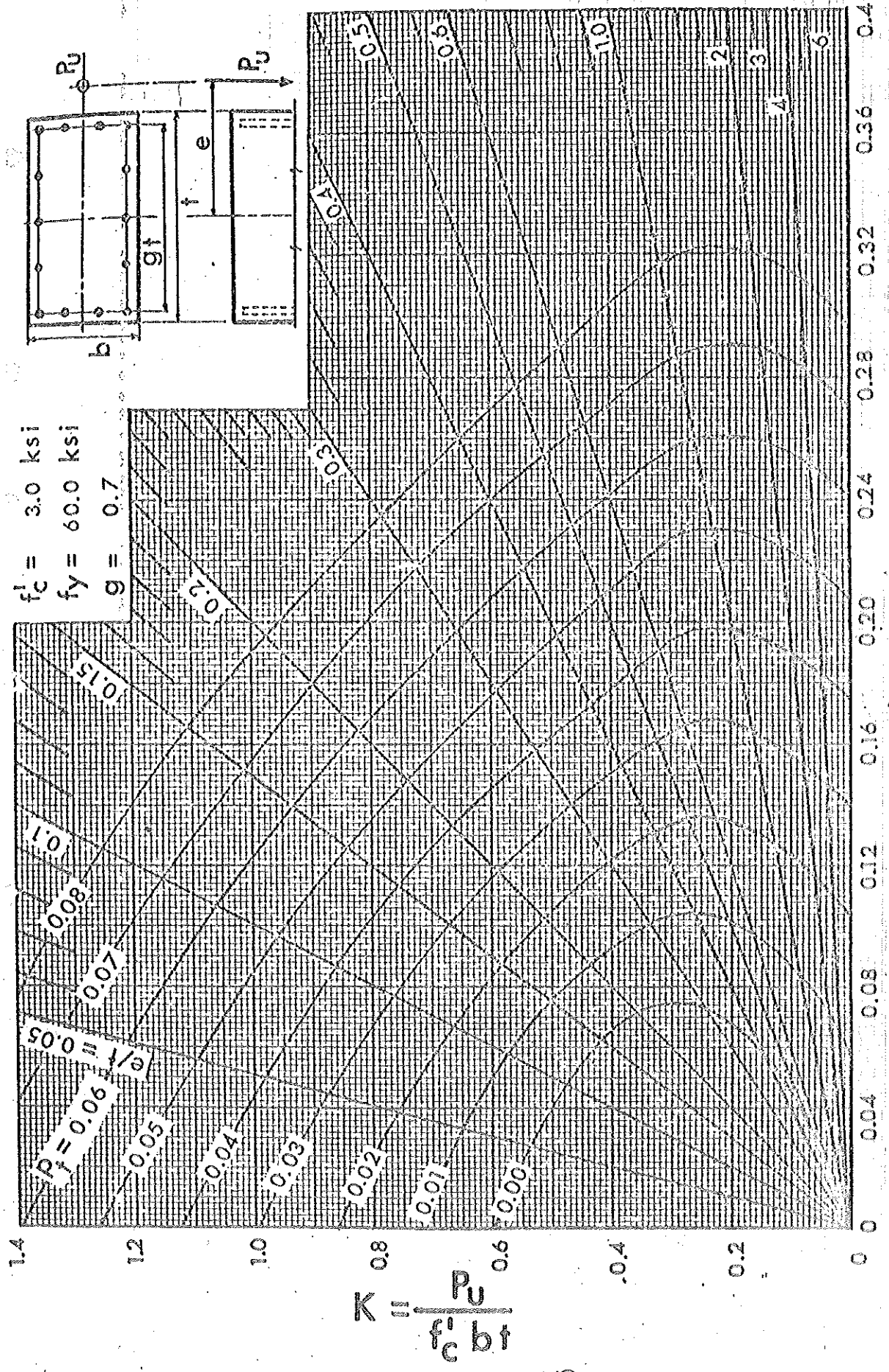
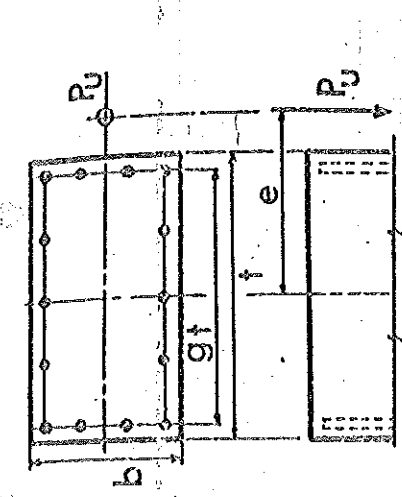
$f'_c = 3$ ksi
 $f_y = 60$ ksi

ρ_g	②		③		④		⑤			⑥		⑦
	maximum $\frac{\phi P_n}{A_g}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$	$\frac{\phi P_n}{A_g}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$	$\frac{\phi P_n}{A_g}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$	$\frac{\phi P_n}{A_g}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$	$\frac{e}{h}$	$\frac{\phi P_n}{A_g}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$
R3-60.45 $\gamma = 0.45$												
.01	1,750	.148	1,277	.239	.852	.259	.543	.255	.469	.300	.226	1,995
.02	2,071	.156	1,453	.267	.886	.297	.434	.303	.697	.300	.295	3,168
.03	2,393	.165	1,630	.295	.920	.335	.326	.350	1.076	.300	.345	4,096
.04	2,715	.175	1,807	.323	.954	.373	.217	.398	1.834	.217	.398	4,885
.05	3,037	.185	1,984	.351	.989	.411	.109	.446	4.105	.109	.446	4,940
.06	3,358	.196	2,160	.379	1.023	.448	.000	.494	∞	.000	.494	4,940
.07	3,680	.207	2,337	.407	1.057	.486	-.108	.542	-5.000	-.108	.542	5,368
.08	4,002	.218	2,514	.435	1.091	.524	-.217	.590	-2.722	-.217	.590	5,791
R3-60.60 $\gamma = 0.60$												
.01	1,750	.150	1,418	.236	.990	.204	.676	.292	.432	.300	.229	2,065
.02	2,071	.174	1,623	.278	1.077	.346	.635	.370	.583	.300	.331	3,561
.03	2,393	.191	1,828	.320	1.164	.407	.593	.447	.755	.300	.427	4,855
.04	2,715	.209	2,032	.362	1.251	.468	.551	.525	.953	.300	.510	6,067
.05	3,037	.226	2,237	.404	1.338	.530	.509	.603	1.180	.300	.596	7,228
.06	3,358	.244	2,442	.446	1.425	.591	.467	.680	1.457	.300	.667	8,319
.07	3,680	.262	2,646	.488	1.512	.652	.425	.758	1.783	.300	.757	9,370
.08	4,002	.280	2,851	.530	1.599	.714	.383	.835	2.101	.300	.831	1,0415
R3-60.75 $\gamma = 0.75$												
.01	1,750	.167	1,544	.223	1.096	.300	.784	.326	.416	.300	.268	2,201
.02	2,071	.190	1,761	.277	1.204	.380	.761	.432	.553	.300	.378	4,034
.03	2,393	.214	1,978	.330	1.313	.459	.779	.539	.691	.300	.511	5,774
.04	2,715	.238	2,195	.383	1.421	.539	.777	.645	.830	.300	.629	7,391
.05	3,037	.262	2,412	.436	1.529	.618	.775	.751	.969	.300	.747	8,943
.06	3,358	.286	2,629	.490	1.638	.698	.773	.858	1.110	.300	.852	1,0485
.07	3,680	.310	2,846	.543	1.746	.777	.771	.964	1.251	.300	.966	1,2020
.08	4,002	.335	3,062	.596	1.855	.857	.768	1.070	1.393	.300	1.074	1,3558
R3-60.90 $\gamma = 0.90$												
.01	1,750	.177	1,667	.203	1,194	.311	.868	.352	.425	.300	.286	2,427
.02	2,071	.209	1,893	.267	1,316	.407	.884	.488	.544	.300	.428	4,637
.03	2,393	.241	2,118	.332	1,439	.504	.899	.609	.678	.300	.580	6,685
.04	2,715	.272	2,344	.396	1,561	.600	.914	.738	.807	.300	.718	8,601
.05	3,037	.303	2,569	.460	1,683	.697	.929	.867	.933	.300	.859	1,0547
.06	3,358	.334	2,795	.525	1,806	.793	.945	.996	1.054	.300	1.001	1,2368
.07	3,680	.365	3,020	.589	1,928	.890	.960	1.124	1.172	.300	1.128	1,4160
.08	4,002	.396	3,246	.653	2,050	.986	.975	1.253	1.285	.300	1.269	1,5950

For use of this Design Aid, see Columns Examples 11 and 13.

Chart No. 10

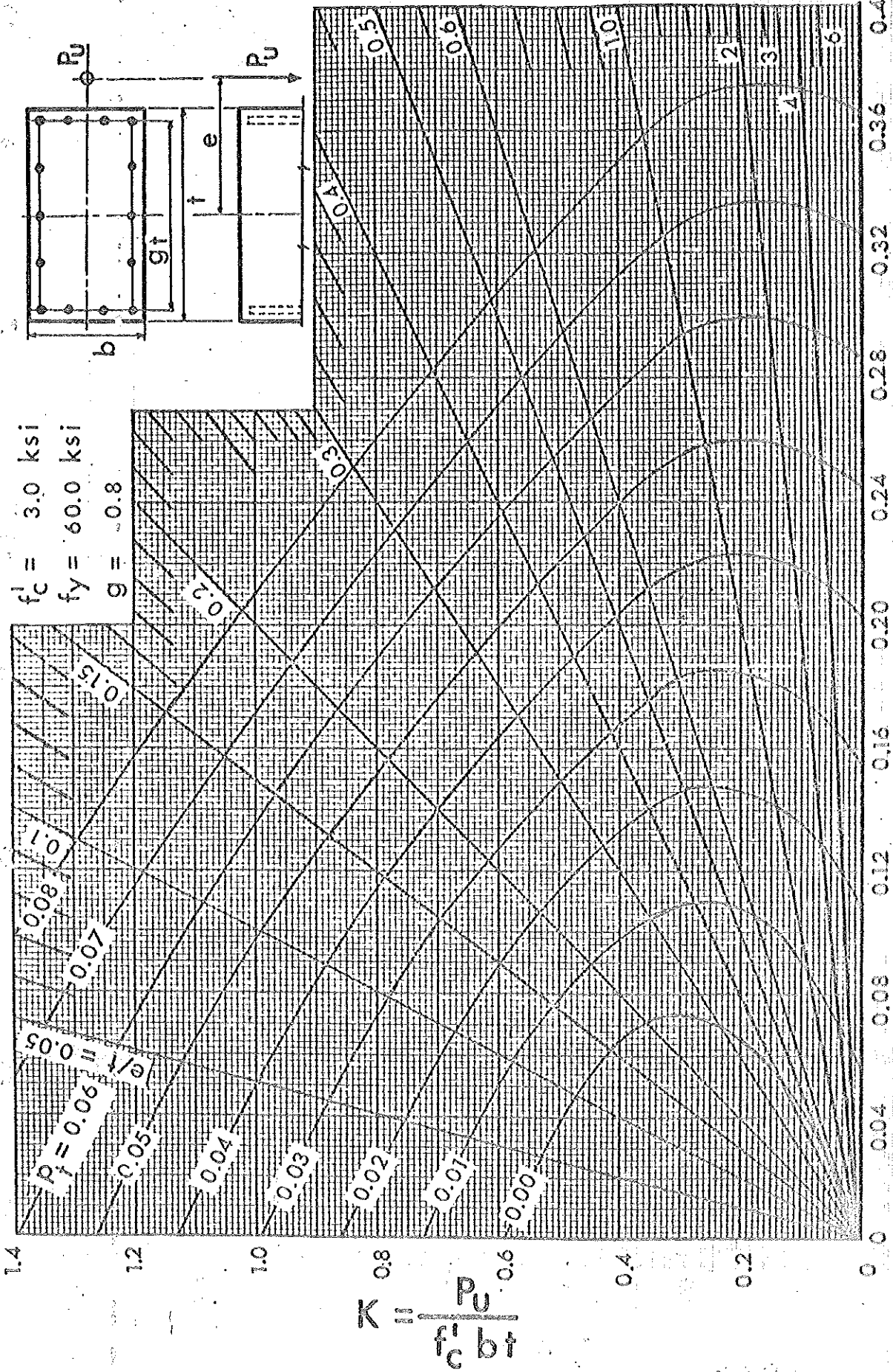
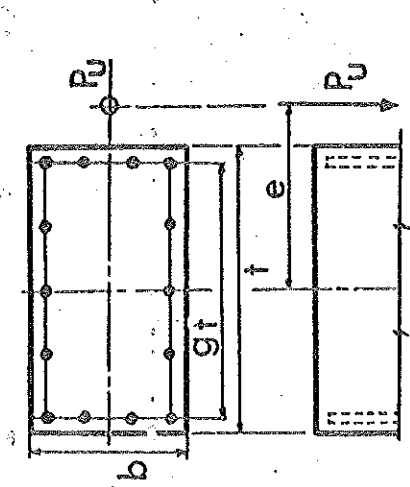
$f'_c = 3.0 \text{ ksi}$
 $f_y = 60.0 \text{ ksi}$
 $g = 0.7$



$$K_u = \frac{P_u e}{f'_c b t^2}$$

Chart No. 11

$f'_c = 3.0 \text{ ksi}$
 $f_y = 60.0 \text{ ksi}$
 $g = 0.8$



$$K \frac{e}{t} = \frac{P_u e}{f'_c b t^2}$$

12 bar arrangement

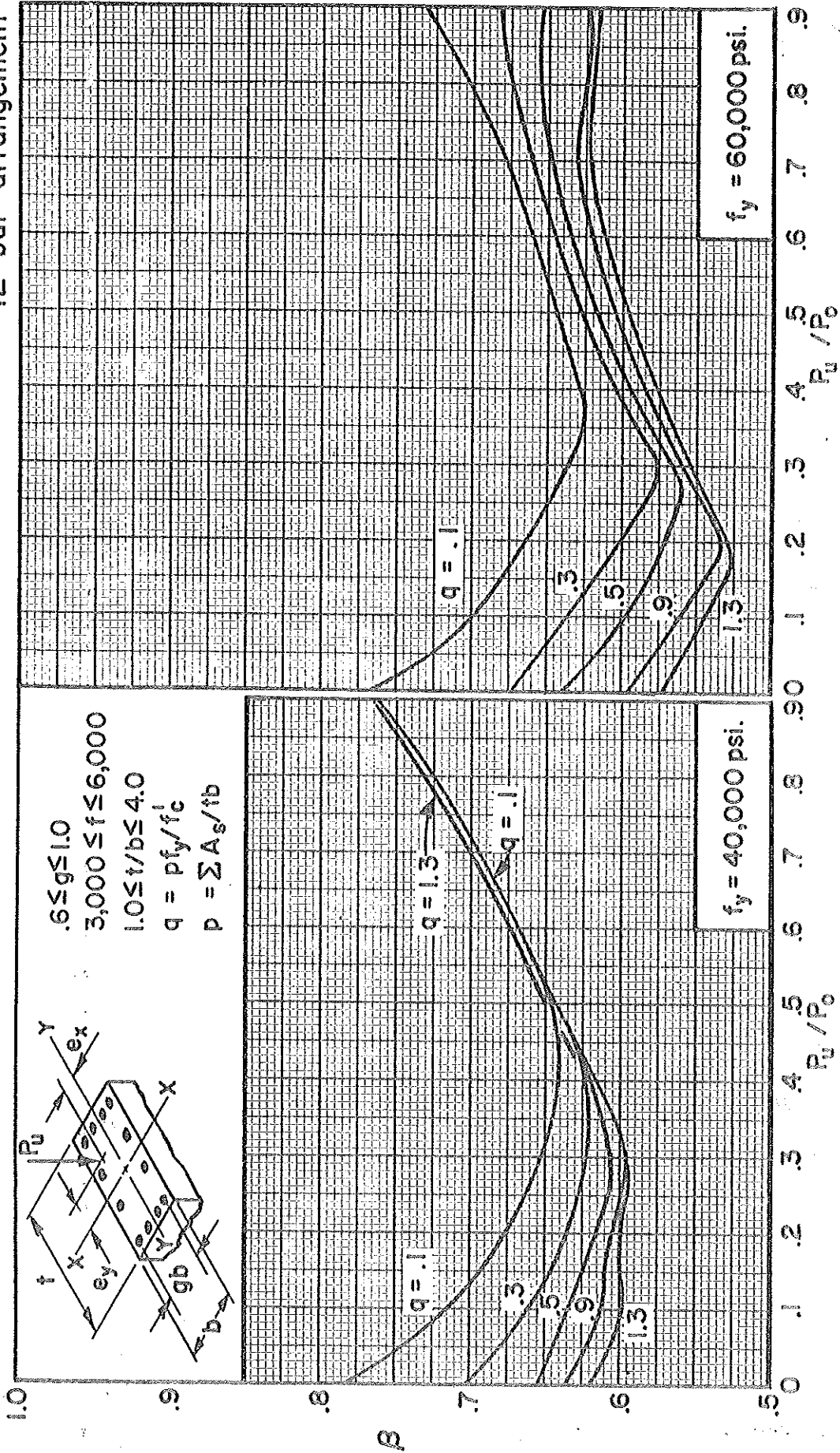


Fig. 7 — Biaxial Bending Design Constants