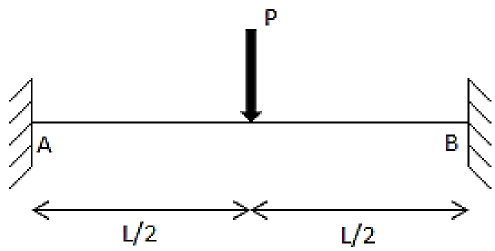
DEDUCCIÓN DE LAS FUERZAS DE FIJACIÓN Y LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO PARA VIGAS CON CARGAS COMUNES

Ortiz David[1], Molina Marcos[2], Martínez Hugo[1], J. Bernal Elan[2], Hernández Daniel[1], García Pascual[2], Berruecos Sergio[1]

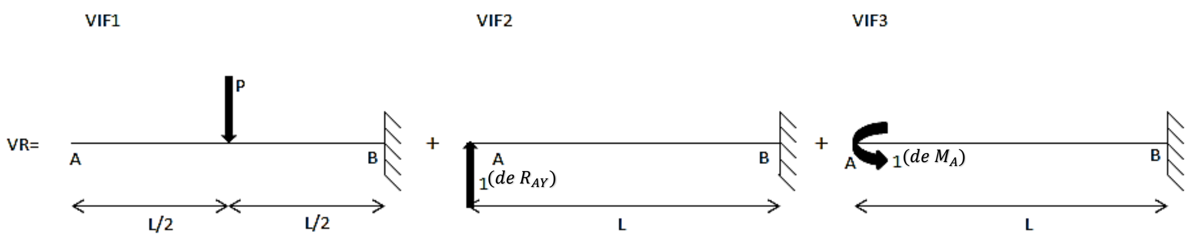
1. Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal, México.

2. Facultad de Estudios Superiores Aragón, Universidad Nacional Autónoma de México, Nezahualcóyotl, Estado de México.

VIGA 1.

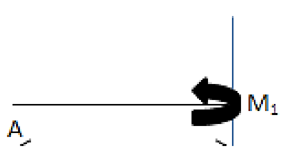


Principio de Superposición.



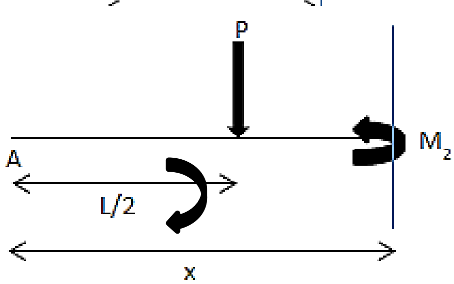
Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

Se obtienen los momentos internos M con base en VIF 1.



$$0 \le x \le {}^{L}/_{2}$$

$$+\sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_1 = 0$$



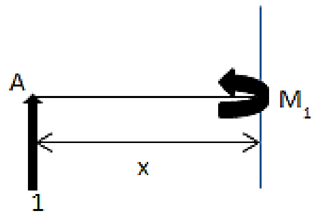
$${}^{L}/_{2} \le x \le L$$

$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_2 - P\left(x - \frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_2 = -Px + \frac{PL}{2}$$

De VIF 2, el momento interno m_1 es

$$0 \leq x \leq L$$

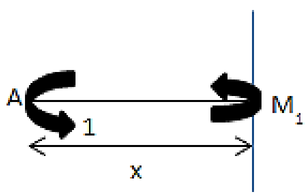


$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 + (1)(x) = 0 \Rightarrow M_1 = x$$

A partir de VIF 3, se formula el momento interno m_2.

$$0 \leq x \leq L$$



$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 - 1 = 0 \Rightarrow M_1 = -1$$

Se calculan los desplazamientos y pendientes requeridos.

$$d_1 = \delta_{VA_{VIF1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2} (0)(x)dx + \int_{L/2}^{L} \left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(x)dx\right] = -\frac{5PL^3}{48EI}$$

$$d_2 = \theta_{A_{VIF1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2} (0)(-1)dx + \int_{L/2}^{L} \left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(-1)dx\right] = \frac{PL^2}{8EI}$$

$$f_{11} = \delta_{VA_{VIF2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_1}{EI} dx = \frac{1}{EI}\int_0^L (x)(x)dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \theta_{A_{VIF2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI}\int_0^L (x)(-1)dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = \delta_{VA_{VIF3}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_1}{EI} dx = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \theta_{AVIF3} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1) dx = \frac{L}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

Las ecuaciones de compatibilidad para la deflexión en A y la pendiente en A son, respectivamente

$$d_1 + f_{11} R_{AY} + f_{12} M_A = 0 - - - (1)$$

$$d_2 + f_{21} R_{AY} + f_{22} M_A = 0 - - - (2)$$

Al sustituir los resultados en el sistema simultáneo de ecuaciones se tiene

$$-\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 - - - (3)$$

$$\frac{PL^2}{8EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 - - - (4)$$

Resolviendo el sistema resulta

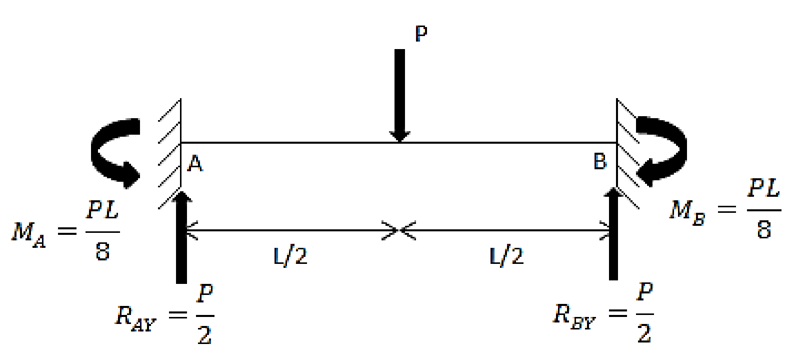
$$R_{AY} = \frac{P}{2} \qquad\qquad M_A = \frac{PL}{8}$$

Ecuaciones de equilibrio.

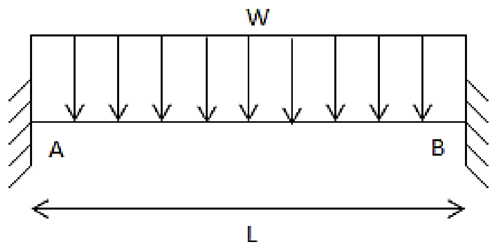
Las reacciones desconocidas restantes se obtienen de

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{P}{2}$$

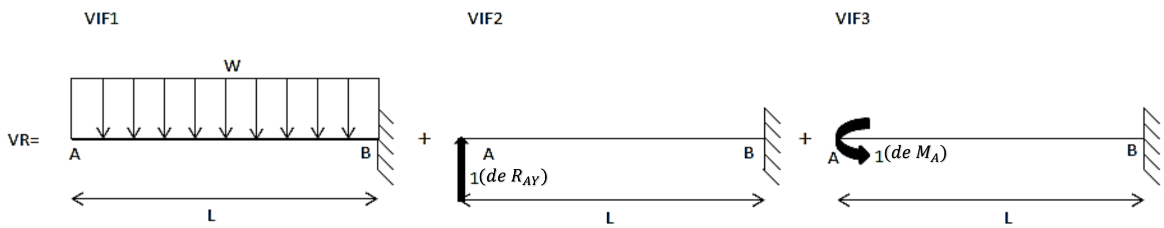
$$+\sum MA = 0 \Rightarrow -\frac{PL}{8} + P\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{PL}{8}$$



VIGA 2.



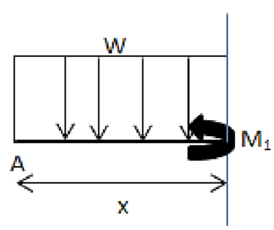
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

Con base en VIF 1 se deducen los momentos internos M.

$$0 \leq x \leq L$$



$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 - W(x)\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{Wx^2}{2}$$

Se retoman los momentos internos m_1 y m_2 de la primera deducción.

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \qquad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \qquad 0 \leq x \leq L$$

Se obtienen los desplazamientos y pendientes necesarios.

$$d_1 = \delta_{VA_{VIF1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{Wx^2}{2}\right)(x)dx = -\frac{WL^4}{8EI}$$

$$d_2 = \theta_{AVIF1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{Wx^2}{2}\right)(-1) dx = \frac{WL^3}{6EI}$$

Remítase a la viga 1 y observe que

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \qquad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

Con los resultados se plantea

$$-\frac{WL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 - - - (1)$$

$$\frac{WL^3}{6EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 - - - (2)$$

Al resolver el sistema se obtiene

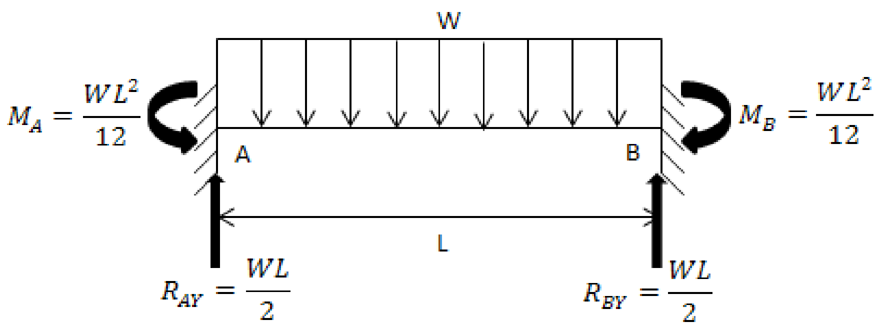
$$R_{AY} = \frac{WL}{2} \qquad\qquad M_A = \frac{WL^2}{12}$$

Ecuaciones de equilibrio.

Por lo tanto,

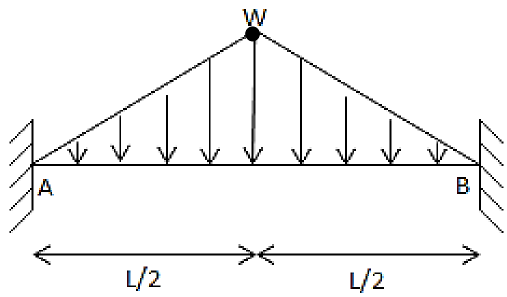
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{WL}{2} - WL + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{WL}{2}$$

$$+\sum MA = 0 \Rightarrow -\frac{WL^2}{12} + WL\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{WL}{2}(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{12}$$

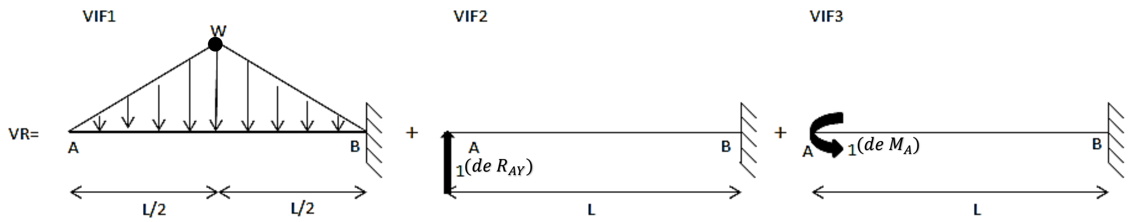


.

VIGA 3.



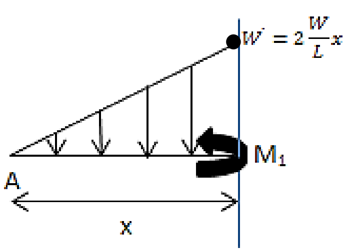
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

De VIF 1, las funciones de momento M son

$$0 \le x \le {}^{L}/_{2}$$



$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 - \left[\frac{\left(\frac{2W}{L}x\right)(x)}{2}\right]\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{Wx^3}{3L}$$

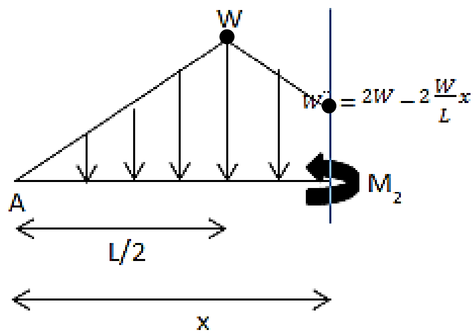
La intensidad W' se obtiene de

$$\frac{W}{\frac{L}{2}} = \frac{W'}{x} \Rightarrow W' = \frac{2W}{L}x$$

$${}^{L}/_{2} \le x \le L$$

Se deduce la intensidad W''.

$$\frac{W}{\frac{L}{2}} = \frac{W''}{L-x} \Rightarrow W'' = \frac{W(L-x)}{\frac{L}{2}} = 2W - \frac{2W}{L}x$$



La carga concentrada equivalente de la carga seccionada es

$$A_T = -\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x} = \frac{-\frac{2W}{3L}x^3 + Wx^2 - \frac{WL^2}{12}}{-\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}} \; a\ la\ derecha\ de\ A$$

$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_2 - \left(-\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}\right)\left(x - \frac{-\frac{2W}{3L}x^3 + Wx^2 - \frac{WL^2}{12}}{-\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}}\right) = 0$$

$$M_2 = \frac{W}{3L}x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2}x - \frac{WL^2}{12}$$

Se usan los siguientes momentos internos

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \qquad 0 \le x \le L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \qquad 0 \le x \le L$$

Se requiere de

$$d_1 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2}\left(-\frac{Wx^3}{3L}\right)(x)dx + \int_{L/2}^{L}\left(\frac{W}{3L}x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2}x - \frac{WL^2}{12}\right)(x)dx\right] = -\frac{11WL^4}{192EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2}\left(-\frac{Wx^3}{3L}\right)(-1)dx + \int_{L/2}^{L}\left(\frac{W}{3L}x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2}x - \frac{WL^2}{12}\right)(-1)dx\right] = \frac{7WL^3}{96EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \qquad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

En consecuencia,

$$-\frac{11WL^4}{192EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0 - - - (1)$$

$$\frac{7WL^3}{96EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0 - - - (2)$$

Por lo tanto,

$$R_{AY} = \frac{WL}{4} \uparrow \qquad M_A = \frac{5WL^2}{96}$$

Ecuaciones de equilibrio.

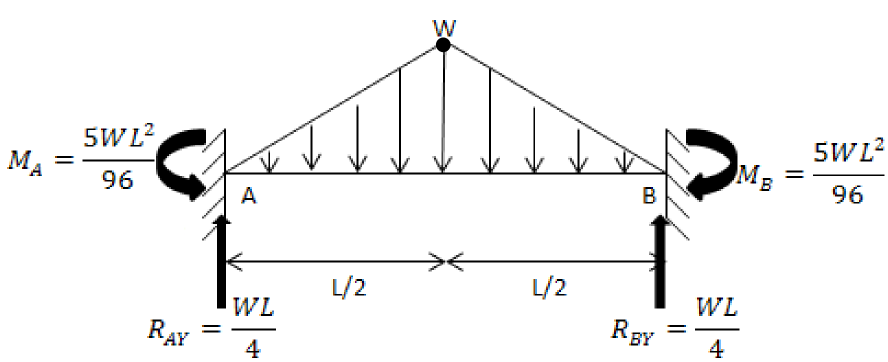
Finalmente, se tiene

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{WL}{4} - \frac{WL}{2} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{WL}{4} \uparrow$$

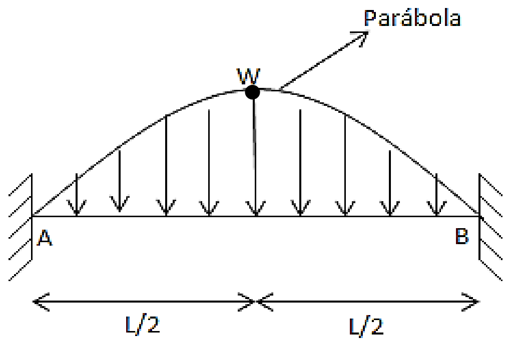
$$+\sum MA = 0$$

$$-\frac{5WL^2}{96} + \left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right) - \frac{WL}{4}(L) + M_B = 0$$

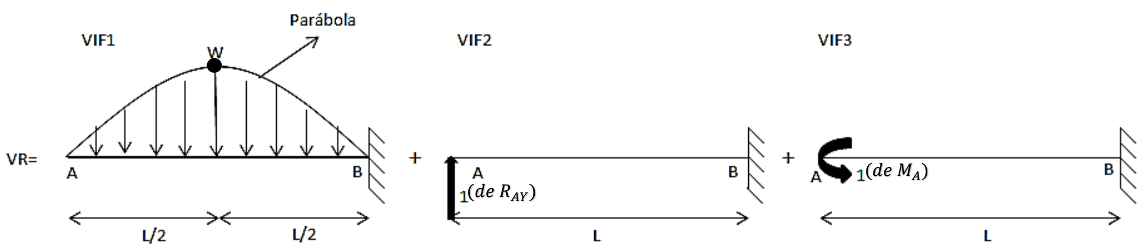
$$M_B = \frac{5WL^2}{96}$$



VIGA 4.



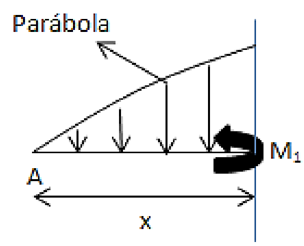
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

Se formula el momento interno M con base en VIF 1.

$$0 \leq x \leq L$$



La fuerza resultante de la carga distribuida seccionada es

$$A_c = \int_0^x \left(-4\frac{W}{L^2}x^2 + 4\frac{W}{L}x\right)dx = -\frac{4W}{3L^2}x^3 + \frac{2W}{L}x^2$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_c = \frac{\int_0^x x\left(-4\frac{W}{L^2}x^2 + 4\frac{W}{L}x\right)dx}{\int_0^x \left(-4\frac{W}{L^2}x^2 + 4\frac{W}{L}x\right)dx} = \frac{-\frac{W}{L^2}x^4 + \frac{4W}{3L}x^3}{-\frac{4W}{3L^2}x^3 + \frac{2W}{L}x^2}\ a\ la\ derecha\ de\ A$$

$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 - \left(-\frac{4W}{3L^2}x^3 + \frac{2W}{L}x^2\right)\left(x - \frac{-\frac{W}{L^2}x^4 + \frac{4W}{3L}x^3}{-\frac{4W}{3L^2}x^3 + \frac{2W}{L}x^2}\right) = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{W}{3L^2}x^4 - \frac{2W}{3L}x^3$$

Además,

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \qquad 0 \le x \le L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \qquad 0 \le x \le L$$

Se calculan los desplazamientos y pendientes necesarios.

$$d_1 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{W}{3L^2}x^4 - \frac{2W}{3L}x^3\right)(x)dx = -\frac{7WL^4}{90EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{W}{3L^2}x^4 - \frac{2W}{3L}x^3\right)(-1)dx = \frac{WL^3}{10EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \qquad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

El sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica es

$$-\frac{7WL^4}{90EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0 - - - (1)$$

$$\frac{WL^3}{10EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0 - - - (2)$$

Por consiguiente, las fuerzas correctivas son

$$R_{AY} = \frac{WL}{3} \uparrow \qquad\qquad M_A = \frac{WL^2}{15}$$

Ecuaciones de equilibrio.

La carga concentrada equivalente de la carga distribuida con intensidad parabólica es

$$A = \int_0^L \left(-4\frac{W}{L^2}x^2 + 4\frac{W}{L}x\right)dx = \frac{2}{3}WL$$

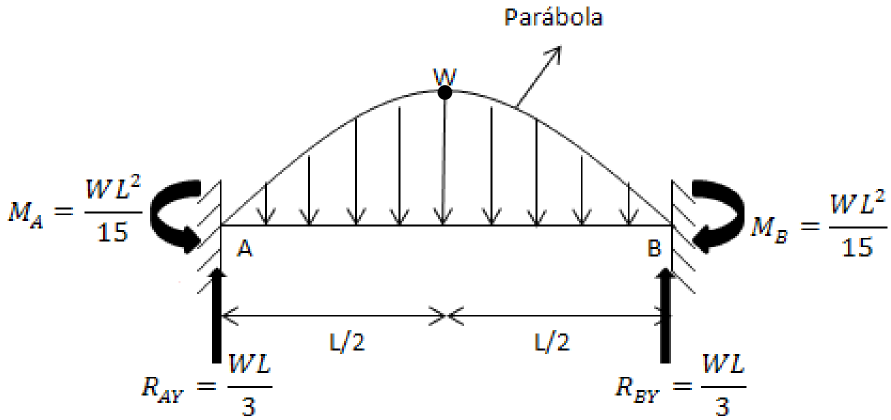
y su línea de acción se ubica en

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x\left(-4\frac{W}{L^2}x^2 + 4\frac{W}{L}x\right)dx}{\int_0^L \left(-4\frac{W}{L^2}x^2 + 4\frac{W}{L}x\right)dx} = \frac{\frac{WL^2}{3}}{\frac{2}{3}WL} = \frac{1}{2}L$$

Así que,

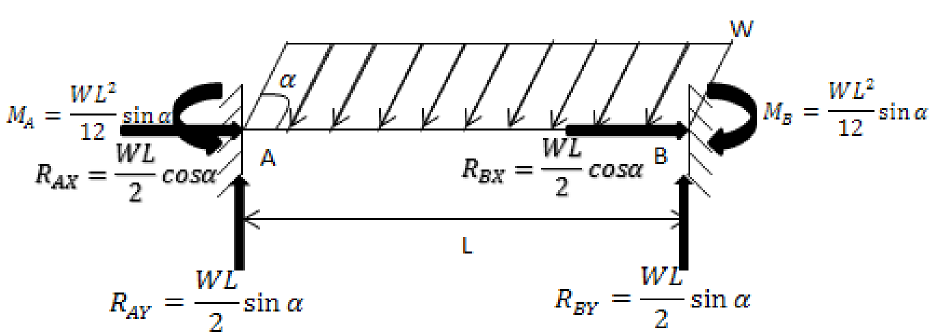
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{WL}{3} - \frac{2}{3}WL + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{WL}{3}\uparrow$$

$$+\sum MA = 0 \Rightarrow -\frac{WL^2}{15} + \frac{2}{3}WL\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{WL}{3}(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{15}$$

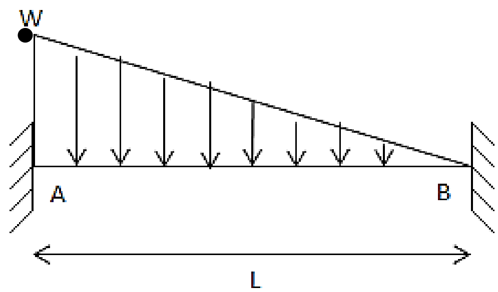


VIGA 5.

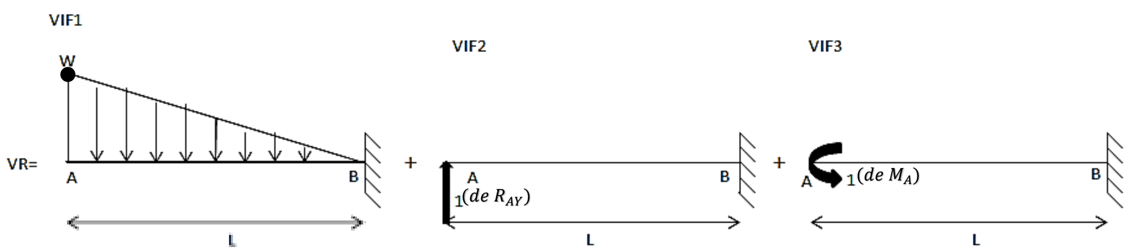
De forma similar a la viga 2, se tiene



VIGA 6.



Principio de Superposición.

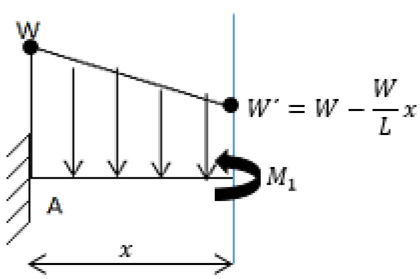


Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

De VIF 1, el momento interno M es

$$0 \leq x \leq L$$

La intensidad W' es



$$\frac{W}{L} = \frac{W'}{L-x}$$

$$W' = \frac{W(L-x)}{L} = W - \frac{W}{L}x$$

$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 - \left(\frac{(x)\left(W - \left(W - \frac{W}{L}x\right)\right)}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x\right) - \left(W - \frac{W}{L}x\right)(x)\left(\frac{1}{2}x\right) = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2}$$

Por otra parte,

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \qquad 0 \leq x \leq L \qquad\qquad m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \qquad 0 \leq x \leq L$$

Se calculan los desplazamientos y pendientes requeridos.

$$d_1 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2}\right)(x)dx = -\frac{11WL^4}{120EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2}\right)(-1)dx = \frac{WL^3}{8EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \qquad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

$$-\frac{11WL^4}{120EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0 - - - (1)$$

$$\frac{WL^3}{8EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0 - - - (2)$$

Se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones. En consecuencia,

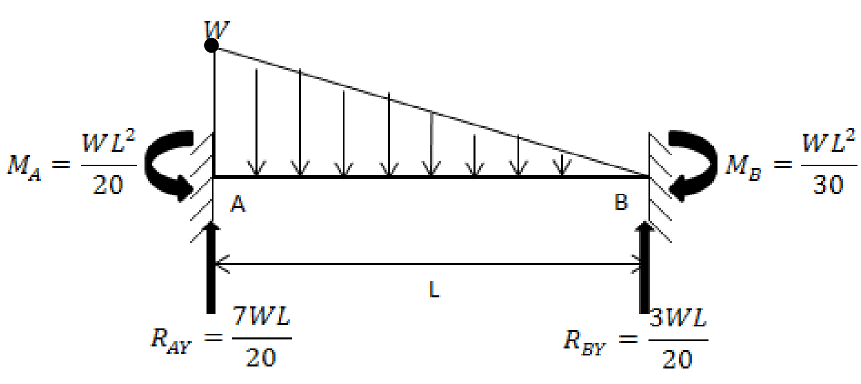
$$R_{AY} = \frac{7WL}{20} \uparrow \qquad\qquad M_A = \frac{WL^2}{20}$$

Ecuaciones de equilibrio.

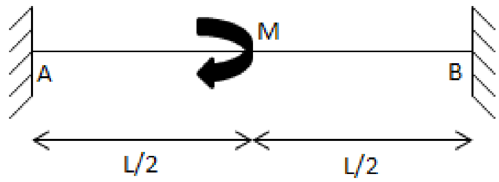
Las reacciones faltantes son

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{7WL}{20} - \frac{WL}{2} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{3WL}{20} \uparrow$$

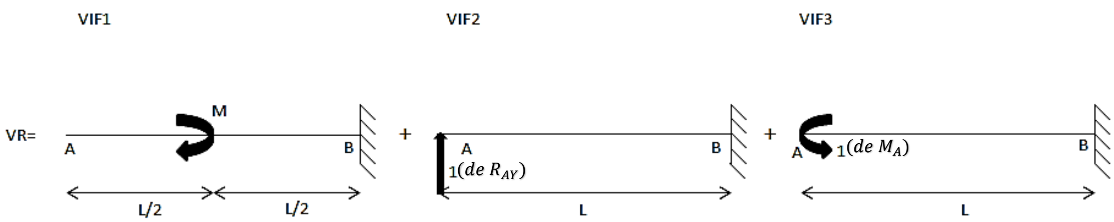
$$+\sum MA = 0 \Rightarrow -\frac{WL^2}{20} + \frac{WL}{2}\left(\frac{L}{3}\right) - \frac{3WL}{20}(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{30}$$



VIGA 7.



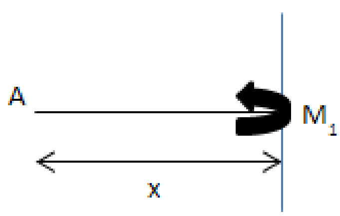
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

Se deducen los momentos internos M con base en VIF 1.

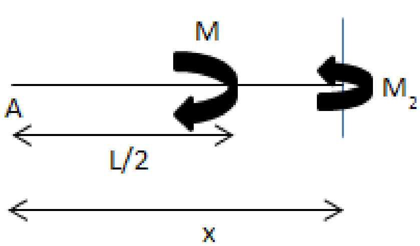
$$0 \leq x \leq {}^{L}/_{2}$$



$$+\sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$^{L}/_{2} \leq x \leq L$$



$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_2 - M = 0 \Rightarrow M_2 = M$$

Se retoman los siguientes momentos internos

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \qquad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \qquad 0 \le x \le L$$

Se requiere de

$$d_1 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2}(0)(x)dx + \int_{L/2}^{L}(M)(x)dx\right] = \frac{3ML^2}{8EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2}(0)(-1)dx + \int_{L/2}^{L}(M)(-1)dx\right] = -\frac{ML}{2EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \qquad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

Las ecuaciones de compatibilidad necesarias son

$$\frac{3ML^2}{8EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0 - - - (1)$$

$$-\frac{ML}{2EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0 - - - (2)$$

La solución del sistema es

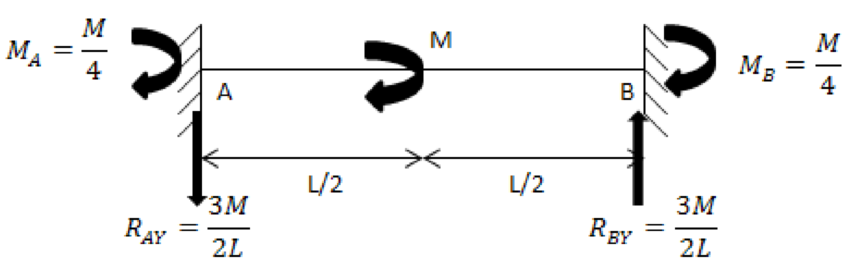
$$R_{AY} = -\frac{3M}{2L} \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{3M}{2L}\downarrow \qquad\qquad M_A = -\frac{M}{4} \therefore M_A = \frac{M}{4}$$

Ecuaciones de equilibrio.

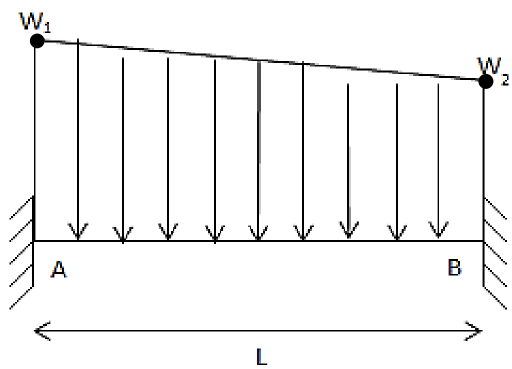
Las reacciones restantes desconocidas son

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -\frac{3M}{2L} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{3M}{2L}\uparrow$$

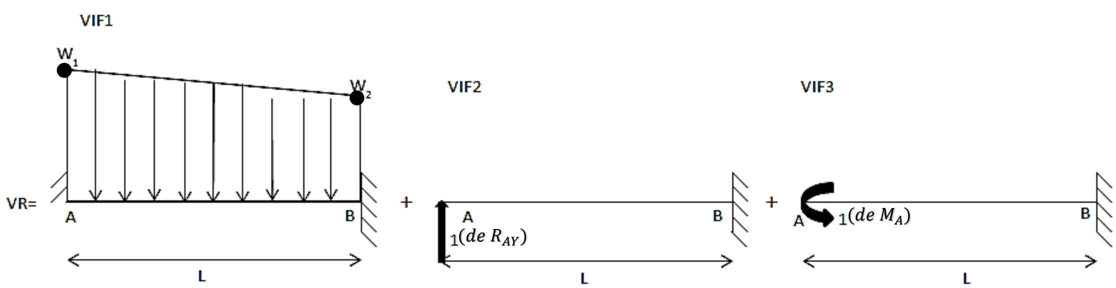
$$+\sum MA = 0 \Rightarrow \frac{M}{4} + M - \left(\frac{3M}{2L}\right)(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{M}{4}$$



VIGA 8.



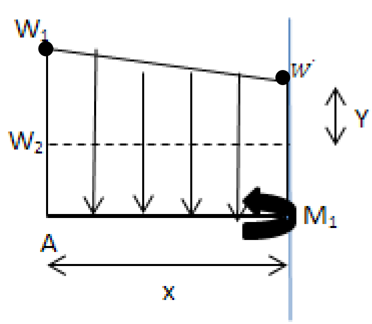
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

A partir de VIF 1, se calculan los momentos internos M.

$$0 \leq x \leq L$$



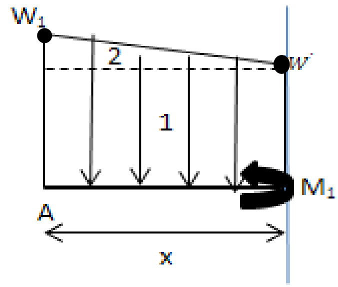
La intensidad $W´$ es

$$\frac{W_1 - W_2}{L} = \frac{Y}{L - x}$$

$$Y = \frac{(W_1 - W_2)(L - x)}{L} = W_1 - W_2 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x$$

$$W´ = W_2 + Y = W_2 + W_1 - W_2 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x = W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x$$

Como se muestra en la siguiente figura, la carga trapezoidal distribuida seccionada se divide en una carga triangular y una carga uniforme.



$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 - (x)\left(W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x\right)\left(\frac{1}{2}x\right) - \left[\frac{(x)\left(W_1 - \left(W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x\right)\right)}{2}\right]\left(\frac{2}{3}x\right) = 0$$

$$M_1 = \frac{W_1x^3}{2L} - \frac{W_2x^3}{2L} - \frac{W_1x^2}{2} + \frac{W_2x^3}{3L} - \frac{W_1x^3}{3L} = \frac{W_1x^3}{6L} - \frac{W_2x^3}{6L} - \frac{W_1x^2}{2}$$

Los momentos internos restantes son

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \qquad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \qquad 0 \leq x \leq L$$

Se necesita de los siguientes desplazamientos y pendientes

$$d_1 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{W_1x^3}{6L} - \frac{W_2x^3}{6L} - \frac{W_1x^2}{2}\right)(x)dx = -\frac{11W_1L^4}{120EI} - \frac{W_2L^4}{30EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{W_1x^3}{6L} - \frac{W_2x^3}{6L} - \frac{W_1x^2}{2}\right)(-1)dx = \frac{W_1L^3}{8EI} + \frac{W_2L^3}{24EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \qquad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

Al construir el sistema de ecuaciones de compatibilidad y reemplazar los resultados se tiene

$$-\left(\frac{11W_1L^4}{120EI} + \frac{W_2L^4}{30EI}\right) + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0 - - - (1)$$

$$\left(\frac{W_1L^3}{8EI}+\frac{W_2L^3}{24EI}\right)-\frac{L^2}{2EI}R_{AY}+\frac{L}{EI}M_A=0---(2)$$

Al resolver el sistema se obtiene

$$R_{AY}=\left(\frac{7W_1L}{20}+\frac{3W_2L}{20}\right)\uparrow \qquad\qquad M_A=\left(\frac{W_1L^2}{20}+\frac{W_2L^2}{30}\right)$$

Ecuaciones de equilibrio.

Finalmente,

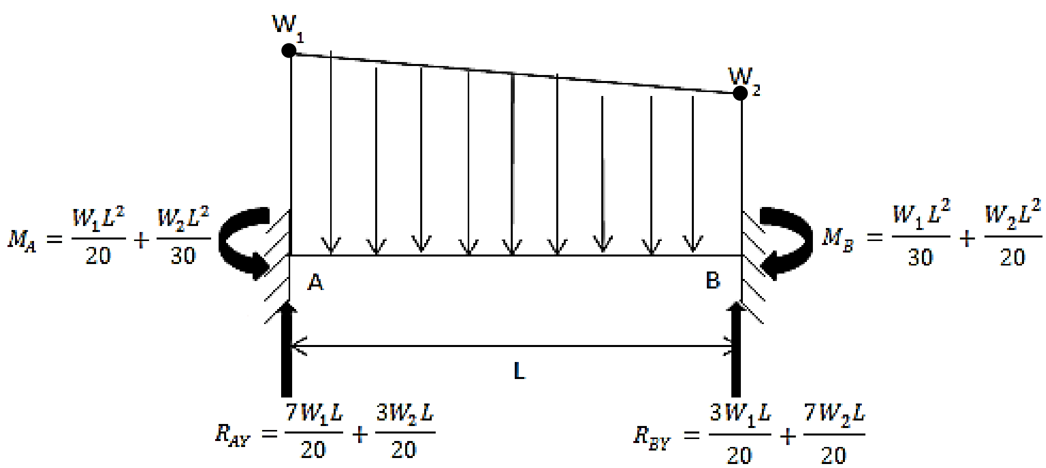
$$+\uparrow\sum FY=0\Rightarrow\frac{7W_1L}{20}+\frac{3W_2L}{20}-W_2L-\left[\frac{(L)(W_1-W_2)}{2}\right]+R_{BY}=0$$

$$R_{BY}=\left(\frac{3W_1L}{20}+\frac{7W_2L}{20}\right)\uparrow$$

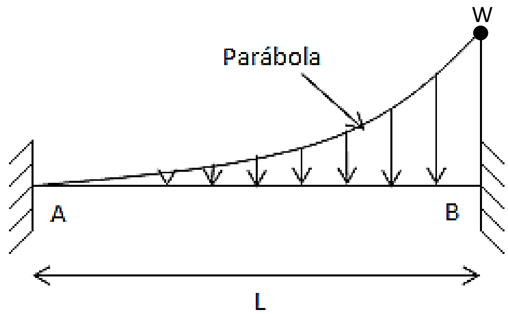
$$+\sum MA=0$$

$$-\left(\frac{W_1L^2}{20}+\frac{W_2L^2}{30}\right)+W_2(L)\left(\frac{L}{2}\right)+\left(\frac{(L)(W_{1}-W_2)}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right)-\left(\frac{3W_1L}{20}+\frac{7W_2L}{20}\right)(L)+M_B=0$$

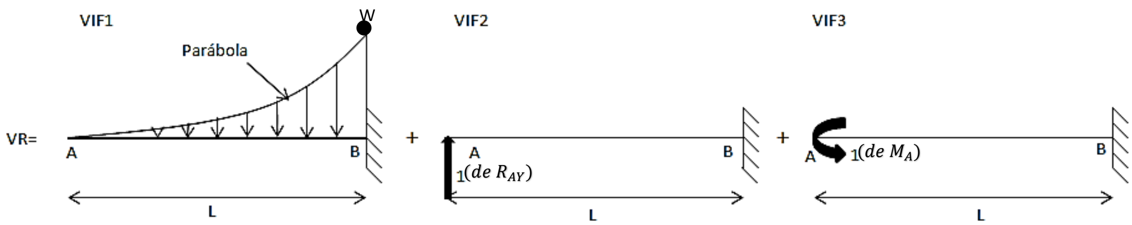
$$M_B=\left(\frac{W_1L^2}{30}+\frac{W_2L^2}{20}\right)$$



VIGA 9.



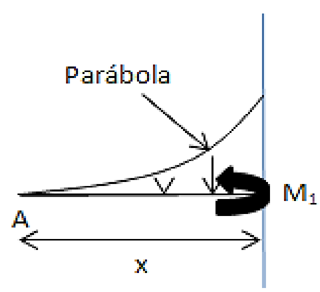
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

De VIF 1, se formulan los momentos internos M.

$$0 \leq x \leq L$$



La fuerza resultante de la carga distribuida seccionada es

$$A_c = \int_0^x \left(\frac{W}{L^2}x^2\right)dx = \frac{1}{3}\frac{W}{L^2}x^3$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_c = \frac{\int_0^x x\left(\frac{W}{L^2}x^2\right)dx}{\int_0^x \left(\frac{W}{L^2}x^2\right)dx} = \frac{\frac{1}{4}\frac{W}{L^2}x^4}{\frac{1}{3}\frac{W}{L^2}x^3} = \frac{3}{4}x\ a\ la\ derecha\ de\ A$$

$$+\sum Mcorte = 0 \Rightarrow -M_1 - \left(\frac{1}{3}\frac{W}{L^2}x^3\right)\left(x - \frac{3}{4}x\right) = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{Wx^4}{12L^2}$$

Los momentos internos de las otras estructuras isostáticas son

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \qquad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \qquad 0 \leq x \leq L$$

Se calculan los desplazamientos y pendientes necesarios.

$$d_1 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{Wx^4}{12L^2}\right)(x)dx = -\frac{WL^4}{72EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{Wx^4}{12L^2}\right)(-1)dx = \frac{WL^3}{60EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \qquad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

Las ecuaciones de compatibilidad para la deflexión en A y la pendiente en A son, respectivamente

$$-\frac{WL^4}{72EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0 - - - (1)$$

$$\frac{WL^3}{60EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0 - - - (2)$$

Al resolver el sistema resulta

$$R_{AY} = \frac{WL}{15}\uparrow \qquad\qquad M_A = \frac{WL^2}{60}$$

Ecuaciones de equilibrio.

La fuerza resultante de la carga distribuida tipo enjuta parabólica es

$$A = \int_0^L \left(\frac{W}{L^2}x^2\right)dx = \frac{1}{3}LW$$

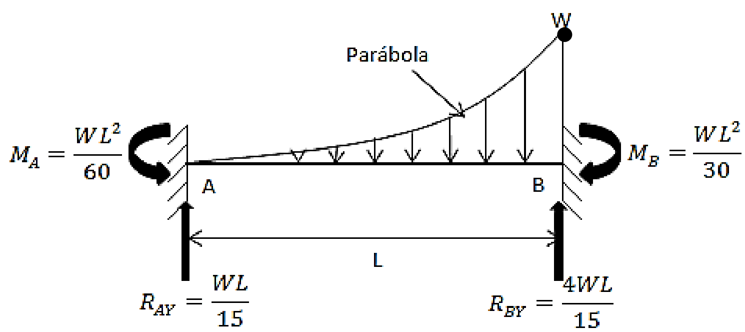
y su línea de acción se localiza a una distancia

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x\left(\frac{W}{L^2}x^2\right)dx}{\int_0^L \left(\frac{W}{L^2}x^2\right)dx} = \frac{3}{4}L \; a \; la \; derecha \; de \; A$$

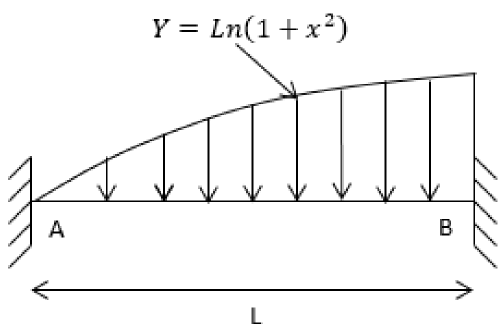
Las reacciones desconocidas restantes se obtienen de

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{WL}{15} - \frac{1}{3}WL + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{4WL}{15}$$

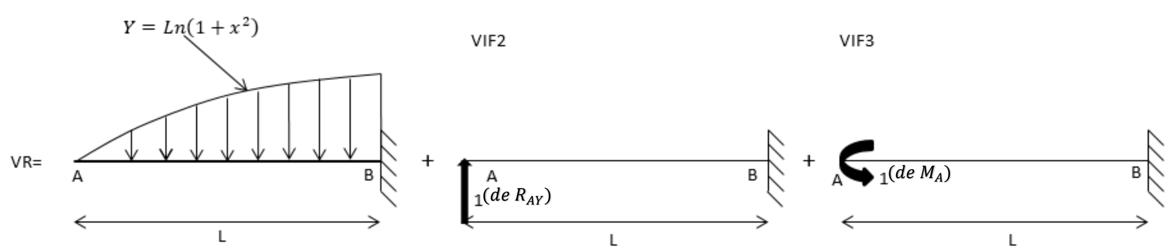
$$+\sum MA = 0 \Rightarrow -\frac{WL^2}{60} + \frac{1}{3}WL\left(\frac{3}{4}L\right) - \frac{4WL}{15}(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{30}$$



VIGA 10.



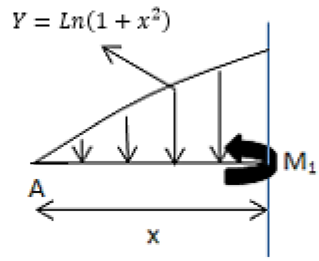
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

Con base en VIF 1 se deducen los momentos internos M.

$$0 \leq x \leq L$$



La fuerza resultante de la carga distribuida seccionada es

$$A_c = \int_0^x \left(Ln(1 + x^2)\right)dx = x * Ln(x^2 + 1) + 2(arctan(x) - x)$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_c = \frac{\int_0^x x\left(Ln(1 + x^2)\right)dx}{\int_0^x Ln(1 + x^2)dx} = \frac{\frac{(x^2 + 1) * Ln(x^2 + 1)}{2} - \frac{x^2}{2}}{x * Ln(x^2 + 1) + 2(arctan(x) - x)} \; a\ la\ derecha\ de\ A$$

$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 - [x * Ln(x^2 + 1) + 2(arctan(x) - x)]\left[x - \frac{\frac{(x^2 + 1) * Ln(x^2 + 1)}{2} - \frac{x^2}{2}}{x * Ln(x^2 + 1) + 2(arctan(x) - x)}\right] = 0$$

$$M_1 = -\frac{x^2 * Ln(x^2 + 1)}{2} + \frac{Ln(x^2 + 1)}{2} - 2x * arctan(x) + \frac{3}{2}x^2$$

Se usan los siguientes momentos internos

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \qquad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \qquad 0 \leq x \leq L$$

Se requiere de

$$d_1 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{x^2 * Ln(x^2 + 1)}{2} + \frac{Ln(x^2 + 1)}{2} - 2x * arctan(x) + \frac{3}{2}x^2\right)(x)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{L^4 * Ln(L^2 + 1)}{8} + \frac{L^2 * Ln(L^2 + 1)}{4} + \frac{Ln(L^2 + 1)}{24} - \frac{2L^3 * arctan(L)}{3} + \frac{7L^4}{16} - \frac{L^2}{24}\right]$$

$$d_2 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{x^2 * Ln(x^2+1)}{2} + \frac{Ln(x^2+1)}{2} - 2x * arctan(x) + \frac{3}{2}x^2\right)(-1)dx = \frac{1}{EI}$$

$$\left[\frac{L^3 * Ln(L^2+1)}{6} - \frac{L * Ln(L^2+1)}{2} + L^2 * arctan(L) - \frac{arctan(L)}{3} - \frac{11L^3}{18} + \frac{L}{3}\right]$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \qquad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \qquad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

En consecuencia,

$$\frac{1}{EI}\left[-\frac{L^4 * Ln(L^2+1)}{8} + \frac{L^2 * Ln(L^2+1)}{4} + \frac{Ln(L^2+1)}{24} - \frac{2L^3 * \arctan(L)}{3} + \frac{7L^4}{16} - \frac{L^2}{24}\right]$$

$$+\frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A - - - (1)$$

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{L^3 * Ln(L^2+1)}{6} - \frac{L * Ln(L^2+1)}{2} + L^2 * \arctan(L) - \frac{\arctan(L)}{3} - \frac{11L^3}{18} + \frac{L}{3}\right]$$

$$-\frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0 - - - (2)$$

Por lo tanto,

$$R_{AY} = \frac{6(L^4-1) * Ln(L^2+1) + L\big(24(L^2+1)arctan(L) - L(19L^2+18)\big)}{12L^3}$$

$$M_A = \frac{6(L^4+6L^2-3) * Ln(L^2+1) + L\big(96arctan(L) - 13L(L^2+6)\big)}{72L^2}$$

Ecuaciones de equilibrio.

La carga concentrada equivalente de la carga distribuida con intensidad logarítmica es

$$A = \int_O^L Ln(1+x^2)dx = L * Ln(L^2+1) + 2(arctan(L) - L)$$

y su línea de acción se localiza a una distancia de

$$\bar{x} = \frac{\int_O^L x\big(Ln(1+x^2)\big)dx}{\int_O^L \big(Ln(1+x^2)\big)dx} = \frac{\dfrac{(L^2+1) * Ln(L^2+1)}{2} - \dfrac{L^2}{2}}{L * Ln(L^2+1) + 2(arctan(L) - L)} \; a\ la\ derecha\ de\ A$$

Finalmente, se tiene

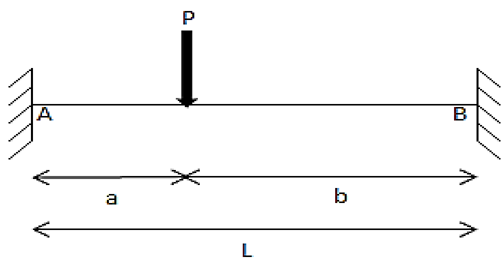
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - A_c + R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = \frac{6(L^4+1)*Ln(L^2+1) - L\big(24arctan(L) + L(5L^2-18)\big)}{12L^3}\uparrow$$

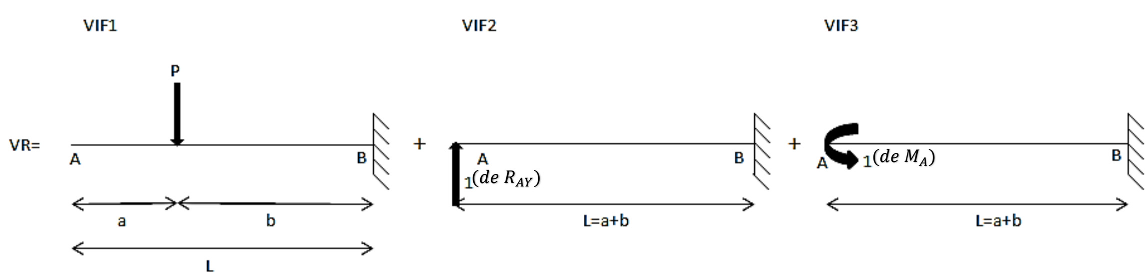
$$+\sum MA = 0 \Rightarrow -M_A + A*\bar{x} - R_{BY}*L + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{6(L^4+3)*Ln(L^2+1) - L\big(48arctan(L) + L(7L^2-30)\big)}{72L^2}$$

VIGA 11.



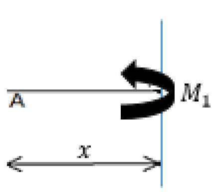
Principio de Superposición.



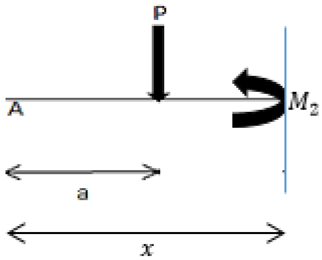
Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

Se deducen los momentos internos M con base en VIF 1.

$$0 \leq x \leq a$$



$$+\sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_1 = 0$$



$$a \leq x \leq a + b$$

$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_2 - P(x-a) = 0 \Rightarrow M_2 = -Px + Pa$$

Los momentos internos de las otras estructuras isostáticas son

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \qquad 0 \leq x \leq a + b$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \qquad 0 \leq x \leq a + b$$

Se requiere de

$$d_1 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a (0)(x)dx + \int_a^{a+b} (-Px + Pa)(x)dx\right] = -\frac{ab^2P}{2EI} - \frac{Pb^3}{3EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a (0)(-1)dx + \int_a^{a+b} (-Px + Pa)(-1)dx\right] = \frac{Pb^2}{2EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^{a+b} (x)(x)dx = \frac{(a+b)^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI}\int_0^{a+b} (x)(-1)dx = -\frac{(a+b)^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{(a+b)^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI}\int_0^{a+b} (-1)(-1)dx = \frac{a+b}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

Las ecuaciones de compatibilidad necesarias son

$$-\left(\frac{ab^2P}{2EI} + \frac{Pb^3}{3EI}\right) + \frac{(a+b)^3}{3EI}R_{AY} - \frac{(a+b)^2}{2EI}M_A = 0 - - - (1)$$

$$\frac{Pb^2}{2EI} - \frac{(a+b)^2}{2EI}R_{AY} + \frac{a+b}{EI}M_A = 0 - - - (2)$$

La solución del sistema es

$$R_{AY}=\frac{(3a+b)b^2P}{(a+b)^3}=\frac{(3a+b)b^2P}{(L)^3}=\frac{Pb^2}{L^3}(3(L-b)+b)=\frac{Pb^2}{L^2}\left(\frac{3L-2b}{L}\right)$$

$$=\left[\frac{Pb^2}{L^2}\left(3-2\frac{b}{L}\right)\right]\uparrow$$

$$M_A=\frac{ab^2P}{a^2+2ab+b^2}=\frac{Pab^2}{(a+b)^2}=\frac{Pab^2}{L^2}$$

Ecuaciones de equilibrio.

Por lo tanto,

$$+\uparrow\sum FY=0\Rightarrow\frac{(3a+b)b^2P}{(a+b)^3}-P+R_{BY}=0$$

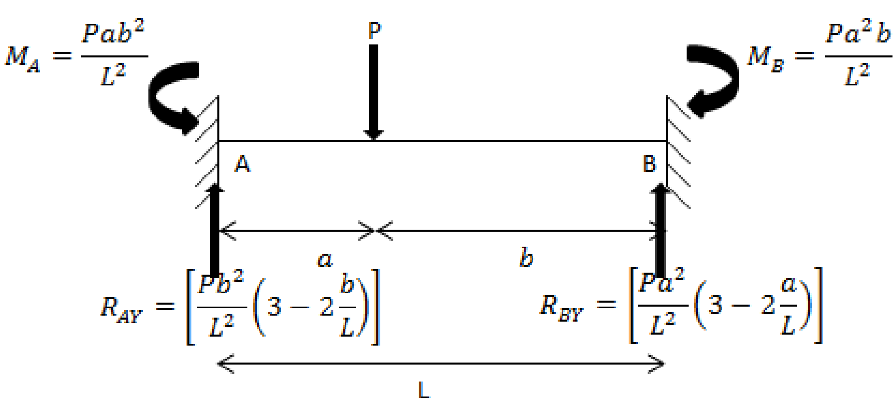
$$R_{BY}=\frac{a^2(a+3b)P}{(a+b)^3}=\frac{Pa^2(a+3b)}{L^3}=\frac{Pa^2}{L^3}\big(a+3(L-a)\big)=\frac{Pa^2}{L^3}(3L-2a)$$

$$=\frac{Pa^2}{L^2}\left(\frac{3L-2a}{L}\right)=\left[\frac{Pa^2}{L^2}\left(3-2\frac{a}{L}\right)\right]\uparrow$$

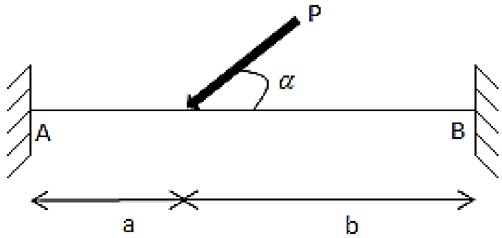
$$+\sum MA=0$$

$$-\frac{Pab^2}{(a+b)^2}+Pa-\frac{Pa^2(a+3b)}{(a+b)^3}(a+b)+M_B=0$$

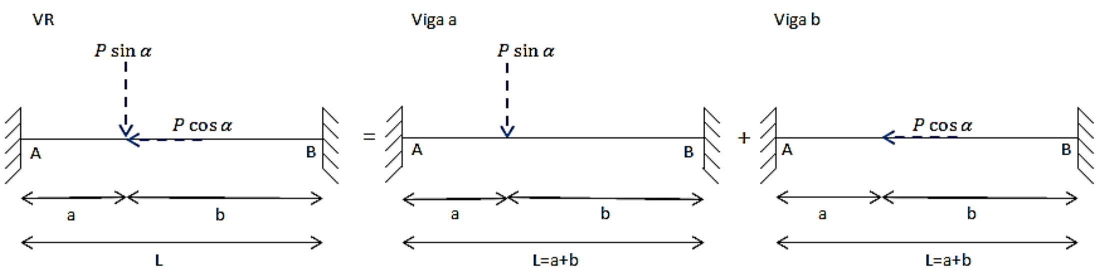
$$M_B=\frac{Pa^2b}{(a+b)^2}=\frac{Pa^2b}{L^2}$$



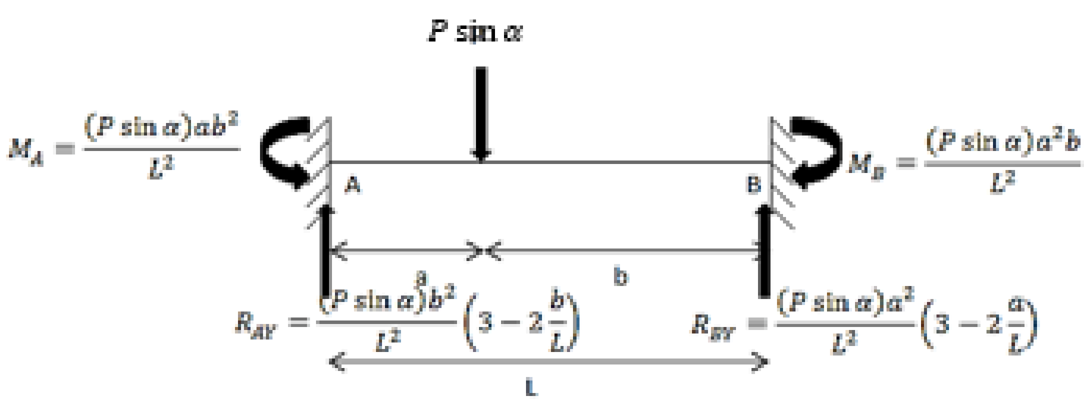
VIGA 12.



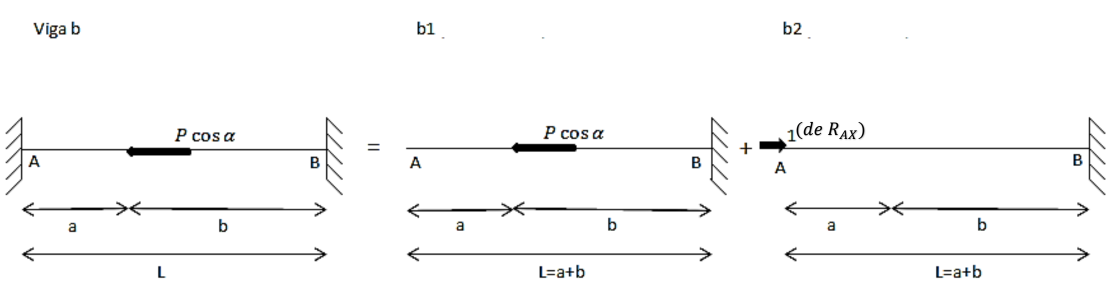
Principio de Superposición.



La viga a es una viga del tipo 11 en la que $P = P\sin\alpha$. En consecuencia,

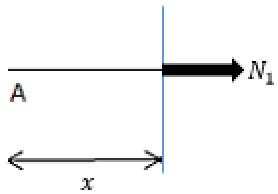


Resolvemos la viga b. Aplicando nuevamente el principio de superposición se tiene



Se determinan las fuerzas normales N de la viga b1.

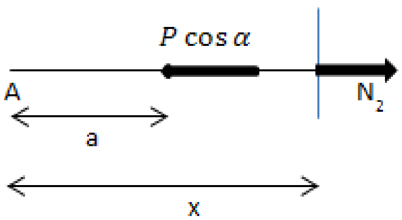
$$0 \leq x \leq a$$



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$N_1 = 0$$

$$a \leq x \leq a + b$$

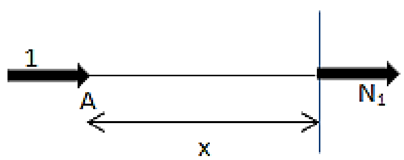


$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$N_2 - P\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_2 = P\cos\alpha$$

Se deduce la fuerza normal n de la viga b2.

$$0 \leq x \leq a + b$$



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$N_1 + 1 = 0 \Rightarrow N_1 = -1$$

La ecuación de compatibilidad para el desplazamiento horizontal en A es

$$\Delta_{HA_{b1}} + \Delta_{HA_{b2}} = \Delta_{HA_{Viga\,b}} - - - (1)$$

Expresando la ecuación (1) en términos de la incógnita se tiene

$$d_1 + f_{11}R_{AX} = 0 - - - (2)$$

La incompatibilidad geométrica es

$$d_1 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Nn}{AE}dx = \int_0^a \frac{(0)(-1)}{AE}dx + \int_a^{a+b} \frac{(P\cos\alpha)(-1)}{AE}dx = -\frac{Pb\cos\alpha}{AE}$$

o también

$$d_1 = \frac{NnL}{AE} = \frac{(0)(-1)(a)}{AE} + \frac{(P\cos\alpha)(-1)(b)}{AE} = -\frac{Pb\cos\alpha}{AE}$$

El coeficiente de flexibilidad es

$$f_{11}=\int_{L_1}^{L_2}\frac{Nn}{AE}dx=\int_{0}^{a+b}\frac{(-1)(-1)}{AE}dx=\frac{a+b}{AE}$$

o también

$$f_{11}=\frac{nnL}{AE}=\frac{(-1)(-1)(a+b)}{AE}=\frac{a+b}{AE}$$

Nota: Para las ecuaciones anteriores, L no es necesariamente la longitud de la viga, más bien hace referencia a la longitud del tramo analizado.

A continuación se sustituyen los resultados en la ecuación (2)

$$-\frac{Pb\cos\alpha}{AE}+\frac{a+b}{AE}R_{AX}=0$$

Despejando la incógnita resulta

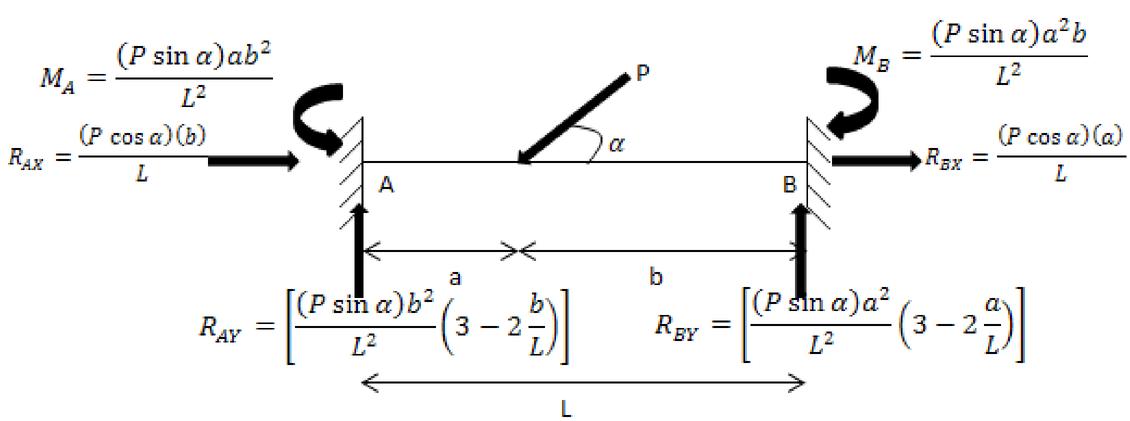
$$R_{AX}=\frac{\frac{Pb\cos\alpha}{AE}}{\frac{a+b}{AE}}=\frac{Pb\cos\alpha}{a+b}=\frac{(P\cos\alpha)(b)}{L}\rightarrow$$

La reacción restante desconocida es

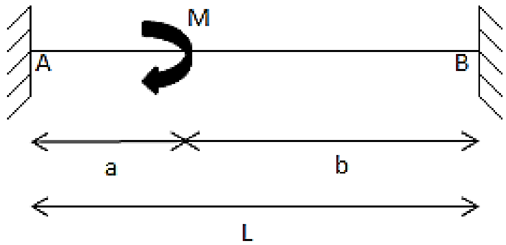
$$+\rightarrow\sum FX=0\Rightarrow -P\cos\alpha+\frac{(P\cos\alpha)(b)}{L}+R_{BX}=0$$

$$R_{BX}=\frac{Pa\cos\alpha}{a+b}=\frac{(P\cos\alpha)(a)}{L}\rightarrow$$

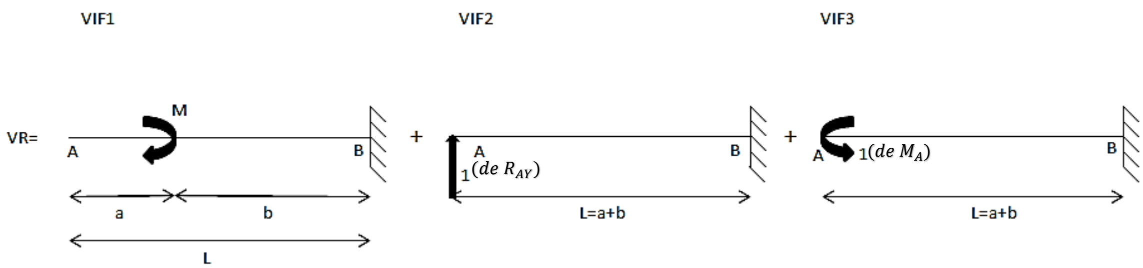
Sumando los resultados de las vigas a y b se obtienen las reacciones de la viga 12.



VIGA 13.



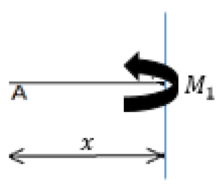
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

Se formulan los momentos internos M con base en VIF 1.

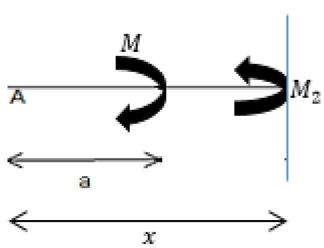
$$0 \leq x \leq a$$



$$+\sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$a \leq x \leq a + b$$



$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_2 + M = 0 \Rightarrow M_2 = M$$

Se retoman los momentos internos m_1 y m_2 de la viga 11.

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \qquad 0 \leq x \leq a + b$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \qquad 0 \leq x \leq a + b$$

Los desplazamientos y pendientes necesarios son

$$d_1 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a (0)(x)dx + \int_a^{a+b} (M)(x)dx\right] = \frac{(2a+b)(bM)}{2EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a (0)(-1)dx + \int_a^{a+b} (M)(-1)dx\right] = -\frac{bM}{2EI}$$

Remítase a la viga 11 y observe que

$$f_{11} = \frac{(a+b)^3}{3EI} \qquad f_{21} = -\frac{(a+b)^2}{2EI} \qquad f_{12} = -\frac{(a+b)^2}{2EI} \qquad f_{22} = \frac{a+b}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

En consecuencia,

$$\frac{(2a+b)(bM)}{2EI} + \frac{(a+b)^3}{3EI}R_{AY} - \frac{(a+b)^2}{2EI}M_A = 0$$

$$-\frac{bM}{2EI} - \frac{(a+b)^2}{2EI}R_{AY} + \frac{a+b}{EI}M_A = 0$$

Al resolver el sistema da

$$R_{AY} = -\frac{6Mab}{(a+b)^3} = -\frac{6Mab}{L^3} \Rightarrow \therefore R_{AY}\,\frac{6Mab}{L^3}$$

$$M_A = \frac{-(2a-b)(bM)}{a^2+2ab+b^2} = \frac{-(2a-b)(bM)}{(a+b)^2} = \frac{Mb}{L}\left(\frac{b-2a}{L}\right)$$

$$\frac{Mb}{L}\left(\frac{b-2(L-b)}{L}\right) = \frac{Mb}{L}\left(\frac{3b}{L} - 2\right)$$

Ecuaciones de equilibrio.

Las reacciones restantes desconocidas son

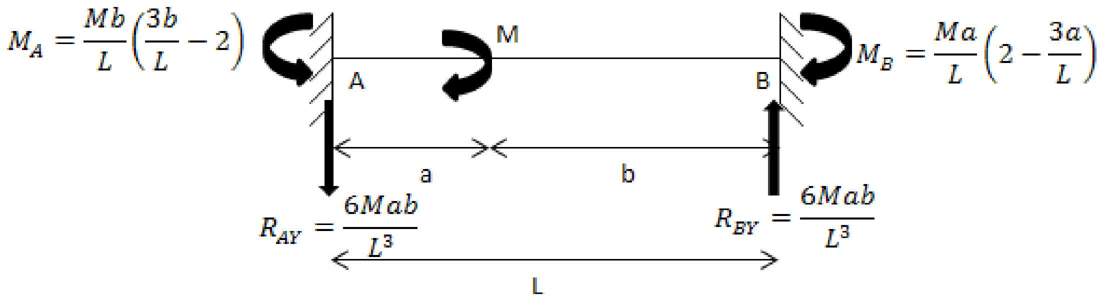
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{BY} - \frac{6Mab}{L^3} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{6Mab}{L^3}$$

$$+\sum MA = 0$$

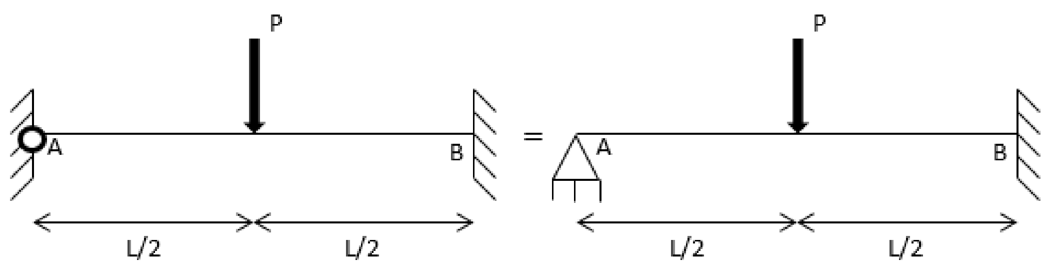
$$-\left(\frac{-(2a-b)(bM)}{a^2+2ab+b^2}\right) + M - \frac{6Mab}{(a+b)^3}(a+b) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{-a(a-2b)M}{(a+b)^2} = \frac{Ma}{L}\left(\frac{-a+2b}{L}\right) = \frac{Ma}{L}\left(\frac{-a+2(L-a)}{L}\right)$$

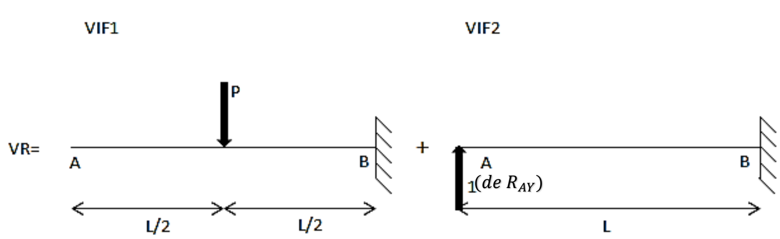
$$= \frac{Ma}{L}\left(\frac{2L-3a}{L}\right) = \frac{Ma}{L}\left(2-\frac{3a}{L}\right)$$



VIGA 14.



Principio de Superposición.



Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.

De la viga 1, se retoman los siguientes desplazamientos

$$d_1 = -\frac{5PL^3}{48EI} \qquad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.

La ecuación de compatibilidad para la deflexión en A es

$$d_1 + f_{11}R_{AY} = 0 - - - (1)$$

Efectuando las sustituciones correspondientes tenemos

$$-\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} = 0 - - - (2)$$

Al despejar la incógnita se obtiene

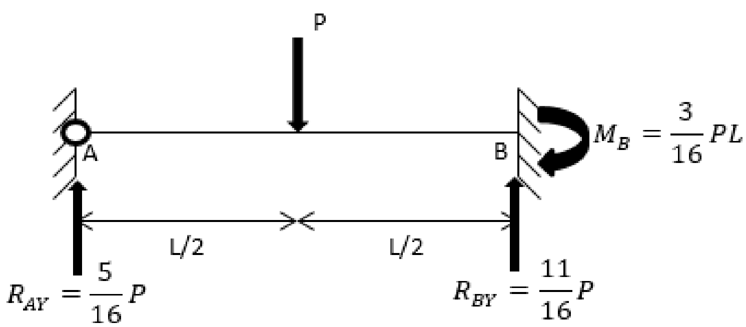
$$R_{AY} = \frac{5PL^3}{48EI} \Bigg/ \frac{L^3}{3EI} = \frac{5}{16}P \uparrow$$

Ecuaciones de equilibrio.

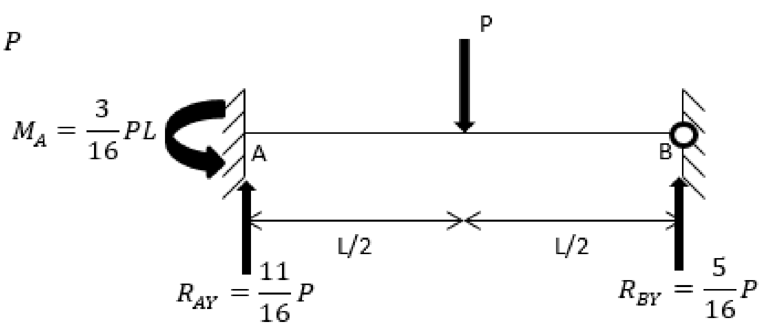
Por lo tanto,

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{5}{16}P - P + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{11}{16}P \uparrow$$

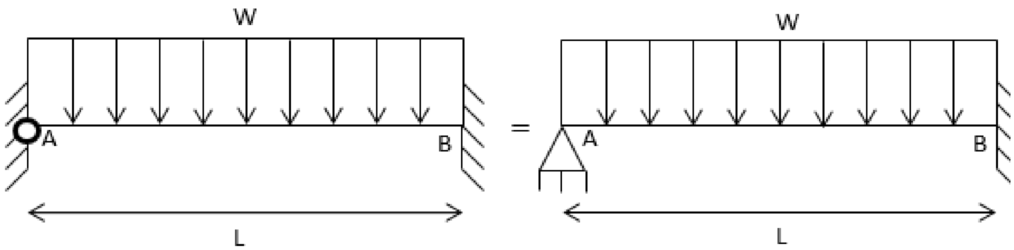
$$+\sum MA = 0 \Rightarrow P\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{11}{16}P(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{3}{16}PL$$



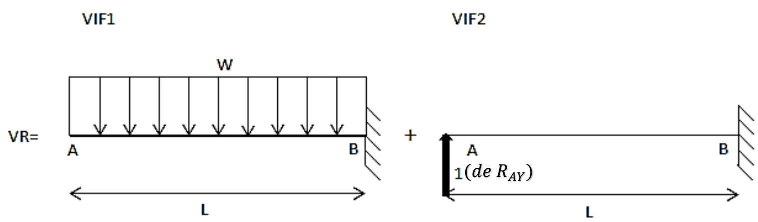
o también



VIGA 15.



Principio de Superposición.



Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.

$$d_1 = -\frac{WL^4}{8EI} \qquad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.

Al plantear la ecuación lineal

$$-\frac{WL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} = 0 - - - (1)$$

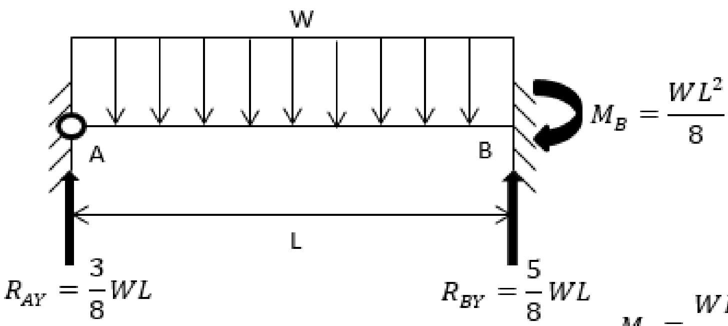
y resolverla, se tiene

$$R_{AY} = \frac{WL^4}{8EI} \bigg/ \frac{L^3}{3EI} \Rightarrow R_{AY} = \frac{3}{8} WL \uparrow$$

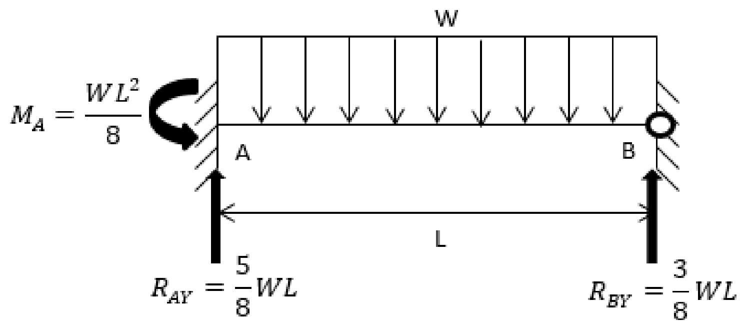
Ecuaciones de equilibrio.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{3}{8}WL - WL + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{5}{8}WL \uparrow$$

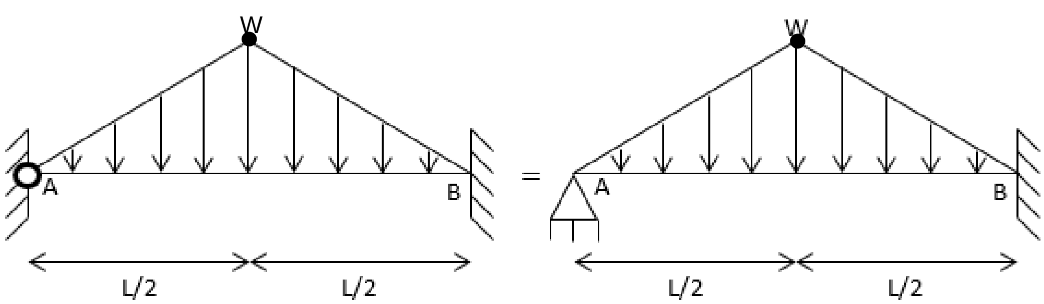
$$+\sum MA = 0 \Rightarrow WL\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{5}{8}WL(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{8}$$



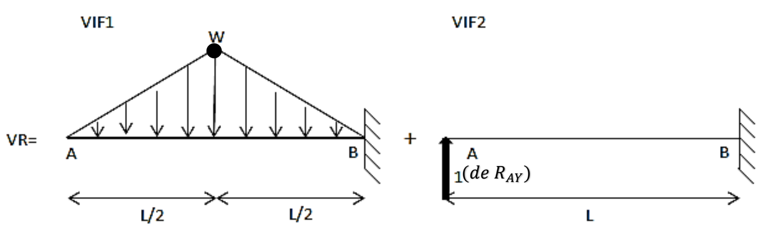
o también



VIGA 16.



Principio de Superposición.



Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.

De la viga 3, se retoman los siguientes desplazamientos

$$d_1 = -\frac{11WL^4}{192EI} \qquad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.

Al formular la ecuación de compatibilidad para la deflexión en A

$$-\frac{11WL^4}{192EI}+\frac{L^3}{3EI}R_{AY}=0$$

y resolverla, se tiene

$$R_{AY}=\frac{11WL^4}{192EI}\bigg/\frac{L^3}{3EI}=\frac{11}{64}WL\uparrow$$

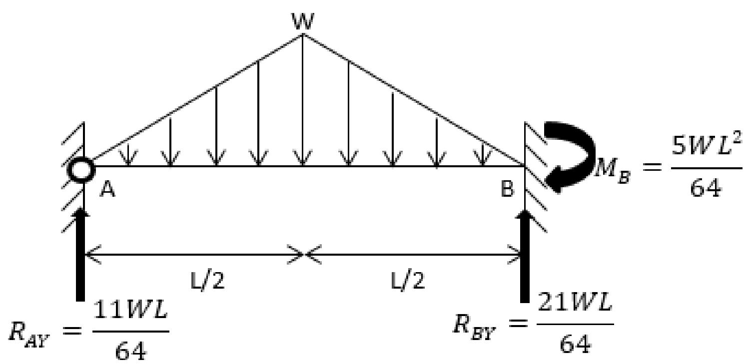
Ecuaciones de equilibrio.

Finalmente,

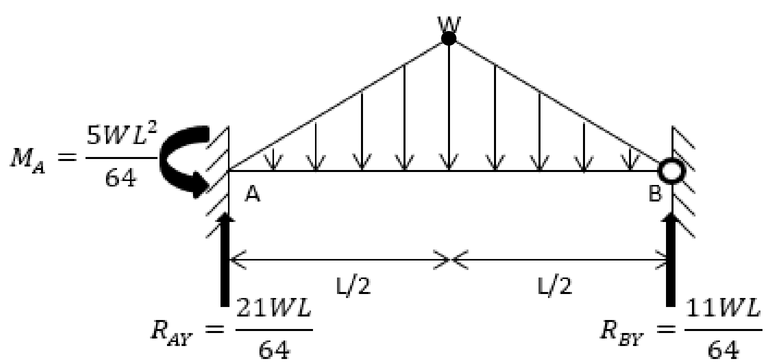
$$+\uparrow\sum FY=0\Rightarrow\frac{11}{64}WL-\frac{WL}{2}+R_{BY}=0\Rightarrow R_{BY}=\frac{21}{64}WL\uparrow$$

$$+\sum MA=0$$

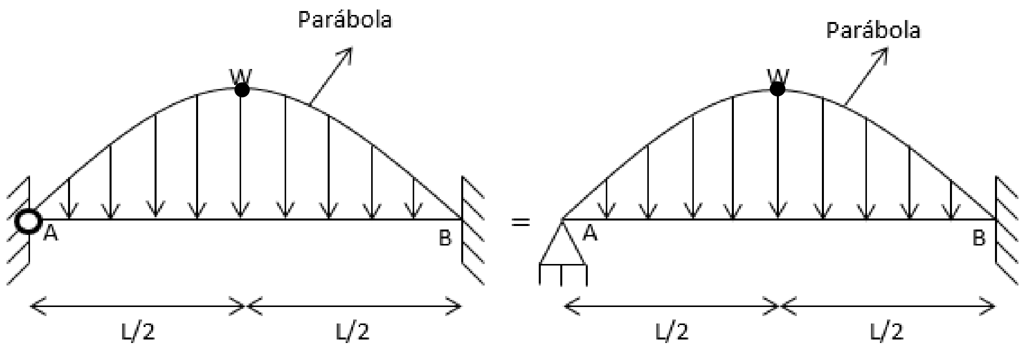
$$\left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right)+\left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right)-\frac{21WL}{64}(L)+M_B=0\Rightarrow\ M_B=\frac{5WL^2}{64}$$



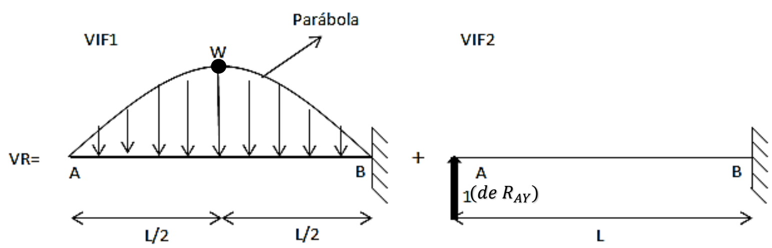
o también



VIGA 17.



Principio de Superposición.



Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.

De la viga 4, se retoman los siguientes desplazamientos

$$d_1 = -\frac{7WL^4}{90EI} \qquad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.

Al resolver la ecuación

$$-\frac{7WL^4}{90EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} = 0 - - - (1)$$

resulta

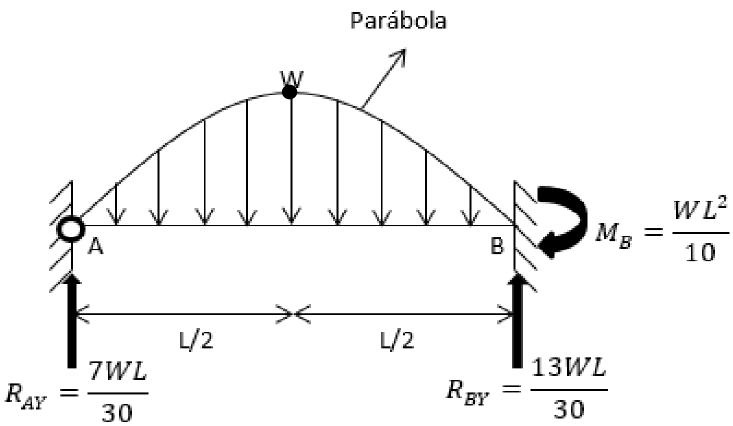
$$R_{AY} = \frac{7WL^4}{90EI} \bigg/ \frac{L^3}{3EI} = \frac{7}{30} WL \uparrow$$

Ecuaciones de equilibrio.

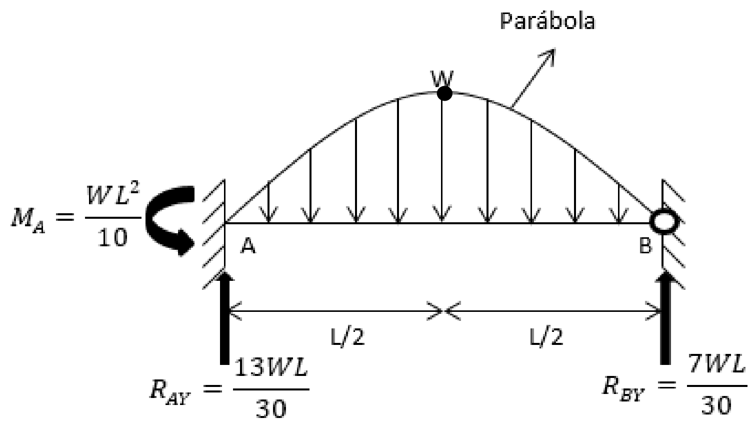
Las fuerzas reactivas en el empotramiento B son

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}WL + \frac{7WL}{30} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{13}{30}WL$$

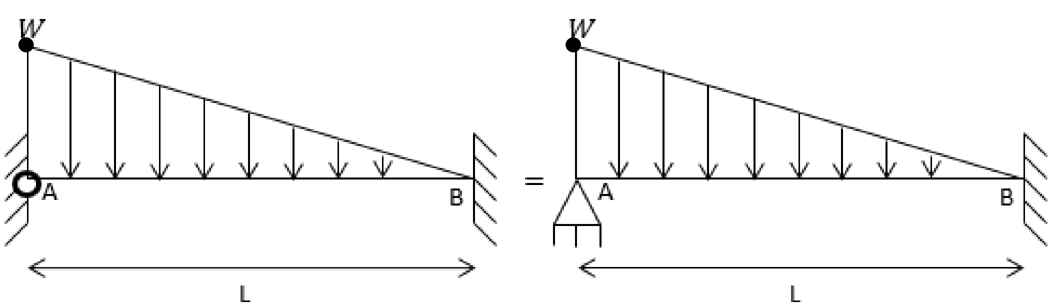
$$+\sum MA = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}WL\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{13}{30}WL(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{10}$$



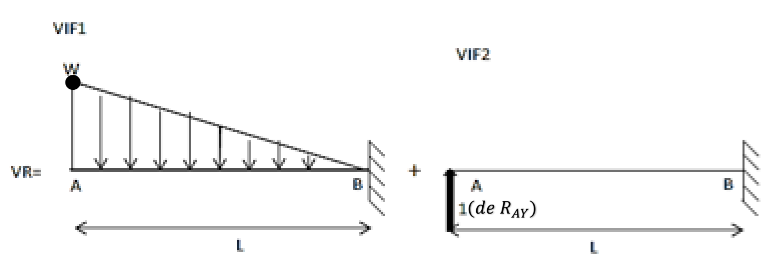
o también



VIGA 18.



Principio de Superposición.



Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.

De la viga 6, se retoman los siguientes desplazamientos

$$d_1 = -\frac{11WL^4}{120EI} \qquad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.

Al plantear la ecuación lineal

$$-\frac{11WL^4}{120EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} = 0 - - - (1)$$

y resolverla, obtenemos

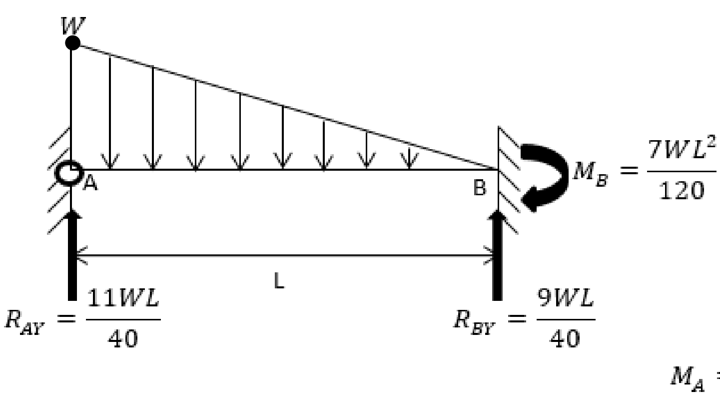
$$R_{AY} = \frac{11WL^4}{120EI} \Big/ \frac{L^3}{3EI} = \frac{11}{40}WL \uparrow$$

Ecuaciones de equilibrio.

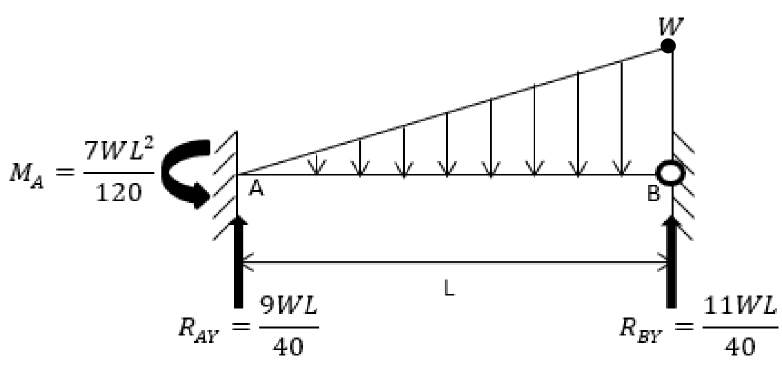
Por lo tanto,

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -\frac{WL}{2} + \frac{11WL}{40} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{9}{40}WL \uparrow$$

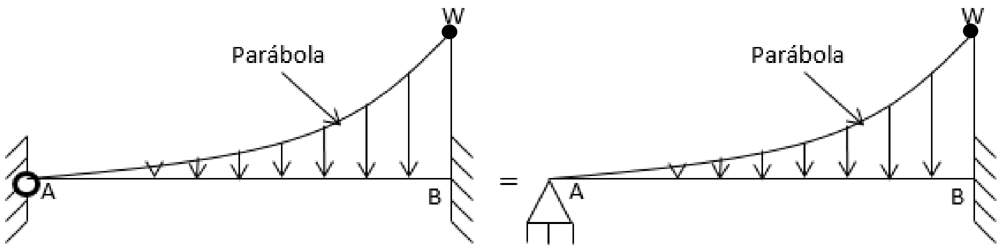
$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow \frac{WL}{2}\left(\frac{L}{3}\right) - \frac{9}{40}WL(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{7WL^2}{120} \circlearrowright$$



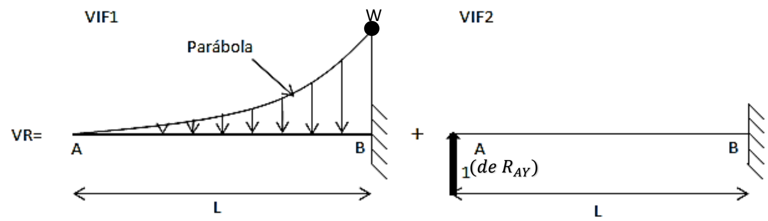
o también



VIGA 19.



Principio de Superposición.



Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.

De la viga 9, se retoman los siguientes desplazamientos

$$d_1 = -\frac{11WL^4}{120EI} \qquad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.

Se formula la ecuación de compatibilidad para la deflexión en A.

$$-\frac{WL^4}{72EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} = 0 - - - (1)$$

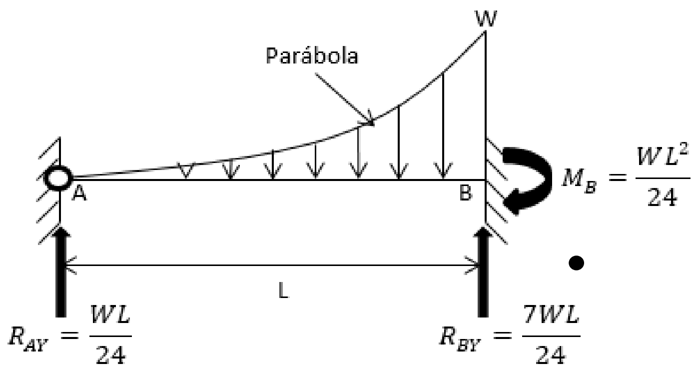
La solución de la ecuación (1) es

$$R_{AY} = \frac{WL^4}{72EI} \bigg/ \frac{L^3}{3EI} = \frac{1}{24} WL \uparrow$$

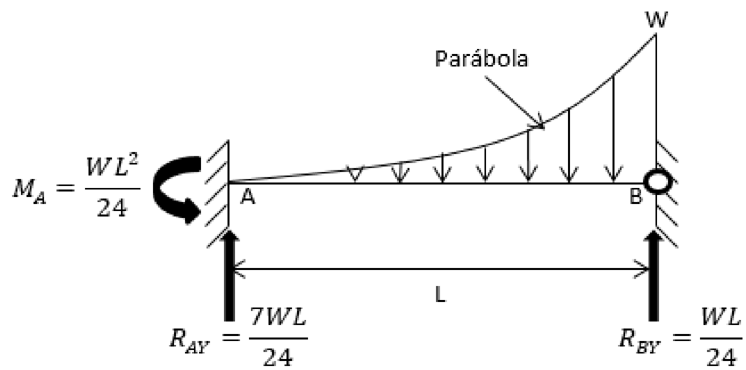
Ecuaciones de equilibrio.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -\frac{WL}{3} + \frac{WL}{24} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{7}{24} WL \uparrow$$

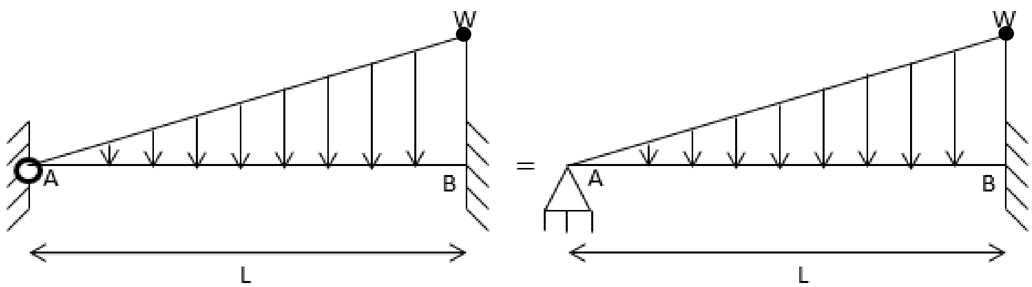
$$+\sum MA = 0 \Rightarrow \frac{WL}{3}\left(\frac{3}{4}L\right) - \frac{7}{24}WL(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{24}$$



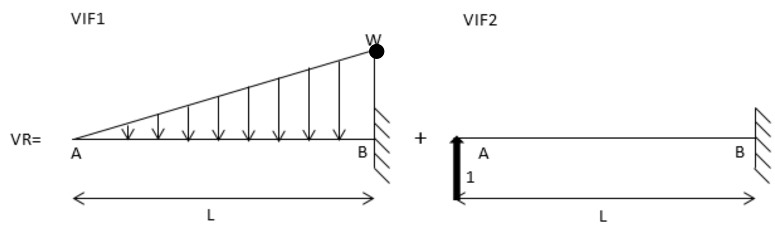
o también



VIGA 20.



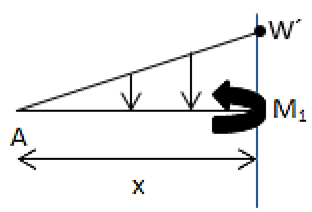
Principio de Superposición.



Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.

Se deduce el momento interno M con base en VIF 1.

$$0 \leq x \leq L$$



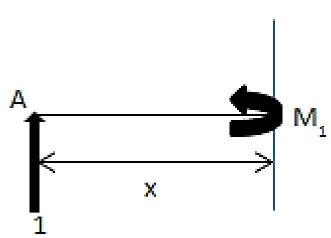
Se calcula la intensidad $W´$.

$$\frac{W}{L} = \frac{W´}{x} \Rightarrow W´ = \frac{W}{L}x$$

$$+\sum Mcorte = 0 \Rightarrow -M_1 - (x)\left(\frac{W}{L}x\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x\right) = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{W}{6L}x^3$$

Se formula el momento interno m con base en VIF 2.

$$0 \leq x \leq L$$



$$+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 + (1)(x) = 0 \Rightarrow M_1 = x$$

Se requiere de los siguientes desplazamientos

$$d_1 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{W}{6L}x^3\right)(x)dx = -\frac{WL^4}{30EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^L (x)(x)dx = \frac{L^3}{3EI}$$

Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.

Al plantear la ecuación

$$-\frac{WL^4}{30EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} = 0 - - - (1)$$

y resolverla se tiene

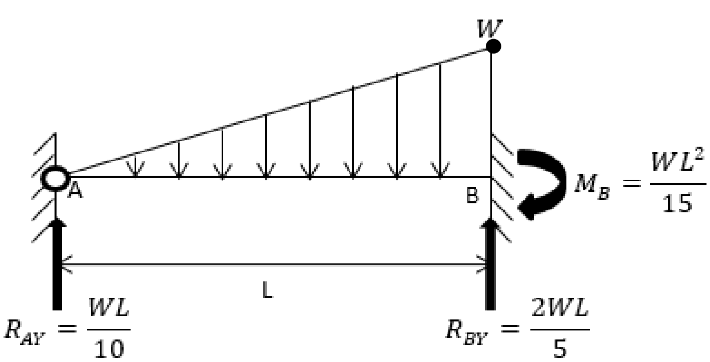
$$R_{AY} = \frac{WL^4}{30EI} \bigg/ \frac{L^3}{3EI} = \frac{1}{10}WL \uparrow$$

Ecuaciones de equilibrio.

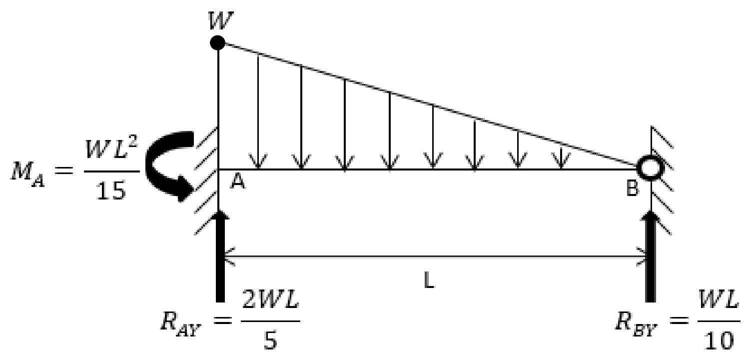
Finalmente,

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -\frac{WL}{2} + \frac{WL}{10} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{2}{5}WL \uparrow$$

$$+\sum MA = 0 \Rightarrow \frac{WL}{2}\left(\frac{2}{3}L\right) - \frac{2}{5}WL(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{15}$$



o también



REFERENCIAS

1. R. C. Hibbeler. Análisis estructural. Editorial Pearson.

2. González Cuevas. Análisis estructural. Editorial Limusa.

3. Selva Colindres Rafael. Dinámica de suelos y estructuras aplicadas a la ingeniería sísmica. Editorial Limusa.

4. Magdaleno Carlos. Análisis matricial de estructuras reticulares. Independiente.

5. James Stewart. Cálculo de una variable: Conceptos y contextos. Editorial CENGAGE Learning.